CIRJE-J-31

親子上場、TOPIX ベンチマークと市場のディストーション

東京大学大学院経済学研究科
小林 孝雄

東京大学大学院経済学研究科
山田 浩之

2000 年 8 月

親子上場、TOPIX ベンチマークと市場のディストーション

(Publicly Listed Parent/Subsidiary Pairs: Benchmarking to TOPIX and Market Distortion)

2000 年 8 月 31 日

小林　孝雄

東京大学大学院経済学研究科

山田　浩之

東京大学大学院経済学研究科

Abstract

This paper explores the impact of publicly listed parent/subsidiary pairs on the pricing and volatility of companies' shares.

We construct a noisy rational expectations equilibrium model in which a parent and its subsidiary company are both publicly listed. Two classes of traders participate in the market: institutional investors who have private information on the fundamentals of listed companies, and individual investors who have no private information. A key feature of the model is that institutional investors attempt to optimize the risk-return tradeoff relative to TOPIX, the capitalization-weighted index of the stock market. Individual investors are assumed to act without reference to any performance benchmark.

Within this framework we first establish the rather obvious result that the market portfolio of all outstanding shares is not an efficient portfolio. This result implies that benchmarking to TOPIX, which is the surrogate of the market portfolio without any adjustment for double-counting of parent/subsidiary pairs, generates excessive demand for shares of the subsidiary company. We analyze the equilibrium of our market model and show that (1)the price of the subsidiary company's share is pushed up to a level higher than that implied by its fundamentals, (2)the share price of other companies who are highly correlated with the subsidiary company receive similar effect, (3)the subsidiary company's shares become more volatile and (4)tend to respond more to good news than to bad news.

The results of this paper suggest that using TOPIX as the performance benchmark, which is the prevailing practice in evaluating pension fund managers and other institutional investors, may be causing distortion in share prices and volatilities of subsidiary companies. A new index which corrects for the double counting is worth a serious consideration.

要約

親子上場と TOPIX ベンチマーク運用が子会社株の品薄状態を加速し、株価形成や投資の運用効率に悪い影響を与えている。これは、子会社固定株に対する修正を行わない TOPIX を運用評価のベンチマークに用いることが原因である。本稿はこの仮説を理論的に検証するものである。

理論モデルは標準的な CAPM をベースに、次の４つの仮定を置くことで、親子上場と TOPIX ベンチマーク運用という日本的市場条件に合わせた。

仮定１．親会社は保有する子会社株を手放さない。

仮定２．機関投資家は対 TOPIX 超過リターンを追求するアクティブ・マネジャーである。

仮定３．機関投資家は独自の情報収集を行い優れた分析力を持つ点で、個人投資家よりも情報優位にある。

仮定４．機関投資家も個人投資家も、株式の空売りはできない。

理論モデルの分析から得られる命題は、以下の通りである。

（1）仮定１の下で、TOPIX をベンチマークにしたマネジャーの評価システムは、運用リスクとリターンの効率化を阻害する。

（2）仮定２が加わると、子会社ならびに類似企業の株式はファンダメンタルズを超えて過大評価される。一方で、親会社の株価はそうした影響を受けない。

（3）さらに仮定３が加わると、個別企業のニュースに機関投資家がまず反応して市場をリードする。個人投資家は、最初は機関投資家の売買に追随するが、株価が十分大きく振れると、機関投資家の買いには売りで、売りには買いで対抗するようになる。ここまでの仮定では、親子上場が子会社株のボラティリティを上昇させることはない。

（4）仮定４が加わると、小さなニュースが子会社の株価を大きく変動させることが起こる。子会社株の急騰は、株価上昇時に起こる。

また、親会社が保有する子会社株時価総額が親会社の時価総額を上回るという一見矛盾した現象についても、その発生メカニズムを私たちのモデルで説明することができる。

1．はじめに

筆者の一人は、かつて、株式持ち合いによる企業価値のダブルカウントについて警鐘を鳴らしたことがある。日本の株式市場の時価総額がついに米国を超えたと日本中が有頂天になった、日本経済のバブル絶頂期であった。最近になって同じ警鐘を、今度は別の視点からふたたび鳴らす必要が起きている。前回は、企業価値のダブルカウントが日本の経済力を実力以上に見せるという、時価総額の「着膨れ」問題であった。今回は、TOPIX（東証株価指数）というダブルカウントの株価指数を対象にベンチマーク運用する機関投資家の行動の影響である。そしてこの問題は、情報通信関連企業を中心にした最近の子会社上場ブームによって、市場に与える影響が深刻化しているようにみえる。

日本では、1990 年以降、運用成果をトータル・リターンでなく特定のパフォーマンス目標（ベンチマーク）を基準に比較評価するという習慣が、年金や投資信託を運用する機関投資家の間で始まり、最近になってこの習慣が定着してきた。特に年金運用の世界では、株式について TOPIX をベンチマークとして利用する例が圧倒的である。これには、厚生年金基金連合会による運用基本方針の発表[1]なども大きな役割を果たしていると聞く。

周知のように、TOPIX は東証市場第一部全銘柄の時価総額の合計を指数化したものである。親会社と子会社がともに上場していても、両方の企業の上場株数を単純に組み込んで指数が計算される。したがって、発行済み株式の大半が親会社保有で子会社株が市場で極端に品薄であっても、TOPIX ポートフォリオを運用する投資家は、子会社株を時価総額に比例したウエイトで持つ必要に迫られる。こうしたインデックス運用や市場型アクティブ運用が大きなシェアを占めるようになると、時価総額の割に極端に少ない子会社の浮動株を機関投資家が奪い合うことになる。最近見立つようになった一部の子会社株の異常な高値は、これが原因と考えられないだろうか。子会社株の高騰は、親会社保有分の子会社株時価総額が親会社の時価総額を超えるという、経済原理からみれば説明できないような逆転現象さえ起こしている[2]。

日本企業の時価総額第 1 位は NTT ドコモで TOPIX の 6.45%を占める。他にセブン－イレブン・ジャパン（第 5 位、同 1.73%）、日本オラクル（第 13 位、同 1.16%）、NTT データ（第 23 位、同 0.72%）、松下通信工業（第 38 位、同 0.55%）、伊藤忠テクノサイエンス（第 88 位、同 0.25%）、などの子会社群が時価総額上位 100 社に顔を並べている。全体でいうと、TOPIX に占める子会社の時価総額比率は 12.95%、親会社持ち分の時価総額比率でも 8.17%を占める。また、東証について市場第一部以外も含めると、1999 年に上場した 73 社のうち親会社の出資比率 20%超の企業は 16 社にのぼるという。あるいは、日立製作

[1] 厚生年金基金連合会「年金資産運用の基本方針」1996 年 5 月策定。

[2] セブン－イレブン・ジャパンの時価総額は 7.4 兆円、同社株の 50.7%を保有する親会社イトーヨーカ堂の時価総額は 2.7 兆円である。単純な計算でいうと、2.7 兆円を投じてイトーヨーカ堂の全株式を取得すれば、セブン－イレブン・ジャパンの株式 3.7 兆円分が手に入ることになる。

所は傘下に 30 社以上の上場子会社、孫会社を持っている[3]。

親子上場は、かつては日本独特の現象のように言われたことがあるが、米国でも、最近、企業の一部を（完全にスピンオフさせないで）議決権のないトラッキング・ストック（事業収益連動株）として上場させることがブームとなっている。ゼネラル・モーターズ(GM)は傘下の衛星会社ヒューズ・エレクトロニクスの株式をトラッキング・ストックとして上場し、ヒューズ株の 68%を保有している。また、ゼネラル・エレクトリック社(GE)は、持ち株会社である GE の時価総額を重視し、企業価値流出を防ぐため傘下企業の株式は公開しないことを長年の原則としてきたが、1999 年 11 月末にネット会社 NBC インターネットの株式公開に踏み切り、公開後も 47%の株式を保有している[4]。

こうした親子上場に海外のインデックスはどう対処しているか。世界株価指数として最もポピュラーなモルガン・スタンレー・キャピタル・インターナショナル(MSCI)の指数では、親会社、子会社のどちらか一方だけをインデックスに採用することで、企業価値のダブルカウントを避けている。また、子会社の浮動株分だけをカウントして指数の市場代表性を確保することも可能である。2000 年に登場したソロモン・スミス・バーニー社の「グローバル・プライマリー・マーケット・インデックス」や、同年にスタンダード・アンド・プアーズ社が開始した世界株価指数の日本株部分「S&P・TOPIX150」は、市場に流通している株式の時価総額をもとに算出した浮動株調整型指数である。日本株全体については、1995 年に開始された「ラッセル・ノムラ日本株インデックス」が浮動株調整型指数である。こうした指数を使えば、上で指摘した市場への異常な影響を避けることができるであろうことは、直観的には明らかであろう。

この日本的習慣が資産運用の効率を阻害することはないか。市場が子会社株に企業のファンダメンタルズから離れた過大な評価を与える可能性はないか。親会社株に対する影響はどうか。また、子会社、親会社の株価のボラティリティを異常に上昇させる要因になりはしないか。さらには、品薄な子会社株について起きるこれらの弊害は、発行済み株式数の少ない小型株全般にも共通して起きるより一般的な問題か。本論文では、これらの問題に対して理論モデル分析を通じて答えを明らかにしている。それぞれの問いに対する答えは、すべて同一の前提条件の下で成立するものとはならなかった。「投資家行動の非効率性」が、最も緩い前提の上で導かれる命題であった。逆に、「子会社株のボラティリティの上昇」が最も強い前提条件を必要とした。また、親会社の株価はシステマティックな影響を受けない、という命題が導かれた。さらに、TOPIX ベンチマークによって子会社の株価が受けるのと同じ影響を、上場株数の少ない（したがって品薄な）小型株全般が受けるわけではない。

[3] 2000 年 7 月時点。野村證券金融研究所調べ。データを提供していただいた福嶋和子さんに感謝したい。
[4] 日経産業新聞「有力子会社ヒューズを分離せよ。子離れ迫られる GM」1999 年 12 月 10 日。

２．モデルの構造

まず、私たちが親子上場の問題を分析するために用いたモデルの構造について説明する。

（1）株式市場

本稿で検討を加えたい第１の問題は TOPIX の効率性である。市場ポートフォリオの効率性が資本資産評価モデル（Capital Asset Pricing Model、以下 CAPM と略する）の枠組みで成立する最も重要な命題であることは、周知の通りである。親子上場とこの命題の関係を調べるのが第１の目的なので、私たちはできるだけモデルの構造を CAPM のそれに揃えた。具体的には、１期間のモデルを定式化して、投資家は期初に取引を行ない、期末に株式の期末清算価値を受取るものとする。また、シャープ版の CAPM と同様、投資家は同じ安全利子率で資金を運用することも借り入れることもできると仮定する。

N 社の企業が取引所に株式を上場しているとする。後の便宜のために、それぞれの企業（及び株式）に 1,2,...,N と番号をふる。企業 i の株式の価格を p_i とおく。$p=\left(p_1,\ldots,p_N\right)$ のように、右下の数字の無い記号を用いてベクトル表記する。以下で定義される変数についても同様である。企業 i の投資家一人あたりの発行済み株式数を w_i' とおく。これは、企業 i の発行済み株式の総数を投資家の総数で割ったものである。また、企業 i の一株あたり期末清算価値を d_i' とおく。期初の時点で、投資家は d' が平均 $\bar{d}'$、分散共分散行列 Σ' の N 次元正規分布に従うという共通の期待を持っているとする。

