CIRJE-J-51

不完備資産市場モデルにおける最適資産課税

日本学術振興会 特別研究員
下川哲矢

2001 年 3 月

Optimal Capital Income Taxation in a Competitive Equilibrium Model with Incomplete Financial Markets[1]

Tetsuya Shimokawa
Research fellow of the Japan Society for the Promotion of Science,
Faculty of Economics, The University of Tokyo

March 2001

Abstract： This article extends the implications obtained in my previous study, Shimokawa(2001), to the environment with incomplete financial markets. To this end, we use an implementability constraint and solve the so-called primal Ramsey tax problem, which is a popular procedure in discrete-time analytical frameworks.

[1] この研究は著者が CIRJE 研究員であった期間に得られた成果である。また、この研究は科学研究費補助金のサポートも受けている。

１、はじめに

この論文では金融資産市場が不完備な状況における最適資本収益課税ルールを特徴付ける。モデルの定式化には、代表的消費者のいる連続時間モデルを用いる。

ここで資産市場が不完備であるとは、ショックをあらわすブラウン運動によって生成される空間の次元が、総資産の生成する空間の次元よりも大きいような状況と定義される。換言すれば、不確実な要素の数の方が、原資産の数よりも多いような状況である。このような場合、リスクの価格は資産間の裁定式からは一意に決定できない。なぜなら、ある不確実性に関してそれを反映するような資産が必ずしも存在しないため、ポートフォリオを工夫することによって、リスクを完全にヘッジすることは出来ないからである。

Shimokawa(2001)において、私は連続時間・多資本モデルでの最適資本課税ルールを特徴付けた。そこでは、分析の簡単化のために、金融資産市場は完備であると仮定していた。この仮定によって、不確実性をあらわす全てのブラウン運動について、リスクの価格を裁定条件から一意に決定することが可能となった。しかしながら、この仮定は現実的ではない。現実の経済を見れば、全ての不確実性についてリスクの価格を一意に決定できるというのは非常に制約的な仮定である。リスク価格が裁定式から一意に決定できない場合、Shimokawa(2001)で用いた手法はもはや使えなくなる[2]。

しかしながら、その一方で、 Shimokawa(2001)においてリスクの価格が均衡経路上の消費と労働によって評価されていたことを思い出せば、C-CAPM とのアナロジーから、リスクの特徴付けがそのまま不完備金融資産市場のケースにも拡張できるのではないかとも予想される。

本論文ではこの予想を証明したい。

そのために我々は誘導可能条件（Implementability Constraint）を利用する。誘導可能条件はこれまで主に離散時間モデルでの分析において使われてきた条件である(See Zhu(1992), Chari-Christiano-Kehoe(1994))。この条件は、政策を操作することによってある分配を競争均衡として実現することを保証する条件であり、消費者意思決定問題の 1 階条件と横断性条件から導出される。ラムゼイ均衡における分配は当然誘導可能でなくてはならないので、政策当局の意思決定は誘導可能条件を満たさなくてはならない。政策決定者の意

[2] 数学的には、不完備市場は資産収益のボラティリティ行列が正則でないこととあらわされる。Shimokawa(2001)での notation を用いれば、行列$\left(\hat{q}^{kia}\right)$ $\left(i = 1,2,\cdots,n \quad a = 1,2,\cdots,m\right)$が逆行列を持たないということである。これによって Shimokawa(2001)の仮定 1 が成立しなくなるため、裁定式からリスクの価格を求める変形(7)→(7a)はできなくなる。

思決定問題をこの誘導可能条件を用いて書きかえることで、リスクの価格を裁定条件から明示的に導出する必要がなくなり、不完備金融市場における分析上の問題点を回避できるようになる。この点が本論文における分析のポイントとなる[3]。

２　代表的消費者

２－１　設定

この論文では、通常仮定されるように、経済の不確実性は外生的なショックによって生じるものとする。さらにそれが多次元（有限）のブラウン運動としてあらわせることを仮定する。また、簡単化のために経済に加わるショックは生産性ショックのみに限定する。ショックを生産性ショックに限定するのは、説明の簡易化のためであって、たとえば数値的な分析においてよく仮定されるように、政府支出によるショックやあるいは貨幣的なショックを導入して分析を拡張することも難しいことではない。