さらに、このモデルに親会社も子会社も上場している企業を想定する。具体的には、企業１が企業２の子会社であるとする。持ち株比率は q である。話を簡単にするために、親子上場はこの一組の企業だけで、他には株式の持合い関係はないものとする。また、親会社が子会社株を保有するのは、株式から配当やキャピタル・ゲインを求めるという純投資ではなく、子会社に対するコントロール権の確保が目的で、子会社株の株価の動向にかかわらず親会社は保有する子会社株を手放さないと仮定する。

投資家が利用可能な株式は、もし親子上場が存在しなければ、発行済み株式全てである。しかし、今回仮定したように親会社が子会社の株式を決して手放さないとすると、親会社の保有する子会社株式は投資家には利用できなくなるため、発行済み株式全てを利用することはできなくなる。そこで、企業 i の、投資家が利用可能な株式供給量を新たに w_i と定義する。なお、w_i は w_i' と同じく、投資家一人あたりに直した株式供給量とする。

一方、市場に流通しなくなった親会社の子会社株持分は、親会社株からの収益の増加という形で市場に還元される。すなわち、親会社の株主が期末に受取る金額は、親会社の期末清算価値に子会社株持ち分の期末清算価値を加えたものとなる。そこで、このような親子上場の影響を加味した、投資家が企業 i の株式一株から得る正味の収益を d_i と定義する。

市場には安全資産である債券も存在する。債券の利子率は 0 であり、投資家は債券を自

由に売り買い　できるとする。

（2）投資家

株式市場に参加するのはそれぞれ機関投資家、個人投資家と呼ばれる 2 種類の投資家である。それぞれは次のような特徴を持つと仮定する。

A. 機関投資家

私たちのモデルで機関投資家と呼ぶのは、TOPIX をベンチマークとして評価されるアクティブ・マネジャーである。より厳密に表現すると、機関投資家は対 TOPIX 超過リターンが生み出す効用の期待値を最大化しようとする。なお、TOPIX を目標にインデックス運用を行うパッシブ・マネジャーを別のタイプの機関投資家として想定することもできるが、この種の投資家をモデルに追加しても結論に変化はないので、話を簡単にするためにアクティブ・マネジャーだけを機関投資家と考える。

機関投資家、とりわけパフォーマンス・ベンチマークを凌駕しようとするアクティブ・マネジャーは、個人投資家に比べて情報をより積極的に収集し、またそれらの情報をより的確に分析する能力を備えていると考えられる。こうした側面を反映するために、私たちのモデルでは、機関投資家は期末に実現する株式からの収益に関して（他の投資家が持っていないような）私的な情報を持っていると仮定する。

以上をまとめると、機関投資家は

・対 TOPIX 超過リターンが生み出す効用の期待値を最大化する
・株式の収益に対して私的な情報を持つ

という２つの特徴を持つ。この二つの特徴を、今回のモデルでは以下のように表現することにする。

機関投資家はw'に対する超過収益の期待効用を最大化するように取引を行うと仮定する。TOPIX あるいは本論文で市場ポートフォリオと呼ぶポートフォリオは、各株式を時価総額を単純にウェイトとして組み込んだポートフォリオである。したがって、投資家一人当たり発行済み株式数w'が市場ポートフォリオとなる。このw'から得られる収益をd_Mとし、機関投資家のポートフォリオから得られる収益をd_Iとおくと、機関投資家は$d_I - d_M$に対する期待効用を最大化しようとする。ただし、当然ながら機関投資家が作成するポートフォリオの作成費用はw'の価格と等しくなければならない。

機関投資家の効用関数の形は指数型効用関数であると仮定する。以上をまとめると機関投資家は、ポートフォリオの作成費用がw'と等しいという条件の下で、

$$-\exp\{-(d_I - d_M)\} \qquad \cdots(1)$$

という効用関数の期待値を最大化するように取引を行う。

これに加えて、機関投資家は期末の株式収益に関する私的情報を受け取るわけだが、機関投資家が受け取る私的情報はそれぞれ異なるので、機関投資家の一人一人を区別する必要がある。そこで以後、それぞれの機関投資家を区別して特にその中の一人を指すときには、機関投資家 j と呼ぶことにする。

機関投資家 j は期初に期末の株式収益に関する私的情報 $s^j = d + e^j$ を観測する。e^j は機関投資家の私的情報の偏りを表す。すなわち機関投資家 j は、株式から将来得られる収益 d よりも e^j だけ偏りを持った私的情報を受け取ることになる。e^j は平均 0、分散共分散行列 Σ_e の N 次元正規分布に従い、各機関投資家の間で独立かつ同一であるとする。また、その他の確率変数とも独立であるとする。

B. 個人投資家

特定のベンチマークに対する相対パフォーマンスで評価されるのが機関投資家とすれば、私たちが個人投資家と呼ぶのは、投資から得られるトータル・リターンを最大化しようとする投資家である。より厳密には、個人投資家はトータル・リターンが生み出す効用の期待値を最大化しようとする。また、個人投資家は機関投資家のような特別な私的情報を持たない。すなわち、個人投資家は

・トータル・リターンが生み出す効用の期待値を最大化する
・株式の期末清算価値に対して私的な情報を持たない

という２つの特徴を持つ。

個人投資家は期初に M_U だけの資産を持っていると仮定する。また、個人投資家のポートフォリオからの収益を d_U とするとき、

$$-\exp(-d_U) \qquad \cdots(2)$$

という効用関数の期待値を最大化すると仮定する。

市場に機関投資家が市場に占める割合は a であり、個人投資家が市場に占める割合は $1-a$ であると仮定する。また市場には十分多数の投資家が存在すると仮定する。

（3）予期せぬ株式供給

市場には、投資家にとって既知の株式供給 w のほかに、投資家が予期しない株式供給 x が存在するとする。ただし x は w と同様、投資家一人あたりに直した供給量である。x は平均０、分散共分散行列 Σ_x の N 次元正規分布に従い、その他の確率変数とは独立であるとする。

（4）空売り制約

機関投資家も個人投資家も、株式を空売りすることはできないと仮定する。

（5）投資家の学習と株式市場の均衡

以上、（1）から（4）まで私たちが用いるモデルの仮定を記してきた。以下の章ではこれらの仮定を必要に応じて順次用いて分析を行っていく。

私たちが第１に導く命題は、「親子上場がある場合、市場ポートフォリオは効率的ポートフォリオでなくなる」という命題である。つまり、親子上場は CAPM の中心定理を不成立にする、というわけである。

この第１の命題を導くためには、上記（1）の株式市場に関する仮定は必要であるが、（2）の投資家に関する仮定は不要である。よく知られているように、CAPM ではトータル・リターンとリスクのトレード・オフを最適化する投資家だけが想定される。これは、上記２種類の投資家のうち、個人投資家に相当する。つまり、第１の命題は、親会社と子会社がともに上場する１組の企業の存在を除いて、CAPM とまったく同じ前提条件の上で導くことができる。

一方、「親子上場によって株式の価格形成が歪められることがあるか」という第２の問題を考える際は、（1）の株式市場に関する仮定と（2）の投資家に関する仮定の両方を用いて分析を行う必要がある。特に、TOPIX に対する超過リターンを追求するアクティブ・マネジャーの存在が、分析にエッセンシャルな役割を果たす。

後者の問題を扱う際にはノイズ付き合理的期待モデル(Noisy Rational Expectations Model)と呼ばれるモデルを用いる。このモデルは、投資家が株式の期末清算価値について自分だけに観測可能な私的情報を持つ状況で、株価がどのように決定されるかを分析するモデルである。アクティブ運用を行う機関投資家は、私的に得た情報に基づいて将来を予測し、自分の目的に最もかなったポートフォリオを求める。そして、求めたポートフォリオを実現すべく個別株式に対して売りないしは買いの注文を市場に出す。他方、個人投資家は私的な情報を持たないので、将来に対して機関投資家よりも素朴な予想しかなしえない。しかし、予測に基づいて自分の目的に最もかなったポートフォリオを求め、そのポートフォリオを実現すべく個別株式に売りないしは買いの注文を出すのは、機関投資家と同

じである。
市場には十分多数の機関投資家や個人投資家が参加していて、どの投資家も価格支配力を持たない。つまり、個別の投資家は現在市場で提示されている株価を所与として最適なポートフォリオを求め、それに応じた売買注文を市場に出す。株価は需給バランスを求めて調整を続け、市場は迅速に全銘柄について売り注文と買い注文が一致する均衡状態に至る。
ここまでの構成は、ミクロ経済学のテキストで解説される完全競争市場の均衡と本質的な差はない。機関投資家と個人投資家が持つ情報に差があるといっても、情報の差の分だけ両者の求めるポートフォリオがかい離するだけで、両者の効用関数が異なるという仮定を設けるのと実質的に同じである。
しかし、自分が情報劣位にあることを個人投資家が知っていれば、話はもう少し複雑になる。ある銘柄の株価が自分の判断する水準よりも高ければ、情報優位に立つ機関投資家がその銘柄についてよいニュースをつかんでいるのではないかと、個人投資家は考えるはずである。つまり、私的な情報を持たない個人投資家にとって、市場で成立している株価の水準が重要な情報源となる。モデルに即していうと、個人投資家は、機関投資家だけが観測する私的情報の中身は見えなくても、株価と私的情報の相関関係を利用してそれを推測することができる。
このような株価の情報伝達機能は、機関投資家にとっても、自分以外の機関投資家が私的に収集した情報の推測をもたらすという意味で、個人投資家に対するのと同じ役割を果たす。個人投資家、機関投資家を問わず、市場で成立している株価から彼らが情報推測を合理的に行えるようになるまでには、相当の経験と学習を市場で積み重ねる必要があるのは当然であろう。合理的期待モデルとは、そうした学習プロセスが収束する先でどのような均衡が成立するのかを導き出すモデルである。
なお、（3）の予期せぬ株式供給に関する仮定はいささか技術的な仮定である。合理的期待モデルの均衡において株価と私的情報の間に完全な相関が実現するようなモデルを作ることができる。そのような均衡では、個人投資家も株価を通じて私的な情報を完全に知ることができる。これは、株価が市場参加者の持つ情報を完全に反映する「強度の効率的市場(strong-form efficient market)」に相当する。私たちのモデルでは株価と私的情報の相関は不完全で、株価に内包される情報を個人投資家が合理的に読み取っても、機関投資家に対する情報劣位は変わらない。後者の性質が導かれるモデルは、ノイズ付き合理的期待モデルと呼ばれる。この後者の性質を導くためには（3）の仮定が必要となる。
また（4）の空売り制約に関する仮定は、TOPIX の非効率性や子会社株の過大評価を導く上では関係しないが、子会社株のボラティリティの増大を導くときに重要な役割を果たすことになる。

ここで、あとの説明に便利なように、私たちが用いた仮定のうち CAPM の標準的な仮定

に反するものを箇条書きに整理しておく。

仮定１．親会社は保有する子会社株を手放さない。

仮定２．機関投資家は対TOPIX 超過リターンが生み出す効用の期待値を最大化するアクティブ・マネジャーである。

仮定３．機関投資家は、株式の期末清算価値について独自の私的情報を持つ点で、個人投資家よりも情報優位にある。

仮定４．機関投資家も個人投資家も、株式の空売りはできない。

３．TOPIX の効率性

TOPIX は、東証市場第一部全銘柄の時価総額の推移を表す株価指数である[5]。投資家の立場からみれば、上場全銘柄を、上場株数の時価総額に比例したウエイトで組み込んだポートフォリオの価値変動を表す指数である。親会社と子会社がともに上場している場合、両方の会社の上場株数を単純に組み込んで指数が計算される。したがって、TOPIX ポートフォリオを運用する投資家は、親会社の株式と子会社の株式をともに上場株数の時価総額に比例したウエイトで持つことになる。

この TOPIX ポートフォリオがリスクとリターンの平面上で効率的なポートフォリオであるかどうかが、第１の検討課題である。日本では大多数の年金スポンサーが、株式マネジャーを評価する際のベンチマークとして TOPIX を採用している。この慣行を支える理論が、市場ポートフォリオの効率性を主張する CAPM であることは、言うまでもない。

第２章で構築したモデルには、親子上場のほかにも機関投資家という特殊な投資家の存在が仮定されている。そのため、このモデルをそのまま用いると、仮に CAPM の命題が否定されたとしてもその原因が親子上場なのか機関投資家の存在なのか、あるいは両方なのかはっきりしない。そこで、まず第２章で構築したモデルをできるだけ CAPM に近い形に制限することにする。

標準的な CAPM では、市場にはトータル・リターンに対する期待効用を最大化する投資家しか存在せず、かつ投資家の間に私的情報は存在しない。今回のモデルに促して考えると市場には個人投資家しか存在しない。また、株式の総供給量は既知であり、予期せぬ株式供給は想定しない。したがって、x は常に０である。この二つの仮定は

[5] 有償増資、新規上場、上場廃止など、資金の流入・流出を伴う上場株式数の増減がある場合には、基準時価総額の調整で指数の連続性が保たれる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 0 \\ \Sigma_x &= O \end{aligned} \qquad \cdots(3)$$

と表すことができる。この二つの仮定を置くことにより第２章のモデルは、親子上場の仮定を除いては基本的な CAPM とまったく同じ構造を持つこととなる。

まず、親子上場によって、株式から得られる収益$\boldsymbol{d}$と株式供給量$\boldsymbol{w}$がそれぞれ企業の期末清算価値$\boldsymbol{d}'$と発行済み株式数$\boldsymbol{w}'$からどのように変化するかを検討しよう。

親会社である企業 2 は企業 1 の発行済み株式数w_1'のうち、qw_1'を保有し、市場には放出しない。したがって、投資家から見た企業 1 の株式の総供給量は$(1-q)w_1'$となる。したがって株式の実質的総供給量$\boldsymbol{w}$は、

$$\boldsymbol{w} = (w_1,\ldots,w_N) = ((1-q)w_1', w_2',\ldots,w_N') \qquad \cdots(4)$$

となる。

一方企業２は期末の時点で子会社株持分の清算価値を受取る。これはそのまま投資家に還元される。一株あたり収益に直すと、この子会社株持ち分からの収益は$q\dfrac{w_1'}{w_2'}d_1'$となるので、結局、投資家は期末に、企業 2 の株式一株から$d_2' + q\dfrac{w_1'}{w_2'}d_1'$の収益を受け取ることになる。したがって、株式の一株あたり収益$\boldsymbol{d}$は

$$\boldsymbol{d} = (d_1,\ldots,d_N) = \left(d_1', d_2' + q\frac{w_1'}{w_2'}d_1', d_3',\ldots,d_N'\right) \qquad \cdots(5)$$

となる。この時、適当に$\bar{\boldsymbol{d}}$とΣを定義してやれば、$\boldsymbol{d}$は平均$\bar{\boldsymbol{d}}$、分散共分散行列Σの N 次元正規分布に従う。

この時、以下の定理が成立する。

定理 1

効率的株式ポートフォリオは市場ポートフォリオ$\boldsymbol{w}'$ではなく、株式の実質的供給量$\boldsymbol{w}$となる。均衡での価格関数は

$$p = \bar{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{s}_w \qquad \cdots(6)$$

と書く事ができる。ただし、

$$\boldsymbol{s}_w = \left(\mathrm{cov}[\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_w], \ldots, \mathrm{cov}[\boldsymbol{d}_N, \boldsymbol{d}_w]\right)$$
$$\boldsymbol{d}_w = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{w}$$

である。

証明

補論参照

したがって、第１の問題の解答は「TOPIX は効率的ポートフォリオではない」となる。現在の日本の取引慣行を支える CAPM の基本命題は実は親子上場の下では成立していないのである。

なお、$\boldsymbol{s}_w$ は効率的ポートフォリオと各株式との収益の共分散を並べたベクトルである。この価格関数は CAPM で導かれる価格関数とまったく同じ形をしている。CAPM の結論とこの定理が異なっているのは、市場ポートフォリオは効率的ポートフォリオではないというまさにその一点のみであることが分かる。

CAPM と市場ポートフォリオの効率性

なぜこのような結論が導かれたのだろうか。この問題を考えるに当たっては、CAPM のモデルでなぜ市場ポートフォリオが効率的なポートフォリオとなるかを吟味することが、大きな助けになる。市場ポートフォリオの効率性は CAPM の主要定理で、その導出に通常は多くのページが割かれるが、実は次のようなごく単純な論理によって成立している[6]。

投資家はすべて合理的な投資家で、トータル・リターンとリスクの平面に定まる効率的フロンティア上に位置するポートフォリオ（効率的ポートフォリオ）から、自分のリスク許容度にふさわしいポートフォリオを選んで需要するものとする[7]。市場の総需要は個々の投資家の需要を足し合わせた合計で、それが株式の総供給と一致すれば市場が均衡に達していることになる。これをポートフォリオ・レベルで表現すると、市場の総需要は、個々の投資家の需要するポートフォリオを各投資家の運用資産時価に比例したウエイトで持つポートフォリオである。一方、市場の総供給は、全銘柄を発行済み株数の時価総額に比例したウエイトで組み込んだポートフォリオ（市場ポートフォリオ）である。したがって、均衡において市場ポートフォリオは、個々の投資家の最適ポートフォリオから生成される加重平均ポートフォリオに一致する。

ところで、効率的ポートフォリオの加重平均は効率的ポートフォリオとなることが知られ

---

[6] リスク・プレミアムがベータに比例することを示すいわゆる「証券市場線」は、市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオとなるための必要条件を数学的に表現したものである。

[7] モデルに、トータル・リターンではなく特定のベンチマークに対する超過リターンを追求する機関投資

ている[8]。個々の投資家の最適ポートフォリオは効率的ポートフォリオであるから、その加重平均に相当する総需要ポートフォリオも、この命題より、効率的である。したがって、もし株式の総供給を表す市場ポートフォリオが効率的フロンティア上に位置しなければ、需要と供給の一致が実現しないことになり、そうした状態が均衡ではありえない。つまり、均衡状態では市場ポートフォリオは効率的フロンティア上に存在しなければならない。

シャープ版の CAPM では、借入利子率が運用利子率に等しいと仮定される。この仮定をおくと、すべての投資家が同一の株式ポートフォリオを需要することになる[9]。全投資家が同じポートフォリオを需要すれば、市場の総需要もその同じポートフォリオとなる。均衡ではこれが市場ポートフォリオに一致する。つまり、均衡状態ではすべての投資家が市場ポートフォリオを需要しなければならない。もし株式の総供給を表す市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオでなければ、投資家は非効率なポートフォリオを需要することになるので、話が矛盾する。このように、シャープ版の CAPM ではすべての投資家が同じ株式ポートフォリオを需要することになるので、市場ポートフォリオの効率性はより平易に導かれる。

親子上場の影響

親子上場があり、親会社の子会社株保有が純投資目的でないと仮定しよう。つまり、親会社は株価の動向によらず子会社株を手放さないと仮定する（仮定１）。すると、上で述べたように、子会社株のうち親会社が保有する分は株式市場で取引されることがない。投資家の立場からすると、子会社のこの部分の株式は市場に存在しないに等しい。したがって、子会社株の事実上の総供給量は上場株数ではなく、上場株数から親会社の持ち株数を除いたものとなる。

この後者の部分を「親子修正市場ポートフォリオ」と呼ぶことにしよう。この親子修正ポートフォリオを株式の総供給と考えれば上で説明した論理がそのまま適用できることは、これまでの説明で想像に難くないであろう。すなわち、親子上場があり仮定１が成立する場合には、「親子修正ポートフォリオが効率的ポートフォリオである」という命題が導かれることになる。

「親子修正ポートフォリオが効率的ポートフォリオである」という命題が成立すれば、上場株数をすべて指数に組み込んだ TOPIX は、子会社株を過大に含んだ非効率なポートフォリオであることになる。そして、TOPIX をベンチマークに評価されるアクティブ・マネジャーは、非効率的なポートフォリオをターゲットにして行動していることになる。つまり、機関投資家の行動も非効率的にならざるを得ない。

要約すれば、全上場株数が自由に流通している場合、市場全体でちょうど全上場株式を需

家を登場させると、それだけで CAPM の重要な前提条件が崩れることになる。

[8] 加重平均のウエイトに負のものがあってはならないが、今の場合各投資家の最適ポートフォリオを運用資産時価に比例して加重することになるので、ウエイトはすべて正である。

要するように、つまり市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオであるように、株価が調整される。親会社の手放さない子会社株がある場合には、その部分を除いた全上場株式を市場全体でちょうど需要するように株価が調整されるので、親子修正市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオとなる。なお、本稿では親子上場を象徴的に取り上げているが、親子上場にかぎらず市場に出てこない株式が存在する場合には、同じように考えればよい[10]。

４．子会社株の過大評価

次に、親子上場によって株価がファンダメンタルズからかい離することがあるかどうかを検討しよう。

最初に、親子上場に関する仮定１だけを前提にする場合、子会社株の過大評価といった株価の歪みは発生しないことを確認しておく必要がある。これは定理 1 で導いた価格関数の形状からも明らかである。

これは、日本たばこ産業(JT)のように、政府保有株が存在する場合の話をすると分かりやすい。現在、JT の発行済株式総数の 3 分の２は政府が保有している[11]。この部分は市場に出ていない株式で、投資家の手に渡ることはない。言い換えると、市場に売りに出されている株数は全体の 3 分の１で、それを購入すれば投資家は JT の企業価値の 3 分の１を所有できるわけである。これは、発行済株式が全部放出されていてそれを購入すれば JT の企業価値の全体を所有できるというのと変わらない。JT の側からいえば、全株数を市場に出して企業価値全体に値づけしてもらっても、全株数の 3 分の１を市場に放出して企業価値の 3 分の１に値づけしてもらっても、１株当たりの価格は同じになる[12]。

親会社が子会社株を手放さない場合も同じように考えることができる。イトーヨーカ堂はセブンイレブン・ジャパンの発行済株式総数の半数を保有している[13]。子会社であるセブンイレブン・ジャパンの株数の半数が市場に売りに出されているのであるが、残りの株数は市場に出ることはないので、その部分を親会社のイトーヨーカ堂が持っていても、政府が持っていても、話は同じである。一方、親会社のイトーヨーカ堂の株価に目を転じると、イトーヨーカ堂の株主は、親会社の事業収益の全体とセブンイレブン・ジャパンの事業収益の半分を受け取ることになる。もちろんこれは親会社単体の収益よりも大きいわけであるが、親子の事業収益の合計を織り込んだ株価こそがイトーヨーカ堂のファンダメンタルズであり、親子上場によってイトーヨーカ堂の株価がファンダメンタルズから離れること

---

9 トービンの分離定理と呼ばれる。

10 逆にいえば、親子上場や上場会社間の株式持ち合いでも、株式を保有する側の論理が株主の立場から見た純投資目的であれば、全上場株式からなる市場ポートフォリオが効率的ポートフォリオとなる。

11 2000 年 7 月時点の数字である。なお、政府保有分の株式は上場株数に加算されないので、TOPIX は政府保有分を除外した時価総額を計算していることになる。