また、ショックを多次元ブラウン運動を用いて定式化するメリットについては、既にこの定式化が進んでいるファイナンスの分野の研究成果を見れば多言を有しないところである。一言で言えば、最適税率あるいは均衡に対する高次モーメントの影響を明示的に分析できるようになる点が、不確実性をブラウン運動で現す最大のメリットである。これに対し、通常、頻繁に行われる離散時間での定式化では、不確実性に関する１次のモーメント、すなわち期待値しか明示的に扱えない。したがってそれ以上の分析のためには、たとえばリスクと最適政策との関係を見るためには、数値計算を用いるか、あるいはある特殊な関数系を仮定するしかない。我々の定式化では不確実性を伊藤過程に特定化してしまうという若干の制約はあるものの、分散あるいは共分散の最適課税政策への影響を明示的に観察することが可能となる。

まず、代表的消費者の意思決定を定式化しよう。消費者は政府によって決定される各種税率、政府支出といった政策変数を所与として、彼の予算制約のもとで通時的な最適化をおこなうとする。消費者は消費と労働力の最適分配のほか、本稿では複数の資産（公債と資本ストック）を扱うので、それらへの資金の最適分配も行うことになる。

---

[3] 本論文での設定や最適化問題の解法は、金融資産市場が不完備である点を除き Shimokawa(2001)のそれとまったく同じである。したがってこれらの説明は、紙面の節約のために必要最小限に止めてある。あるいは舌足らずな点も多々あるかもしれない。そのように感じられた読者は Shimokawa(2001)を参照していただきたい。

消費者の予算制約式を特定する。

消費者の収入は労働所得と、公債や資本ストックといった資産保有からの利益からなる。この経済にはn種類の資本(i で index される)と 1 種類の公債があり、それぞれの資産は期待収益率と収益のリスクによって特徴付けられている。通常の設定のように消費者は資本ストックを株式の形で保有している。

資本ストックからの利益は、生産関数の完全分配の仮定のもとで、当該保有資本から得られる限界生産物に等しくなるが、各資本の限界生産性は常にショックに曝されており不確実であるとする。不確実性に関するこのような仮定はマクロ経済学では一般的である。我々のモデルではショックを伊藤過程を用いて特定化する。すなわち各資本の瞬時的な限界生産性はm次元（標準）ブラウン運動 z^a， $\boldsymbol{a} \in [1,2,\cdots,m]$ を用いて次のように書けるとする。

$$f_i(k_1,\cdots,k_n,l)dt+\sum_a^m \boldsymbol{q}^{kia}k_i dz^a$$

ここで、 $f_i(k_1,\cdots,k_n,l)$ は瞬時における期待限界生産性であり、 $\sum_a^m \boldsymbol{q}^{kia}dz^a$ は技術ショックによる変動分である。$\boldsymbol{q}^{kia}$ はブラウン運動 z^a であらわされるショックによって引き起こされる資本 i の収益変動のボラティリティである。消費者の資本からの純所得は上記の式から資本所得課税を差し引いた額に保有資本量を掛けた額となる。また、公債からの（限界）収入に関しては不確実性が無いものと仮定し、r^b を公債の確実な利子率として、$r^b dt$ と書く。

消費者の支出は消費財の消費 c と税金の支払いからなる。

税金は労働所得および資本ストックからの所得に課税されるが、課税率は消費者の意思決定では外生変数である。

資本所得への課税は Eaton(1981)に習い、収入の確実性パートおよび不確実パートの両方に異なる税率が適用されるとしてモデル化しよう。資本 i からの限界収益の確実性パートへの線形な税率を $\boldsymbol{t}^i$ 、不確実性パートへのそれ（ブラウン運動 z^a に対応する部分）を $\boldsymbol{h}^{ia}$ とすると当該期間における税引き後の資本の限界収益は

$$\left(1-\boldsymbol{t}^i\right)f_i(k_1,\cdots,k_n,l)dt+\sum_a^m\left(1-\boldsymbol{h}^{ia}\right)\boldsymbol{q}^{kia}dz^a$$