12 もう少し理論的に掘り下げると、価格関数の線形性がこの議論に関係する。

を意味しない。

しかし、仮定１だけでなく仮定２もモデルに取り入れると、話が変わってくる。機関投資家が対 TOPIX 超過リターンを目標に行動しようとすれば、その結果選択された最適ポートフォリオは TOPIX の影響を受けることになる。ところが前の章で示したように TOPIX は効率的ポートフォリオではないため、機関投資家の最適ポートフォリオは非効率的にならざるを得ず、したがって均衡での株価も歪められることになるのである。

この章では、市場には機関投資家が存在し（仮定２）、株式供給には予期せぬ供給があるとする。すなわち、

$$\begin{array}{l} 0 < \boldsymbol{\alpha} < 1 \\ \Sigma_x \neq O \end{array} \qquad \cdots(7)$$

とする。ただし、この章では投資家はすべての株式を任意に空売りできると仮定する。すなわち仮定４は採用しない。仮定４を含めた場合の均衡については次の章で扱う。

（１）投資家の最適ポートフォリオ

2 章で扱ったように、投資家が私的情報を持つモデルでは、株価に将来の株式収益についての情報が含まれる。ノイズ付き合理的期待モデルでは、株価が株式収益についての情報を含んでいる状態変数の関数になるという形でこの現象を表現している。

まずすべての投資家が、均衡においては株価 p は状態変数 $\boldsymbol{p}$ の関数

$$p = f(\boldsymbol{p}) \qquad \cdots(8)$$

で表され、逆関数 $\boldsymbol{p} = f^{-1}(p)$ が存在すると信じているとする。状態変数 $\boldsymbol{p}$ とは株式の収益 $\boldsymbol{d}$ と予期せぬ株式供給 x の線形関数であり、ある N×N 行列 A を用いて

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{d} + Ax \qquad \cdots(9)$$

と表すことができる。後述するように均衡ではこの信念が実際に成立する。

A.　個人投資家の最適ポートフォリオ

個人投資家は株価 p を通して状態変数 $\boldsymbol{p}$ を知ることができる。個人投資家はこの $\boldsymbol{p}$ に含まれる期末の株式の収益 $\boldsymbol{d}$ についての情報を利用して $\boldsymbol{d}$ に対する期待を修正し、その上で期待効用を最大化しようとする。したがって、個人投資家の効用最大化問題は、個人投資

[13] 1999 年 8 月 31 日現在で 50.75%。

家の株式ポートフォリオを w_U 、債権持ち分を b_U とし、個人投資家の期初の資産を M_U とするとき、

$$\begin{aligned}&\max_{w_U, b_U} E\left[-\exp\left(-w_U \cdot \boldsymbol{d} - b_U\right) \middle| \, p\right] \\ &s.t.\, w_U \cdot p + b_U = M_U\end{aligned} \qquad \cdots(10)$$

と書ける。

個人投資家の株価 p を観測したときの株式収益 $\boldsymbol{d}$ の条件付き分布は平均 $\hat{\boldsymbol{d}}_U$ 、分散共分散行列 Σ_U の N 次元正規分布になる。ただし、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{d}}_U &= \overline{\boldsymbol{d}} + \Sigma_U \Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p} - \overline{\boldsymbol{d}}\right) \\ \Sigma_U &= \left\{\Sigma^{-1} + \Sigma_p^{-1}\right\}^{-1} \\ \Sigma_p &= A\Sigma_x A^t\end{aligned} \qquad \cdots(11)\ [14]$$

である。導出法は補論を参照されたい。この条件付き分布を用いると、個人投資家の最適ポートフォリオ w_U は、

$$\begin{aligned}w_U &= \Sigma_U^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - p\right) \\ &= \Sigma^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{d}} - p\right) + \Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p} - p\right)\end{aligned} \qquad \cdots(12)$$

と表せる。

B． 機関投資家の最適ポートフォリオ

機関投資家 j も個人投資家と同様に、株価 p から $\boldsymbol{p}$ を知ることができる。また、そのほかに私的情報 s^j も利用できる。機関投資家 j はこの二つのシグナルを利用してみずからの期待効用を最大化しようとする。機関投資家 j の株式ポートフォリオを w_I^j とし、債権持ち分を b_I^j とする。この時、機関投資家のポートフォリオは w' と同金額で構成できなければならないことに留意すると、機関投資家の効用最大化問題は

[14] 行列の右上の t は、行列の転置を表す。

$$\max_{w_I^j, b_I^j} E\left[-\exp\left\{-\left(w_I^j - \boldsymbol{w}'\right)\cdot \boldsymbol{d} - b_I^j\right\} \middle| s^j, p\right] \qquad \cdots(13)$$
$$s.t.\ w_I^j \cdot p + b_I^j = \boldsymbol{w}' \cdot p$$

となる。

シグナル s^j 、$\boldsymbol{p}$ を観測したとき、機関投資家 j の $\boldsymbol{d}$ に対する条件付き分布は、平均 $\hat{\boldsymbol{d}}_I^j$ 、分散共分散行列 Σ_I のN次元正規分布となる。ただし、

$$\hat{\boldsymbol{d}}_I^j = \bar{\boldsymbol{d}} + \Sigma_I \Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}}\right) + \Sigma_I \Sigma_e^{-1}\left(s^j - \bar{\boldsymbol{d}}\right) \qquad \cdots(14)$$
$$\Sigma_I = \left\{\Sigma^{-1} + \Sigma_p^{-1} + \Sigma_e^{-1}\right\}^{-1}$$

である。この条件付き分布を用いると、機関投資家 j の最適ポートフォリオ w_I^j は

$$w_I^j = \Sigma_I^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_I^j - p\right) + \boldsymbol{w}' \qquad \cdots(15)$$

となる。

個人投資家の最適ポートフォリオと比較すると、上の式の右辺第１項は、機関投資家 j にとってのトータル・リターン最大化ポートフォリオに相当することが分かる。機関投資家 j の最適ポートフォリオはこれにベンチマーク対象の市場ポートフォリオ $\boldsymbol{w}'$ を加えたものになる。すなわち、

機関投資家の最適ポートフォリオ
＝トータル・リターン最大化ポートフォリオ＋市場ポートフォリオ

となる[15]。

直観的にいうと、対 TOPIX 超過リターンを最大化するためには、まず市場ポートフォリオを購入して、その上にトータル・リターン最大化ポートフォリオを買い足せばよい。こうすれば、機関投資家が運用するポートフォリオと市場ポートフォリオの差はちょうどトータル・リターン最大化ポートフォリオに一致するので、対 TOPIX 超過リターンの最大化が達成されるからである。

[15] この等式は、ポートフォリオにおける投資ウエイトの合計が１に等しいという条件に矛盾するように見える。しかし、ここでの議論はポートフォリオの株式部分だけに注目している。私たちのモデルには安全資産が存在するので、株式に対する投資ウエイトの和が１である必要はない。

なお、w_I^jは

$$w_I^j = \Sigma^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{d}} - p\right) + \Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p} - p\right) + \Sigma_e^{-1}\left(s^j - p\right) + \boldsymbol{w}' \\ = w_U + \Sigma_e^{-1}\left(s^j - p\right) + \boldsymbol{w}' \quad \cdots(16)$$

とも書き換えられる。機関投資家の最適ポートフォリオは個人投資家の最適ポートフォリオ w_U に、みずからの私的情報に対する投機ポートフォリオ$\Sigma_e^{-1}\left(s^j - p\right)$と市場ポートフォリオ$\boldsymbol{w}'$の二つを加えたものになっている。

（２）市場均衡

機関投資家と個人投資家それぞれの一人当たり平均株式需要をそれぞれW_I、W_Uと定義する。この時、市場の需給均衡条件は

$$\boldsymbol{a}W_I + (1-\boldsymbol{a})W_U = \boldsymbol{w} + x \quad \cdots(17)$$

で表される。

明らかに

$$W_U = w_U \quad \cdots(18)$$

となる。一方W_Iは、投資家数が増大すると、大数の強法則より

$$W_I = w_U + \Sigma_e^{-1}\left(\boldsymbol{d} - p\right) + \boldsymbol{w}' \quad \cdots(19)$$

に収束する。これらを需給均衡式に代入して整理すると、均衡における p についての条件式が導ける。この条件式はp のみを変数とする関数となっており、逆関数が定義可能である。したがって、章の最初に仮定した投資家の価格式に対する信念は実際に成り立つことになる。以上の議論を整理すると以下の定理が導ける。

定理２

市場には合理的期待均衡が存在する。均衡での価格関数は以下のように表される。

$$p = \left\{ \boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1} + (1-\boldsymbol{a})\Sigma_U^{-1} \right\}^{-1} \left\{ \Sigma_p^{-1} + \boldsymbol{a}\Sigma_e^{-1} \right\} \boldsymbol{p}$$
$$+ \left\{ \boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1} + (1-\boldsymbol{a})\Sigma_U^{-1} \right\}^{-1} \Sigma^{-1} \bar{\boldsymbol{d}} + \left\{ \boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1} + (1-\boldsymbol{a})\Sigma_U^{-1} \right\}^{-1} (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{w}') \quad \cdots(20)$$

但し

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{d} + \frac{1}{\boldsymbol{a}}\Sigma_e x$$
$$\Sigma_p = \mathrm{var}\left[\frac{1}{\boldsymbol{a}}\Sigma_e x \right]$$

証明

補論を参照

（３）均衡の性質

均衡でどのような価格形成が行われているかを把握するためには、定理２の価格式はいささか複雑すぎる。これは、株価の将来の収益に関するシグナルが、投資家の期待の共分散構造まで変化させてしまうからである。投資家は$\boldsymbol{p}$やs^jを観測することにより、将来の収益に対する期待値を修正する。しかし、$\boldsymbol{p}$やs^jは一般には、$\boldsymbol{d}$についてのもともとの期待とは異なる共分散構造を持っている。そのため、シグナルを受け取ることによって厳密には投資家の期待の共分散構造も修正を受けることになる。

しかし、このような共分散構造の変化は今回の分析には本質的な影響を与えるものではなく、いたずらに結果を複雑にしているに過ぎない。そこで、結果を見やすくするために、

$$\Sigma_p = \frac{1}{h_p}\Sigma$$
$$\Sigma_e = \frac{1}{h_e}\Sigma \quad \cdots(21)$$

という単純化の仮定を導入する。但しh_pとh_eは正の定数である。

Σ_pとΣ_eはそれぞれ$\boldsymbol{p}$とs^jのノイズ項の分散共分散行列である。したがって、これらがΣと同じ共分散構造を持つと、$\boldsymbol{p}$とs^jといったシグナル自体もΣと同じ共分散構造と持つことになる。このため、これらのシグナルにもとづく機関投資家と個人投資家それぞれの$\boldsymbol{d}$に対する条件付き分布の分散共分散行列は

$$\Sigma_I = \frac{1}{h_I}\Sigma$$
ただし、$h_I = 1 + h_p + h_e$、$h_U = 1 + h_p$ …(22)
$$\Sigma_U = \frac{1}{h_U}\Sigma$$

のように簡単に表せる。投資家がシグナルを受け取ることにより、投資家の期待の正確性は増すが、期待の共分散構造は変化しないままである。

このとき、価格関数は以下のように簡単に表せる。

命題 3

均衡での価格関数は

$$p = \left(1 - \frac{1}{h_A}\right)\boldsymbol{p} + \frac{1}{h_A}\bar{\boldsymbol{d}} - \frac{1-\boldsymbol{a}}{h_A}\boldsymbol{s}_w + \frac{\boldsymbol{aqw}_1'}{h_A}\boldsymbol{s}_1 \qquad \cdots(23)$$