と書ける。以後、資本の税引き後期待利潤率を $\hat{r}^i \equiv \left(1-\boldsymbol{t}^i\right)f_i(k_1,\cdots,k_n,l)$、税引き後の限界収益のボラティリティを $\hat{\boldsymbol{q}}^{kia} \equiv \left(1-\boldsymbol{h}^{ia}\right)\boldsymbol{q}^{kia}$ と書く。すなわち消費者の資本 i からの税引後収益は以下のように定義される。

$$\hat{r}^i k^i dt+\sum_a^m \hat{\boldsymbol{q}}^{kia}k^i dz^a$$

ただし、あとで見るように確実パートへの最適課税率と不確実パートへの最適課税率の組み合わせは非決定性を持ち、一般には一意に決まらない。したがって最適税率の組み合わせを一意に得るためには追加的な条件が必要となる。
また、純労働所得は、賃金率を w、労働供給量を l として、線形な労働税率を t^l とすると、$\left\{\left(1-t^l\right)wl\right\}dt$ となる。以下では税引き後賃金率を $\hat{w}$ として、これを $\hat{w}l\ dt$ と書く。

さらに、総資産を $a \equiv \sum_i k^i + b$ と定義し、各資産のポートフォリオを $f^i \equiv k^i/a \quad \forall i$、$f^{m+1} \equiv b/a$ と書くと、以上の準備から代表的消費者の予算式を次のように定式化できる。

(1) $$da = \left\{\sum_i \hat{r}^i f^i a + \hat{w}l + r^b f^{m+1} a - c\right\}dt + \sum_i \sum_a \hat{q}^{kia} f^i a\ dz^a$$

上式の左辺は各時点に於ける瞬時的な資産の増加分であり、右辺第 1 項はその期待値、第２項はその不確実な部分に対応している。我々の設定では不確実性の源泉は生産性ショックであるから、代表的消費者の資産蓄積も株式からの利潤の変動を通してこのショックに影響されることになる。決定論的な部分については通常の設定と同様である[4]。

消費者は上記の予算式のもとで消費、労働供給、資産分散に関する通時的な最適化を行う。消費者の瞬時的な効用関数を $U = E\left[\int_0^\infty e^{-rs} u(c,l) ds\right]$ とする。ρは時間選好率である。さらに、各資本と公債の初期値をそれぞれ k_0^i, b_0 とすると、この最適化問題は以下のように特定される。

$$Max \quad U \quad s.t.\ (1),\ \forall i\ \ k^i(0) = k_0^i,\quad b(0) = b_0,\quad \sum_j^{m+1} f^j - 1 = 0$$

２－２　不確実性下の最適化問題の解法について

上記のような連続時間の不確実性下の問題を解くには、Hamilton-Jacobi-Bellman アプローチを持ち行るのが一般的であるが、本稿では Bismut(1973,1975)による解法を用いる。この手法は Pontryagin による最大値原理を不確実性下に単純に拡張したものである（以下、本稿では Bisut-Pontryagin アプローチ、あるいは Dual アプローチと呼びたい）。
このアプローチを用いる利点は、資産価値を表す Dual 変数を明示的に扱える点にあり、これによって最適課税を分析する上で、多くの直感的示唆が得られることにある。これは本稿の分析の一つの特徴であると言える。

Bisut-Pontryagin アプローチの基本的な考え方は次のようなものである。

---

[4] 設定の数学的な詳細に関しては、たとえば Shimokawa(2001)註 4、7 などを参照のこと。

ある操作変数が最適経路上にあるためには、すべての時点において瞬時的な限界効用と、その時点で資産蓄積から得られる限界利益の割引価値が等しくならなくてはならない。なぜなら、もし両者が異なっていればどちらかに所得を移動させることによって、消費者は追加的な効用を得る事が出来るからである。この考え方は、決定論的なフレームにおいてもおなじみのものであり、ポントリヤーギンの最大値定理において最適化の 1 階条件を形成することは周知である。 Bisut-Pontryagin アプローチでもこの条件が最適化の中核をなす。しかし、異なるのはこの条件がリスクを加味した形に拡張されている点である。

今、消費者の資産の価値を表す Dual 変数をλとする。また、 Dual 変数λの動学プロセスは、Bismut にしたがって、以下のような Ito process で書けるとする[5]。すなわち、 z^a とλの共分散を H^a と書くと、λの動学プロセスは $d\lambda = \dot{\lambda}dt + \sum_a H^a dz^a$ と書けるとする。