となる。ただし

$$h_A = \boldsymbol{a}h_I + (1-\boldsymbol{a})h_U$$
$$\boldsymbol{s}_1 = \left(\ \mathrm{var}[\boldsymbol{d}_1], \mathrm{cov}[\boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_1], \ldots, \mathrm{cov}[\boldsymbol{d}_N, \boldsymbol{d}_1]\ \right)$$

$\boldsymbol{s}_1$ は株式１すなわち子会社株式と各株式との収益の共分散のベクトルである。価格関数は状態変数 $\boldsymbol{p}$ 、$\boldsymbol{d}$ の無条件期待値 $\bar{\boldsymbol{d}}$ 、効率的ポートフォリオとの共分散ベクトル $\boldsymbol{s}_w$ 、子会社株式との共分散ベクトル $\boldsymbol{s}_1$ の 4 項の和で表される。

このうち、最初の３項は CAPM の価格関数を私的情報のあるモデルへと拡張した価格関数と考えられる。私的情報の導入により状態変数 $\boldsymbol{p}$ の項が加わり、それぞれの項の係数が変化しているが、基本的には第３章で扱った CAPM の価格関数と同じ形をしている。実際、親会社の子会社持分比率 q はこれらの項には登場しないので、仮に q が０だとしてもまったく同じ価格関数が成立する。

親子関係をモデルに導入した影響は最後の項にのみ現れている。まず、子会社株式の株価は必ず上昇する。$\boldsymbol{a}$ 、q、w_1' および h_A はいずれも正の定数であるから、これに子会社株式と子会社株式との共分散、すなわち分散をかけ合わせたものは必ず正になる。しかし親子上場の影響はそれだけにとどまらない。子会社株以外の株式でも、子会社株式との収益の共分散が正ならば株価は上昇することになる。この影響は共分散が大きいほど大きくな

るので、結局、子会社と収益特性がよく似た株式の価格は上昇することになる。このように、親子上場によって子会社株式の価格は上昇するが、同時にそれ以外の株式も影響を受けることになる。そしてそれは子会社株式と収益特性のよく似た株式ほど株価が過大評価されるようになるという興味深い特徴を持つことになる。さらに、このような親子上場の影響は機関投資家の数が大きいほど大きくなり、また親会社の持分比率が高いほど大きくなることもわかる。

なぜ株価はこのような形で過大評価されるのだろうか。株価がファンダメンタルズを正しく反映した水準になるのは、投資家がトータル・リターンの最大化を目的にする投資家だけの場合である。この状態を議論の出発点にして、そこへ仮定２を導入しよう。元の状態では、投資家全体で需要する最適ポートフォリオは、親子修正市場ポートフォリオであった。つまり、親会社の保有する子会社株を除外すれば、株式の需給は市場でちょうどバランスを保っていた。そこへ、機関投資家の評価システムが突然変わって、仮定２に即した行動様式を取るようになると、上の等式で示されるポートフォリオを需要しはじめる。つまり、従来の需要では足りず、市場ポートフォリオを追加的に需要することになる。市場全体でいうと、従来の親子修正市場ポートフォリオに対する需要に、新たに市場ポートフォリオに対する需要が加わる。これによって株式の需給のバランスは崩れ、子会社株のうち親会社保有分が超過需要となる。この超過需要を解消するには、子会社の株価が元の水準から上昇するしかない。

理論モデルに即してきちんと説明すると、以上のように少し複雑な説明になるが、簡単にいってしまえば、１節で述べたように、機関投資家が親子修正のない TOPIX をコア・ポートフォリオとして保有しようとする結果、子会社株に過剰な需要が発生して、子会社の株価をつり上げる、ということができる。

また、子会社株に対する過剰需要は子会社の株価をつり上げるだけでは終わらない。子会社にリスク特性が類似した企業の株式は同様に過大評価され、子会社とリスク特性が大きく異なる企業の株式は、逆に過小評価されることになる。これは、子会社株が過大評価されて価格が上昇するとき、投資家が子会社株に対する需要を減らして、その分を類似企業の株式で代替しようとするためである。一方、子会社株や類似企業の株に需要が集中すると、その分、子会社株と類似していない企業の株式に向けられる資金が減少する。その結果、後者の株価は低下することになる。

もう一点注意したいのは、親会社の株価に対する影響である。子会社の株価が上昇すると、親会社のバランスシートに計上される子会社株の価値も上昇するので、親会社の資産は（時価評価をすれば）増加する。しかし、これは親会社の株価上昇にはつながらない。仮定１によって親会社は保有する子会社株を売却しないので、子会社の株価が上昇しても、それが子会社の収益力の改善などに起因するものでないかぎり、親会社の株主には何の利益も生じないからである。１節で触れたように、親会社の保有する子会社株の時価総額が

親会社の時価総額を上回るという一見奇妙な現象も、仮定１，２の下では起こりえることになる。

５．子会社株のボラティリティの増大

第 4 章までの分析で、親子上場と機関投資家の TOPIX ベンチマーキングにより、子会社株を中心として株価が過大評価されるということが分かった。しかし、これまでの分析からは株価のボラティリティが変化するという結果は導けない。実際、命題 3 でqが増加してもpの項の係数は変化しないため、株価のボラティリティは親子上場の影響はうけないのである。株価のボラティリティの影響について考察を行うためにはさらに仮定を加える必要がある。それは空売り制限についての仮定である。

（１）空売り制約

CAPM などの通常の株価モデルを考える限りでは、空売り制約はモデルの結論にそれほど大きな影響を与えない。特に CAPM では、均衡では全ての投資家が市場ポートフォリオを保有することになり、空売りは生じないので、この問題を明示的に考慮する必要はなかった。

しかし、私たちのモデルでは、市場ポートフォリオのベンチマーク取引の結果生じる子会社株への過剰需要はきわめて大きい。均衡を導出する際に用いた均衡条件式を変形すると、均衡での個人投資家のポートフォリオは

$$w_U = (1-a)w - \begin{pmatrix} aqw_1' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - a\Sigma_e^{-1}(\boldsymbol{p} - p) \qquad \cdots(24)$$

となる。この式の最後の項は株式の現在の状態を反映するための投機ポートフォリオである。子会社株式以外の株式に関しては、この最後の項を除いては基本的に市場の株式供給に比例したポートフォリオとなり、したがって最後の項がよほど大きくならない限りは空売りは生じない。しかし、子会社株式に関してはそこからさらにaqw_1'を除いたものになる。したがって、$1-a-q \le 0$ならば、最初の 2 項の和は負の値をとることになる。qは 0.5 よりも大きいので、仮に投資家の半数以上が機関投資家だとすると、最初の２項の和は負になってしまう。子会社株式に関しては空売り制約の有無は無視できない問題なのである。

そこで以下では投資家は株式を空売りできないという制約を入れて考察を行う。ただし、機関投資家はトータル・リターン最大化ポートフォリオと市場ポートフォリオを併せ持っ

ているため、空売りが起きる可能性は個人投資家に比べると格段に小さい。また、個人投資家の子会社株式以外の株式についても、最後の項の値によっては空売りが起こる可能性は０ではないが、その確率は子会社株式が空売りされる確率に比べるとやはり格段に小さい。そこで、計算の煩雑さを避けるために、ここでは個人投資家は子会社株式のみを空売りできないという仮定を導入することにする。

（２）投資家の行動

前の章と同様に$\boldsymbol{p} = f^{-1}(p)$が定義可能であると全ての投資家が信じていると仮定する。このとき、機関投資家と個人投資家それぞれの$\boldsymbol{d}$に対する条件付き分布は、第４章で求めた条件付き分布と変わらない。また、機関投資家の効用最大化問題とその解も第４章のままで変化しない。

一方、個人投資家は

$$\begin{aligned} &\max_{b_U, w_U} E\left[-\exp\left(-w_U \cdot \boldsymbol{d} - b_U\right) \middle| p\right] \\ &s.t. \quad w_U \cdot p + b_U = M_U, \quad w_{U1} \geq 0 \end{aligned} \qquad \cdots(25)$$

という、不等号制約つきの効用最大化問題を解くことになる。この問題の解は

$$w_U = \begin{cases} \Sigma_U^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - p\right) & if \;\; w_{U1} > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & o^t \\ o & \tilde{\Sigma}_U^{-1} \end{pmatrix}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - p\right) & otherwise \end{cases} \qquad \cdots(26)$$

ただし$\tilde{\Sigma}_U$ はΣ_Uから１行目と１列目を除いた$(N-1)\times(N-1)$部分行列

$$\tilde{\Sigma}_U = \begin{pmatrix} \Sigma_{U(2,2)} & \Sigma_{U(2,3)} & \cdots \\ \Sigma_{U(3,2)} & \ddots & \\ \vdots & & \Sigma_{U(N,N)} \end{pmatrix} \qquad \cdots(27)$$

であり、o は N-1 次元の零ベクトルである。

つまり、空売り制約がある場合、個人投資家は空売り制約に引っかかるまでは以前と同じ最適ポートフォリオを、空売り制約に引っかかる場合にはあたかも子会社株は市場に存在しないと考えて求めた最適ポートフォリオを保有することになる。

（3）市場均衡

この章の分析でも簡単化のため条件付分布の共分散構造は変化しないと仮定する。また、Σ^{-1}の(1,1)要素は正であると仮定する[16]。このとき、均衡は以下のように与えられる。

定理4

市場には合理的期待均衡が存在し、均衡価格関数は以下のような連続な区分線形関数で与えられる

$$p = \begin{cases} g(\boldsymbol{p}) & \text{if } \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{p} < k \\ g(\boldsymbol{p}) + \dfrac{(1-\alpha)h_U}{\alpha h_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left(g(\boldsymbol{p}) - \hat{\boldsymbol{d}}_U\right) & \text{if } \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{p} \geq k \end{cases} \quad \cdots(28)$$

ただし

$$g(\boldsymbol{p}) = \left(1 - \frac{1}{h_A}\right)\boldsymbol{p} + \frac{1}{h_A}\bar{\boldsymbol{d}} - \frac{1-\alpha}{h_A}\boldsymbol{s}_w + \frac{\alpha\theta w_1'}{h_A}\boldsymbol{s}_1$$

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{(2,2)} & \Sigma_{(2,3)} & \cdots \\ \Sigma_{(3,2)} & \ddots & \\ \vdots & & \Sigma_{(N,N)} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma_{(2,1)} \\ \vdots \\ \Sigma_{(N,1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}[\boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_1] \\ \vdots \\ \operatorname{cov}[\boldsymbol{d}_N, \boldsymbol{d}_1] \end{pmatrix}$$

また、$\boldsymbol{f}$はN次元定数ベクトルであり、kはスカラー定数である。

証明

補論を参照

$g(\boldsymbol{p})$は前の章で導出した、から売り制約がない場合の均衡価格関数である。空売り制約下での価格関数はあるところまでは前の章の均衡価格関数と等しいが、ある点を境に屈

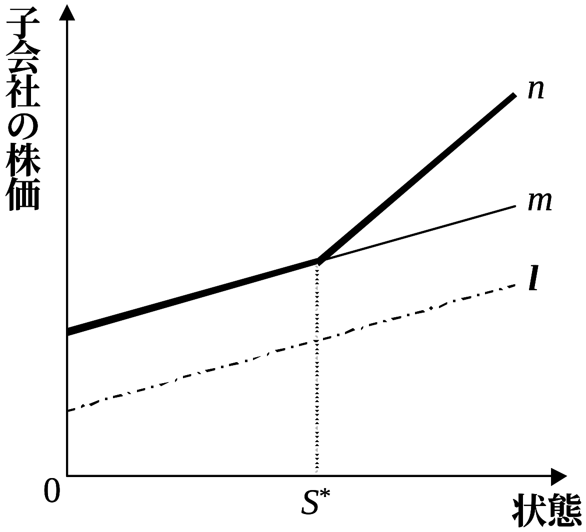
[16] この仮定は一見すると技術的な仮定に見える。しかし、投資家の最適ポートフォリオを考えると、実は$\boldsymbol{d}_1$の期待値が増えれば（価格などのほかの条件が一定ならば）株式1の持分を増やしたほうがよいというあたりまえのことを主張しているに過ぎない。

曲することになる。ただし、屈曲が起きるのは子会社株式の価格のみで、その他の株式の価格関数は前の章の関数からまったく変化していない。そこで以下では子会社株式の価格曲線のみを特に取り上げることにする。

子会社株式の価格曲線

子会社株式の価格曲線は、厳密には$p_1,\ldots,p_N$の N 個の変数を持つ関数である。しかし今、最も興味があるのは子会社株の状態変数p_1が変化したときに子会社株価がどのように変化するかである。そこで残りの$p_2,\ldots,p_N$を固定してp_1をp_1のみの関数と考える。すると価格曲線は下の図の実線部のようになる。価格曲線はある点S^*を境に上方に屈曲する。

図1．子会社の価格曲線



直線 l は親子上場が存在し（仮定１）、私的情報を持った機関投資家は存在するが（仮定３）、機関投資家による TOPIX ベンチマーク取引は行われていない（仮定２は成立しない）場合の価格曲線である。機関投資家が市場ポートフォリオをベンチマークとすることにより、価格曲線は上にシフトし、直線 m となる。しかし第４章で考察したように、空売り制約がなければ直線の傾き自体は変化しない。したがって株価のボラティリティは変化しない。しかしそこに空売り制約をモデルに組み込むとその価格曲線は新たに情報に屈曲するようになり、曲線 n となる。この結果、株価のボラティリティは上昇し、株価水準も、状態変数の値によっては上昇するようになる。

価格曲線の傾きが急になるのは状態変数p_1が一定の値以上をとる場合である。状態変数が大きい値をとるのは、基本的には市場が好転している場合である。その場合に株価はより状態変数の変化に過敏に反応するようになる。これは、株価のボラティリティは株式に

ついてのよい情報が流れるなど、経済状態が好転するときに敏感に反応するという傾向を示唆している。このように、子会社の株価はただボラティリティが上昇するだけではなく、よい情報により敏感に反応するという非対称な変動特性を持つようになる。

ショック・アブソーバーの役割を果たす個人投資家

このような非対称な価格反応は、個人投資家が市場で果たしている役割を考えることで理解することができる。

個人投資家と機関投資家に情報格差があるならば、市場に伝わるニュースに反応する度合いにおいて、両者の間で開きが生じる。

例えば、ある企業についてグッドニュースが出たとする。機関投資家は、独自の情報収集活動を通じてそれをいち早く知ることができる。一方、個人投資家は直接その情報に触れることはできない。しかし、機関投資家の買いで株価が上昇し、その株価の動きを見ることで、その企業にグッドニュースが出たのではないかと推測することはできる。その結果、機関投資家も個人投資家も、その企業のファンダメンタルズに対する評価を上方修正する。もし株価の上昇がまだそれほど大きくなければ、すべての投資家が株式の需要を増加させることになる。

しかし、すべての投資家が株式の需要を増加させたままでは、需給のバランスが崩れたままである。通常は、この需給バランスを回復させるために、株価がさらに上昇する。ところが今の場合、ある程度株価が上昇すれば、個人投資家は株式の売り手側にまわることになる。機関投資家は企業のグッドニュースの詳しい内容を知っているので、株価が少々高くなってもまだ株式を買おうとする。一方、個人投資家は機関投資家ほど多くの情報を持たないので、株価の動きから企業のファンダメンタルズの改善をある程度は推測しても、株価の上昇に耐えられず株式の売り手側に回る。実際に、今回のモデルでも以下の命題が成立する。

命題 5

Σ^{-1} および $\tilde{\Sigma}^{-1}$ の対角要素が全て正であるとする。この時、任意の株式 i について、株式 i に対する個人投資家の持分が正であれば、

$$\frac{\partial w_{Ui}}{\partial \boldsymbol{p}_i} < 0$$

が成立する。すなわち、株式 i の状態変数が上昇したとき、株式 i に対する個人投資家の持分は減少する。

証明

　補論を参照

最初の仮定は、脚注でも書いたように、普通の株式市場を考えている限りは成立する仮定である。

これは、情報格差がある場合に、個人投資家が市場の動きとは逆方向の取引を行うショック・アブソーバーとなることを意味する。グッドニュースが流れれば、機関投資家は買い出動し、株価を上昇させる。個人投資家も、最初は株価の上昇を見て機関投資家に追随する。しかし、ある程度株価が上昇すると、個人投資家が先に株価の高騰に耐えきれなくなり、売り手側にまわって機関投資家からの注文を吸収する。バッドニュースが流れた場合には、これと反対方向のことが起こって、株価がある程度下がったところで機関投資家の売りを個人投資家が吸収するようになる。

以上、個人投資家の行動パターンが株価のダイナミックスに影響を与えることを説明したが、この影響は、株価が上昇する局面で個人投資家がどこまで株式を売り支えられるかに依存する。ここで、株式の空売りに対する仮定（仮定４）が意味を持ってくることになる。

親会社が子会社の株数の 50%を保有しているとしよう。市場に流通する株数は残りの 50%であるが、TOPIX には 100%の株数が組み込まれるので、TOPIX は子会社株式を市場流通量の倍だけ含むことになる。かりに、運用資産の規模で市場の半分が機関投資家とすると、機関投資家がコア・ポートフォリオとして保有する株数だけで、市場に流通している子会社株式は尽きてしまうことになる。個人投資家が保有する子会社株はごく少数である。したがって、子会社に好材料が出て機関投資家が子会社株に買い向かったとき、それに売り向かおうとする個人投資家の手元には多数の子会社株はない。このとき個人投資家が低コストで自由に子会社株の空売りができるかどうかで、上で説明した株価のダイナミックスが大きく異なることになる。

機関投資家は空売りが禁止されている。しかし、機関投資家のコア・ポートフォリオには多数の子会社株が含まれているので、子会社株式を空売りしなければならなくなるような状況はあまり考えられない。したがって、機関投資家に関しては空売り制約が意味を持つことはない。

空売りが自由な市場

このような説明を用いて図１をもう一度見てみよう。図の横軸は子会社のファンダメンタルズを表す状態、縦軸は子会社の株価である。図の破線 *l* は仮定２を外した場合の価格曲線である。つまり、機関投資家も個人投資家と同じようにトータル・リターンの最大化を目的にする場合、子会社の株価とファンダメンタルズの関係は破線 *l* のようになる。子会社に好材料が出れば、機関投資家は保有株数を増加させようとし、株価が上昇する。最初は個人投資家も株価の上昇を見て保有株数を増加させようとするが、株価がある水準を超える

と株価は割高とみて売り手にまわり、機関投資家の買いを吸収する。その結果、株価はある水準で均衡する。図の上では、破線 *l* に沿って左から右に均衡点が移動する。このケースでは、機関投資家はコア・ポートフォリオとして子会社株を過剰に含む TOPIX を持たないので、子会社株の空売りという状況は起こりにくい。

仮定２が生きる場合、子会社の価格曲線は実線 *m* へと上方シフトする。その結果、子会社の株価は前よりも上昇する。これが「TOPIX ベンチマーク効果」による子会社株の過大評価である。個人投資家が株式を自由に空売りできる場合、子会社の好材料によって株価が上昇をはじめても、個人投資家の空売りで需給バランスを回復させることができるので、株価が異常に高騰することはない。実線 *m* と破線 *l* が平行になっているのは、そのためである。つまり、子会社に関する新しいニュースが株価にインパクトをもたらす場合、株価変化の大きさ（ボラティリティ）は破線 *l* のケースと同等である。

空売りができない市場

しかし、個人投資家の空売りが、制度的ないしはコストの面で制限されている場合には、株価の上昇を個人投資家の売りで吸収できず、需給のバランスは株価の一層の上昇でしか回復できなくなる。つまり、個人投資家のショック・アブソーバー機能が機能不全に陥る。子会社に関してきわめて強い好材料が出ると、個人投資家が手持ちの子会社株で売り向かえるときは株価の上昇はなだらかであるが、手持ちの子会社株を使い切った先では、子会社株を売りで支える投資家がいなくなり、株価の急騰を防げない。この様子を表すのが図の太線 *n* で、*S**点が価格調整プロセスの分かれ目を示している。

私たちのモデルでは、個人投資家のショック・アブソーバー機能が需給バランスの実現に重要な役割を果たしている。空売りが制限されると、これが機能不全になり、株価の大きな変動が防げなくなる。TOPIX という親子修正のない株価指数をベンチマークにする投資家が機関投資家の大半を占めるような状況では、子会社株はほとんど個人投資家の手に渡らないので、空売り制限が強いと市場の大きな変動を抑制するメカニズムを市場自らが失うことになる。

６．まとめ

私たちのモデルが標準的な資産価格理論 CAPM と異なるのは、次の４種類の仮定による。

仮定１．親会社は保有する子会社株を手放さない。
仮定２．機関投資家は対TOPIX 超過リターンが生み出す効用の期待値を最大化するアクティブ・マネジャーである。
仮定３．機関投資家は、株式の期末清算価値について独自の私的情報を持つ点で、個人

投資家よりも情報優位にある。

仮定４．機関投資家も個人投資家も、株式の空売りはできない。

仮定１の下で、発行済み株式総数を単純にそのまま算入した TOPIX は CAPM の枠組みにおいても効率的ポートフォリオとはならない。TOPIX から親会社の子会社株保有分を除いた親子修正ポートフォリオが、効率的ポートフォリオとなる。よって、TOPIX をベンチマークにしたマネジャーの評価システムは、運用リスクとリターンの効率化を犠牲にするものである。

仮定２が加わると、子会社や子会社と類似の企業の株式はファンダメンタルズと比較して過大に評価される。これは、機関投資家が子会社株を TOPIX と同じウエイトで持とうとすることから発生する。市場には子会社株の一部しか流通していないので、子会社株に過剰な需要が発生し、市場は株価の高騰で需給バランスを維持するしかないためである。一方、子会社株を親会社が手放さないかぎり、子会社株が高騰して親会社の資産が（時価評価で）増大しても、親会社の株価は上昇しない。したがって、親会社が保有する子会社株の時価総額が親会社の時価総額を上回ることは、私たちのモデルでは起こりえる現象である。

仮定３が加わると、市場の需給調整に果たす個人投資家と機関投資家の役割に機能分化が起こる。個別企業の材料に機関投資家が反応して株価が大きく変動するとき、個人投資家は（もちろん無意識にではあるが）機関投資家の逆サイドに立って、需給のバランスを回復させる働きをする。この個人投資家のショック・アブソーバー機能が正常に働くかぎり、親子上場があっても子会社株の株価が通常よりも不安定になるということない。しかし、仮定４が加わって、個人投資家が（制度的な理由ないしはコスト要因で）子会社株を自由に空売りできなくなると、小さなニュースが子会社株を大きく変動させることが起きるようになる。

本稿で説明した話は、親子上場問題を分析するために筆者たちが重要と考えた側面だけを現実から切り取って、理論分析の俎上に乗せたものである。他の側面に焦点を当てれば、違った結論が出てくる可能性は排除できない。なお、この理論モデルは、親子上場にかぎらず、企業間の株式持合いにも応用することができるかも知れない。しかし、一般的な株式持合いでは、仮定１のように企業が持合い株を手放すことないと仮定するのは、単純化がすぎる。その場合は、株式持合いを支える企業側の論理を掘り下げて理論モデルに取り込む必要がある。