この式の直感的な意味を考えよう。この式は、資産の価値λがその期待成長率（右辺第 1 項）だけでなく、生産性ショック（他のショックが存在するモデルの場合はそのショックにもよる）によっても変動し、その影響の大きさが、相関を表す H^a で表されることを意味している（右辺第 2 項）。このことは、生産性ショックによって、資産からの限界リターンが変動することを考慮すれば、納得されるであろう。
決定論的な場合と比較すると、資産価格の変動式に不確実な部分（上式第 2 項）が加味されている点が特徴的である。そして、この式で重要な役割を果たしているのが共分散 H^a である。上式において、 $\sum_a H^a dz^a$ はショックによる資産価値の変動分であるから、$-H^a > 0$ は、 z^a であらわされるリスクの価格に対応していることがわかる。
ただし、現時点で H の値は今だ未定である。この時点では、H は未だ共分散を表す変数という意味しか持たない。この値は今後の分析において内生的に決定される。そして、我々の分析上重要な役割を果たすことになる。

さて、消費者の最適化問題を Dual アプローチを用いて具体的に解いてみよう[6]。
まず、一般化されたハミルトニアンは、x をポートフォリオ制約式のラグランジュ乗数とすれば

$$Hamiltonian = u(c.l) + \lambda\left\{\sum_i \hat{r}^i f^i a + \hat{w}l + r^b f^{m+1} a - c\right\} + \sum_i \sum_a H^a \hat{q}^{kia} f^i a + z\left(1 - \sum_j^{m+1} f^j\right)$$

と書ける[7]。

---

[5] 本論文では天下り的にこの事実を前提にする。この前提が妥当であることの詳細については Bismut(1973)を参照されたい。

[6] レシピは Bismut(1975)にある。

ハミルトニアンが、各時点における消費や労働供給選択（資産蓄積の選択でもある）が効用にもたらす総貢献分をあらわすのは決定論的なケースと同様である。異なるのは上式右辺第 3 項においてリスクの価値を考慮している点である。第 3 項において、$a f^i \hat{q}^{kia}$ は、資本 k^i のブラウン運動 dz^a で現されるショックによる資本収益の変動分であり、それがリスクの価格 $\left(-H^a\right)$ で評価されている。すなわちリスクによる割引率の減少（あるいはリスクプレミアム）を第 3 項はあらわしている。

1 階の条件を求めよう。
まず、消費 c と労働 l に関する条件から

(2) $$u_c(c,l) - \boldsymbol{l} = 0$$

(3) $$u_l(c,l) + \hat{w}\boldsymbol{l} = 0$$

である。これらは決定論的な場合とまったく同じものである。

次に資産のポートフォリオ f^i, $\forall i \in \{1,2,\cdots,m+1\}$ に関する最適化から

(4) $$r^b = \frac{z}{la}$$

(5) $$\hat{r}^i + \sum_a \frac{H^a}{l}\hat{q}^{kia} = \frac{z}{la}、\quad \vee i = 1,\cdots,m$$

となる。左辺はそれぞれの資産のリスクを加味した割引率である。公債リターンには不確実性がないと仮定しているので、（4）式においてリスクは加味されていないが、各資本 i については（5）式左辺第 2 項において、それが加味されている。すなわち、資本リターンの分散（リスク）$\hat{q}^{kia}$ が、資産で測ったリスクの価値 $\left(-H^a / l\right)$ によって評価されている。

また、資産価値を表す Dual variable は以下の process に従う。

(6) $$\frac{d\,l}{l} = \left(r - r^b\right)dt + \sum_a \frac{H^a}{l} dz^a$$

右辺第 1 項は資産価値の期待成長率を表しており、この部分は決定論的な場合のそれと同様である。上式では、右辺第 2 項が決定論的なモデルに付け加わっている。右辺第 2 項は資産価格成長率のショックによる変動分であり、それは資産で測ったリスクの価値 $\left(-H^a / l\right)$ によって評価されることを意味している。

（4）（5）式より x を消去すると、

[7] ハミルトニアン導出の直感的な説明は Shimokawa(2001)にある。

$$(7)\qquad \hat{r}^{i}+\sum_{a}\frac{H^{a}}{\lambda}\hat{\theta}^{kia}=r^{b}$$

が得られる。これは公債と資本 i 間の裁定式である。$\left(-H^{a}/\lambda\right)$は（資本で測った）リスクの価格であり、左辺第 2 項$\left(-\sum_{a}\frac{H^{a}}{\lambda}\hat{\theta}^{kia}\right)$は資本 i を保有することに伴うリスクプレミアムと解することができる。