補論

A、定理１の証明

CAPM の証明はさまざまな文献でなされている。この定理を示すためには、株式の総供給量が市場ポートフォリオと等しくないという仮定を加えてそれらの証明をなぞれば良い。

市場に私的情報は存在しないので、個人投資家の効用最大化問題は、

$$\max_{w_U, b_U} E\left[-\exp\left(-\boldsymbol{d} \cdot w_U - b_U\right)\right]$$
$$s.t.\ p \cdot w_U + b_U = M_U$$

と書ける。よく知られているようにこれは、

$$\max_{w_U, b_U} -\exp\left(-\bar{\boldsymbol{d}} \cdot w_U - b_U + \frac{1}{2} w_U^t \Sigma w_U\right)$$
$$s.t.\ p \cdot w_U + b_U = M_U$$

と同値である。さらに、$-\exp(x)$ は x に関して減少関数であるから、この問題は

$$\max_{w_U, b_U} \bar{\boldsymbol{d}} \cdot w_U + b_U - \frac{1}{2} w_U^t \Sigma w_U$$
$$s.t.\ p \cdot w_U + b_U = M_U$$

ラクランジュ乗数を

$$L = \bar{\boldsymbol{d}} \cdot w_U + b_U - \frac{1}{2} w_U^t \Sigma w_U - \boldsymbol{l}\left(p \cdot w_U + b_U - M_U\right)$$

とおけば最適の一階条件より、

$$\frac{\partial L}{\partial w_U} = \bar{\boldsymbol{d}} - \Sigma w_U - \boldsymbol{l} p = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial b_U} = 1 - \boldsymbol{l} = 0$$

よって、個人投資家の最適ポートフォリオは

$$w_U = \Sigma^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{d}} - p\right)$$

となる。これが投資家一人あたり株式需要である。一方投資家一人あたり株式供給は w である。よって、効率的ポートフォリオは w となる。また、均衡での価格関数は

$$p = \bar{\boldsymbol{d}} - \Sigma \boldsymbol{w}$$
$$= \bar{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{s}_w$$

となる。

B、d に対する条件付分布の導出

ここでは機関投資家の d に対する条件付分布をどのようにして求めるかを記す。個人投

資家の条件付分布も同様の方法で導出できる。

機関投資家 j は以下のような$\boldsymbol{d}$についてのシグナルを受け取る。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ s^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ I_N \end{pmatrix} \boldsymbol{d} + \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{e}^j \end{pmatrix}$$

ただしI_Nは$N \times N$単位行列、Oは$N \times N$零行列である。この時、これらのシグナルにもとづく条件付分布は

$$\hat{\boldsymbol{d}}_I^j = \boldsymbol{d} + \Sigma\begin{pmatrix} I_N & I_N \end{pmatrix} F^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}} \\ s^j - \bar{\boldsymbol{d}} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_I = \Sigma - \Sigma\begin{pmatrix} I_N & I_N \end{pmatrix} F^{-1} \begin{pmatrix} I_N \\ I_N \end{pmatrix} \Sigma$$

$$F = \begin{pmatrix} I_N \\ I_N \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} I_N & I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_x & O \\ O & \Sigma_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & I_N \end{pmatrix}^t$$

としたとき、平均$\hat{\boldsymbol{d}}_I^j$、分散共分散行列Σ_Iの N 次元正規分布に従うことが知られている[17]。

これをもとに計算を繰り返すと、求める条件付分布が得られる。

C、定理 2 の証明

機関投資家の条件付分布および最適ポートフォリオは、

$$\hat{\boldsymbol{d}}_I^j = \bar{\boldsymbol{d}} + \Sigma_I \Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}}) + \Sigma_I \Sigma_e^{-1}(s^j - \bar{\boldsymbol{d}})$$

$$\Sigma_I = \left\{\Sigma^{-1} + \Sigma_p^{-1} + \Sigma_e^{-1}\right\}^{-1}$$

$$w_I^j = \Sigma_I^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}} - p) + \Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}}) + \Sigma_e^{-1}(s^j - \bar{\boldsymbol{d}}) + \boldsymbol{w}'$$

$$W_I = \Sigma_I^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}} - p) + \Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}}) + \Sigma_e^{-1}(\boldsymbol{d} - \bar{\boldsymbol{d}}) + \boldsymbol{w}'$$

個人投資家の条件付分布および最適ポートフォリオは、

$$\hat{\boldsymbol{d}}_U = \bar{\boldsymbol{d}} + \Sigma_U \Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}})$$

$$\Sigma_U = \left\{\Sigma^{-1} + \Sigma_p^{-1}\right\}^{-1}$$

$$w_U = \Sigma_U^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}} - p) + \Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}})$$

---

[17] たとえば Harvey(1985) Chapter 4 を見よ。

これらを均衡条件式$aW_I+(1-a)W_U=w+x$に代入すると、

$$a\left\{\Sigma_I^{-1}\left(\bar{d}-p\right)+\Sigma_p^{-1}\left(p-\bar{d}\right)+\Sigma_e^{-1}\left(d-\bar{d}\right)+w'\right\}$$
$$+(1-a)\left\{\Sigma_U^{-1}\left(\bar{d}-p\right)+\Sigma_p^{-1}\left(p-\bar{d}\right)\right\}=w+x$$

ここで$p=d-\dfrac{1}{a}\Sigma_e x$とおくと、

$$a\left\{\Sigma_I^{-1}\left(\bar{d}-p\right)+\Sigma_p^{-1}\left(p-\bar{d}\right)+\Sigma_e^{-1}\left(p-\bar{d}\right)\right\}$$
$$+(1-a)\left\{\Sigma_U^{-1}\left(\bar{d}-p\right)+\Sigma_p^{-1}\left(p-\bar{d}\right)\right\}=w-aw'$$

となり、xの項が消滅する。これをpについて解くと

$$\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}p=\left\{a\left(\Sigma_p^{-1}+\Sigma_e^{-1}\right)+(1-a)\Sigma_p^{-1}\right\}p$$
$$+\left\{a\left(\Sigma_I^{-1}-\Sigma_p^{-1}-\Sigma_e^{-1}\right)+(1-a)\left(\Sigma_U^{-1}-\Sigma_p^{-1}\right)\right\}\bar{d}-w+aw'$$
$$=\left\{\Sigma_p^{-1}+a\Sigma_e^{-1}\right\}p+\Sigma^{-1}\bar{d}-w+aw'$$

$$p=\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}^{-1}\left\{\Sigma_p^{-1}+a\Sigma_e^{-1}\right\}p$$
$$+\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}^{-1}\Sigma^{-1}\bar{d}-\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}^{-1}\left(w+aw'\right) \qquad \cdots \text{(A)}$$

となる。pはpのみの関数となり、逆関数が定義可能である。よって冒頭に仮定した投資家の信念は確かに成り立ち、均衡が成立する。

Q.E.D.

D、命題３の導出

$$\Sigma_p=\frac{1}{h_p}\Sigma$$
$$\Sigma_e=\frac{1}{h_e}\Sigma$$

という単純化の仮定を用いると、

$$\Sigma_I=\frac{1}{h_I}\Sigma=\frac{1}{1+h_p+h_e}\Sigma$$
$$\Sigma_U=\frac{1}{h_U}\Sigma=\frac{1}{1+h_p}\Sigma$$

となる。これより、

$$\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}^{-1}=\left\{\left(ah_I+(1-a)h_U\right)\Sigma^{-1}\right\}^{-1}$$
$$=\frac{1}{ah_I+(1-a)h_U}\Sigma$$

よって、$h_A=ah_I+(1-a)h_U$ と定義すると、

$$\left\{a\Sigma_I^{-1}+(1-a)\Sigma_U^{-1}\right\}^{-1}=\frac{1}{h_A}\Sigma$$

同様に

$$\Sigma_p^{-1}+a\Sigma_e^{-1}=h_p\Sigma^{-1}+ah_e\Sigma^{-1}$$
$$=(h_A-1)\Sigma^{-1}$$

これらを(A)式に代入すると

$$p=\frac{1}{h_A}\Sigma(h_A-1)\Sigma^{-1}\boldsymbol{p}+\frac{1}{h_A}\Sigma\Sigma^{-1}\bar{\boldsymbol{d}}-\frac{1}{h_A}\Sigma(\boldsymbol{w}-a\boldsymbol{w}')$$

$\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{w}+q w_1'(1,0,\ldots,0)$ に注意すると、

$$p=g(\boldsymbol{p})=\left(1-\frac{1}{h_A}\right)\boldsymbol{p}+\frac{1}{h_A}\bar{\boldsymbol{d}}-\frac{1-a}{h_A}\boldsymbol{s}_w+\frac{aqw_1'}{h_A}\boldsymbol{s}_1 \qquad \cdots\text{(B)}$$

となる。

Q.E.D.

E、定理４の証明

機関投資家の最適ポートフォリオは定理２の場合と変わらない。一方、個人投資家の最適ポートフォリオは

$$w_U=\begin{cases}\Sigma_U^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}}-p)+\Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p}-\bar{\boldsymbol{d}}) & if\ \ w_{U1}\geq 0\\ \Lambda_U(\bar{\boldsymbol{d}}-p)+\Lambda_U\Sigma_U\Sigma_p^{-1}(\boldsymbol{p}-\bar{\boldsymbol{d}}) & if\ \ w_{U1}=0\end{cases}$$

となる。ただし、

$$\Lambda_U=\begin{pmatrix}0 & o^t\\ o & \tilde{\Sigma}^{-1}\end{pmatrix}$$

である。

$w_{U1}\geq 0$ の時は定理２の場合と同様に (B)式が価格関数となる。

$w_{U1}=0$ の場合、均衡条件式にそれぞれの最適ポートフォリオを代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\left\{\Sigma_I^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{d}}-p\right)+\Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p}-\bar{\boldsymbol{d}}\right)+\Sigma_e^{-1}\left(\boldsymbol{d}-\bar{\boldsymbol{d}}\right)+\boldsymbol{w}'\right\}\\
&\quad+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\left\{\Lambda_U\left(\bar{\boldsymbol{d}}-p\right)+\Lambda_U\Sigma_U\Sigma_p^{-1}\left(\boldsymbol{p}-\bar{\boldsymbol{d}}\right)\right\}=\boldsymbol{w}+x
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{d}-\dfrac{1}{\boldsymbol{a}}\Sigma_e x$ とおいてこれを整理すると

$$
\begin{aligned}
p=&\left\{\boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda_U\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}\left(\Sigma_p^{-1}+\Sigma_e^{-1}\right)+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda\Sigma_U\Sigma_p^{-1}\right\}\boldsymbol{p}\\
&+\left\{\boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda_U\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\left(\Lambda_U-\Lambda\Sigma_U\Sigma_p^{-1}\right)\right\}\bar{\boldsymbol{d}}\qquad\cdots\text{(C)}\\
&-\left\{\boldsymbol{a}\Sigma_I^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda_U\right\}^{-1}\left(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{w}'\right)
\end{aligned}
$$

となる。

以下、命題３と同様の単純化の仮定を用いて式を変形していく。まず、

$$
\Lambda_U=\begin{pmatrix}0 & o^t\\ o & \tilde{\Sigma}_U^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & o^t\\ o & h_U\tilde{\Sigma}^{-1}\end{pmatrix}=h_U\Lambda
$$

となる。ただし

$$
\Lambda=\begin{pmatrix}0 & o^t\\ o & \tilde{\Sigma}^{-1}\end{pmatrix}
$$

である。これを用いると

$$
\begin{aligned}
p=&\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}\left(h_p+h_e\right)\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_p\Lambda\right\}\boldsymbol{p}\\
&+\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda\right\}\bar{\boldsymbol{d}}\\
&-\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\left(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{w}'\right)
\end{aligned}
$$

となる。さらに、$I_N=\Sigma^{-1}\Sigma$ をかけると、

$$
\begin{aligned}
p=&\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma\left\{\boldsymbol{a}\left(h_p+h_e\right)\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_p\Lambda\right\}\boldsymbol{p}\\
&+\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma\left\{\boldsymbol{a}\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Lambda\right\}\bar{\boldsymbol{d}}\\
&-\left\{\boldsymbol{a}h_I\Sigma^{-1}+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Lambda\right\}^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma\left(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{w}'\right)\qquad\cdots\text{(D)}\\
=&\left\{\boldsymbol{a}h_I I_N+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Sigma\Lambda\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}\left(h_p+h_e\right)I_N+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_p\Sigma\Lambda\right\}\boldsymbol{p}\\
&+\left\{\boldsymbol{a}h_I I_N+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Sigma\Lambda\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{a}I_N+\left(1-\boldsymbol{a}\right)\Sigma\Lambda\right\}\bar{\boldsymbol{d}}\\
&-\left\{\boldsymbol{a}h_I I_N+\left(1-\boldsymbol{a}\right)h_U\Sigma\Lambda\right\}^{-1}\Sigma\left(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{w}'\right)
\end{aligned}
$$

となる。

ここで、

$$\Sigma\Lambda = \begin{pmatrix} s_{11} & \tilde{s}_1^t \\ \tilde{s}_1 & \tilde{\Sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & o^t \\ o & \tilde{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & I_{N-1} \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} \{ah_I I_N + (1-a)h_U \Sigma\Lambda\}^{-1} &= \begin{pmatrix} ah_I & (1-a)h_U \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & h_A I_{N-1} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ah_I} & -\dfrac{(1-a)h_U}{ah_I h_A} \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \dfrac{1}{h_A} I_{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h_A} I_N + \begin{pmatrix} \dfrac{(1-a)h_U}{ah_I h_A} & -\dfrac{(1-a)h_U}{ah_I h_A} \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} &\{ah_I I_N + (1-a)h_U \Sigma\Lambda\}^{-1} \{aI_N + (1-a)h_U \Sigma\Lambda\} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ah_I} & -\dfrac{(1-a)h_U}{ah_I h_A} \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \dfrac{1}{h_A} I_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (1-a)\tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & I_{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h_I} & -\dfrac{(1-a)h_e}{ah_I h_A} \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \dfrac{1}{h_A} I_{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h_A} I_N - \begin{pmatrix} \dfrac{(1-a)h_e}{h_I h_A} & -\dfrac{(1-a)h_e}{h_I h_A} \tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\{ah_I I_N + (1-a)h_U \Sigma\Lambda\right\}^{-1}\left\{a\left(h_p + h_e\right)I_N + (1-a)h_p \Sigma\Lambda\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ah_I} & -\dfrac{(1-a)h_U}{ah_I h_A}\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \dfrac{1}{h_A} I_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\left(h_p + h_e\right) & (1-a)h_p \tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \left(h_p + ah_e\right) I_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{h_I} & -\dfrac{(1-a)h_e}{ah_I h_A}\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & \left(1-\dfrac{1}{h_A}\right) I_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$= \left(1-\frac{1}{h_A}\right)I_N + \begin{pmatrix} \dfrac{(1-a)h_e}{h_I h_A} & -\dfrac{(1-a)h_e}{h_I h_A}\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}$$

これらを(D)式に代入すると

$$p = \left(1-\frac{1}{h_A}\right)\boldsymbol{p} + \frac{1}{h_A}\bar{\boldsymbol{d}} + \frac{1}{h_A}\Sigma\left(\boldsymbol{w} - a\boldsymbol{w}'\right)$$
$$+ \frac{1-a}{h_I h_A}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{h_e\boldsymbol{p} - h_e\bar{\boldsymbol{d}} - \frac{h_U}{a}\Sigma\left(\boldsymbol{w} - a\boldsymbol{w}'\right)\right\}$$

ここで

$$\left(1-\frac{1}{h_A}\right)\boldsymbol{p} + \frac{1}{h_A}\bar{\boldsymbol{d}} + \frac{1}{h_A}\Sigma\left(\boldsymbol{w} - a\boldsymbol{w}'\right) = g\left(\boldsymbol{p}\right)$$

$$\frac{1-a}{h_I h_A}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{h_e\boldsymbol{p} - h_e\bar{\boldsymbol{d}} - \frac{h_U}{a}\Sigma\left(\boldsymbol{w} - a\boldsymbol{w}'\right)\right\}$$
$$= \frac{(1-a)h_U}{ah_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{\frac{ah_e}{h_A h_U}\boldsymbol{p} - \frac{ah_e}{h_A h_U}\bar{\boldsymbol{d}} - \frac{1-a}{h_A}\boldsymbol{s}_w + \frac{aq\boldsymbol{w}_1'}{h_A}\boldsymbol{s}_1\right\}$$
$$= \frac{(1-a)h_U}{ah_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{g\left(\boldsymbol{p}\right) - \left(1-\frac{1}{h_U}\right)\boldsymbol{p} - \frac{1}{h_U}\bar{\boldsymbol{d}}\right\}$$
$$= \frac{(1-a)h_U}{ah_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{g\left(\boldsymbol{p}\right) - \hat{\boldsymbol{d}}_U\right\}$$

に注意すると、

$$p = g\left(\boldsymbol{p}\right) + \frac{(1-a)h_U}{ah_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t\tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{g\left(\boldsymbol{p}\right) - \hat{\boldsymbol{d}}_U\right\} \qquad \cdots(\mathrm{E})$$

と整理できる。

以上、それぞれの場合についての価格関数が導出できた。$w_{U1} \geq 0$ の時は (B)式、$w_{U1} = 0$ の時は(E)式が価格関数となる。あとは、

- p が連続関数になる
- 逆関数が存在する
- w_{U1} の正負に関する条件を p の条件に置き換えられる。かつ f、k の具体的な値が求められる

ことを示せばよい。

まず、(B)式と(E)式それぞれ連続関数だから、(B)式から(E)式へと移る区分点で２式が交わることを示せばよい。$w_{U1} \geq 0$ の条件下で

$$
\begin{aligned}
w_U &= \Sigma_U^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - p\right) \\
&= h_U \Sigma^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - g(\boldsymbol{p})\right)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_{11} & \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \\ \tilde{\boldsymbol{s}}_1 & \tilde{\Sigma} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\boldsymbol{s}_{11} - \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ -\tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}}_1 & \left(\boldsymbol{s}_{11} - \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}}\right) \left\{\tilde{\Sigma} - \dfrac{1}{\boldsymbol{s}_{11}} \tilde{\boldsymbol{s}}_1 \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t\right\}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より、

$$
w_{U1} = \frac{h_U}{\left(\boldsymbol{s}_{11} - \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}}\right)} \left(1, -\tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1}\right) \left\{\hat{\boldsymbol{d}}_U - g(\boldsymbol{p})\right\}
$$

よって、$\boldsymbol{s}_{11} - \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}} \geq 0$ (共分散行列の逆行列の(1,1)要素が正)という条件の下で

$$
w_{U1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1, -\tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1}\right) \left\{\hat{\boldsymbol{d}}_U - g(\boldsymbol{p})\right\} \geq 0
$$

である。また、等号が成立するときが(B)式から(E)式へと移る区分点である。この時、(E)式の右辺第 2 項も 0 になるので、(B)式と(E)式は一致する。よって価格関数は連続である。

なお、w_{U1} の式を展開すると

$$
w_{U1} = \frac{h_U}{\left(\boldsymbol{s}_{11} - \tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{s}}\right)} \left(1, -\tilde{\boldsymbol{s}}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1}\right) \left\{-\frac{a h_e}{h_A h_U}\left(\boldsymbol{p} - \bar{\boldsymbol{d}}\right) + \frac{1-a}{h_A} \boldsymbol{s}_w - \frac{a q w_1'}{h_A} \boldsymbol{s}_1\right\}
$$

となるので、

$$f = \frac{a h_e}{h_A h_U}\left(1, -\tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1}\right)$$

$$k = f \cdot \left\{ \bar{d} + \frac{1-a}{h_A} s_w - \frac{a q w_1'}{h_A} s_1 \right\}$$

とおくと、

$$f \cdot p < k \quad \Leftrightarrow \quad w_{U1} > 0$$

$$f \cdot p \geq k \quad \Leftrightarrow \quad w_{U1} = 0$$

となる。よって、w_{U1} に関する条件を p の条件に置き換えられ、かつ f、k の具体的な値が求められる。

また、

$$f \cdot p \geq k \quad \Leftrightarrow \quad \left(1, -\tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1}\right)\left\{ g(p) - \hat{d}_U \right\} \geq 0$$

であるから、(E)式の右辺第 2 項は常に正になる。よって、$f \cdot p \geq k$ を満たす任意の p^* と $f \cdot p < k$ を満たす任意の p^{**} について、$p_1(p^*) > p_1(p^{**})$ が成立する。すなわち、$p(p^*) \neq p(p^{**})$ である。$f \cdot p \geq k$ の場合のみ、あるいは $f \cdot p < k$ の場合のみを考えれば、任意の p^*、p^{**} について $p^* \neq p^{**}$ ならば $p(p^*) \neq p(p^{**})$ であることは自明である。よって、任意の p に対し、異なる p が一意に与えられる。これは逆関数が成立することを意味する。よって冒頭の投資家の信念は確かに成り立ち、均衡が成立する。

Q.E.D.

F、命題 5 の証明

補論 D より、$f \cdot p \geq k$ の時

$$w_U = \Sigma_U^{-1}\left(\hat{d}_U - p\right)$$

$$= h_U \Sigma^{-1}\left\{ -\frac{a h_e}{h_A h_U}\left(p - \bar{d}\right) + \frac{1-a}{h_A} s_w - \frac{a q w_1'}{h_A} s_1 \right\}$$

となるので、成立する。

$f \cdot p < k$ のとき、

$$w_U = \begin{pmatrix} 0 & o^t \\ o & \tilde{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix}\left(\hat{d}_U - p\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & o^t \\ o & \tilde{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix}\left(\hat{d}_U - g(p) - \frac{(1-a)h_U}{a h_I}\begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_1^t \tilde{\Sigma}^{-1} \\ o & O \end{pmatrix}\left\{ g(p) - \hat{d}_U \right\} \right)$$

となる。株式 1 については考慮する必要がない。また、括弧内の最後の項は株式 2 以降に

は関係してこない。よって、個人投資家の株式 2 から株式 N までのポートフォリオを $\tilde{w}_U$ とすると、

$$\tilde{w}_U = \left(o \quad \tilde{\Sigma}^{-1}\right)\left(\hat{\boldsymbol{d}}_U - g(\boldsymbol{p})\right)$$

となる。上と同様の議論よりこの場合も命題の主張が成立する。

参考文献

[1]Gennotte, Gerard and Hayne Leland, "Market Liquidity, Hedging, and Crashes," *American Economic Review*, December 1990, Vol. 80 999-1021.

[2]Diamond, Douglas W. and Robert E. Verrecchia, "Information Aggregation in a Noisy Rational Expectations Economy," *Journal of Financial Economics* 1981,Vol. 9 221-235.

[3]Duffie,D., *Dynamic Asset Pricing Theory* (2nd ed.),Princeton University Press,1996.

[4]Harvey, A.C., *Time Series Models*, Philip Allan, 1981.