ここまでの分析で、Dual Approach においては、リスクの価格$\left(-H^{a}\right)$、あるいは資産で測ったリスクの価値$\left(-H^{a}/\lambda\right)$が、重要な意味を持つことが理解されるだろう。しかし、先述したように、現時点において、H^{a} は資産価値λとブラウン運動 z^{a} の共分散という意味付けしか持たない。それは資産価値の変動ｄλを定義するために、外生的に与えられた記号でしかない。しかし、Shimokawa(2001)で見たように、リスクの価値$\left(-H^{a}/\lambda\right)$は、均衡において消費と労働供給から内生的に決定できる。ここでは、紙面の節約のために、証明なしでこの事実を認めよう。

Fact1

いま、均衡における消費と労働が次の伊藤過程に従うとする。

$\frac{dc}{c}=m^{c}dt+\sum_{a}\theta^{ca}dz^{a}$ 、 $\frac{dl}{l}=m^{l}dt+\sum_{a}\theta^{la}dz^{a}$

このとき、均衡における（資本で測った）リスクの価値は以下のように決定される[8]。

$$(8)\qquad -\frac{H^{a}}{\lambda}=-\left\{\frac{u_{cc}c}{u_{c}}\theta^{ca}+\frac{u_{cl}l}{u_{c}}\theta^{la}\right\}$$

この特徴づけはいわゆる C-CAPM に対応することに読者は後節で気付かれるだろう。
本稿の分析では最適税率とリスクの関係が主として分析されるが、その関係は「外生ショックの分散の大きさ」と「当該ショックの消費や労働供給への影響の大きさ、すなわち共分散」で特徴付けられる。この点は C-CAPM とまったく同様である。したがって我々の分析は、C-CAPM のアナロジーを用いれば、Consumption based な最適課税の特徴づけであるともいえる。

3　政府

---

[8] 反対に（6）を仮定すれば、均衡において消費と労働が上のような伊藤過程に従うことを（2）（3）から示すことができる。すなわち合理的期待に整合的である。

以上では、代表的消費者の意思決定問題を定式化し、政策変数を所与としたときの均衡、特に資産選択式を簡単に確認した。

この Section では、不完備金融市場下での最適資本課税の公式を導出する。そのために、まず代表的消費者の最適化条件から誘導可能条件を導出し、それを使って政策決定者の意思決定問題を定義する。誘導可能条件を使うことによって、裁定条件(7)からリスクの価値を一意に決定する必要がなくなり、「不完備市場では裁定条件からリスクの価値を一意に決定できない[9]」という分析上の難点を回避できる。一般的な最適課税公式を導出したのち、より直感的な解釈を促すために、効用関数を特定化して分析をおこなう。

３－１　Ramsey Problem

政策決定者の意思決定問題を定義しよう。

政策決定者は、代表的消費者の最適化行動および初期条件、それに政府支出ｇを所与として、予算制約の下で代表的消費者の効用関数（社会厚生関数）を最大化するように税率を決定するとする。すなわち、我々はラムゼイ流の最適課税問題を解く。また、政府は計画された政策を事後的にも遵守するとする。すなわち時間不整合性の問題は回避できることを前提とする。

RBC の文脈では、資本の生産性だけでなく、政府支出にもショックがあるものとして定式化するのが一般的であるが、ここでは分析の簡単化のために政府支出に不確実性はないものとする。むろん不確実性を含む場合への拡張は容易であり、それによって政府支出ショックに関する最適税率の変動を観察できるようになる。けれども、それは本稿の結論に大幅な変更を及ぼすものではない。さらに、議論を興味深いものにするために、$\hat{r}_0^i > 0, \hat{q}_0^{kia} > 0 \ (\vee i, a)$ を仮定しよう。すなわち、初期時点での課税額は一定範囲内に抑えられているとする[10]。

まず、ラムゼイ均衡を定義する。

Definition

ラムゼイ均衡とは、次の条件を満たすような政策と価格それに分配の組である。

ｉ、政府は、民間の行動を正確に予想して、予算制約式の下で期待社会厚生値 U を最大化

---

[9] ただし(8)で見たようにリスクの価値を効用から特徴付けることは出来る。

[10] もしこの仮定が無い場合、初期時点で出来るだけ多くの課税を課すことが最適となる。なぜなら初期時点においては課税による歪みが生じないからである。

するように政策を決定する。
ⅱ、消費者は、政策と価格を所与として、予算制約の下で効用を最大化するように、分配を決定する。
ⅲ、消費者は、政策と価格を所与として、技術条件の下で利潤を最大化する。

また、政府の予算式は次のようになる。
いま、資本合計を $k \equiv \sum_{i}^{m} k^i$ と定義し、そのなかの資本 i のシェアを $\boldsymbol{j}^i \equiv k^i / k$ と定義する。
すると政府の予算制約式は以下のように書ける。

$$(9)\quad db = \left\{ \sum_i \hat{r}^i \boldsymbol{j}^i k + \hat{w} l - f\left(\boldsymbol{j}^1 k, \cdots, \boldsymbol{j}^m k, l\right) + r^b b + g \right\} dt + \sum_a \sum_i \boldsymbol{j}^i k \left(\hat{\boldsymbol{q}}^{kia} - \boldsymbol{q}^{kia} \right) dz^a$$

ここで、右辺第 1 項は確実なパートからの純収入であり、右辺第 2 項は不確実なパートからの収入を現す。決定論的な場合と比べると、確実性パートは同様であるが、新たに不確実性パートからの収入の部分が付け加わっている。この部分は資本の限界収益の変動に合わせて税収が変動することに対応している。

ラムゼイ流の最適政策問題では、政策決定者は消費者の行動を正確に予想して、それと整合的なように政策を決定しなくてはならない。この点を反映して、政策決定者の意思決定問題には、消費者行動を表す条件式が加わることになる。Shimokawa(2001)では、消費者行動を表す条件式として、消費と労働および資産選択の 1 階の条件(2)(3)、それにλの変化式(6)をもちいた。この論文では、まず誘導可能分配（implementable allocation）を導出し、それをもちいて政策決定者の意思決定問題を定義する。誘導可能分配とは、ある適切な政策を用いれば、市場均衡として実現可能な分配として定義される。したがって、ラムゼイ分配は誘導可能分配でなくてはならなくなる。政府のラムゼイ問題は、この誘導可能分配集合の中から、社会厚生を最大にするような分配を選択することと書きかえられる。

我々の設定において分配可能集合とは、政策を所与として、政府の予算式(9)、消費者の 1 階条件(2)(3)(6)(7)および横断性条件 $\lim_{T \to \infty} E_0\left[e^{-lT} \boldsymbol{l}(T) a(T)\right] = 0$、生産者の最適化条件 $r^i = f_i \ (\vee i)$、$w = f_l$、さらに初期条件 $\vee i \ \ k^i(0) = k_0^i$、$b(0) = b_0$ を満たす集合のこととなる。

先にも述べたように、誘導可能分配を用いて政府の意思決定問題を定式化することによって、リスクの価格を裁定式から決定する必要がなくなり、それゆえ金融資産市場における完備性の仮定が分析上不要になる。誘導可能条件は Atkinson and Stiglitz(1980)や Lucas and Stokey(1983)によって使用され、その後、主に離散モデルの分析で利用されてきた

(Zhu(1992), Char et al(1994))。ここでは連続時間モデルにおける誘導可能集合を導出する。集合の導出では伊藤積分の期待値が０であることを利用する。

Lemma

ある分配$\left(c,l,k\right)$が誘導可能集合である必要十分条件は以下の条件を満たすことである。

(10) $$dk=\left\{f\left(\boldsymbol{j}^{1}k,\cdots,\boldsymbol{j}^{m}k,l\right)-c-g\right\}dt+\sum_{a}\sum_{i}\boldsymbol{j}^{i}k\boldsymbol{q}^{kia}dz^{a}$$ 、

(11) $$E_{0}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-lT}\left(u_{c}c+u_{l}l\right)dt\right]=\boldsymbol{l}_{0}a_{0}$$ 、

$\vee i\ \ k^{i}(0)=k_{0}^{i}$、$b(0)=b_{0}$、$\lim_{T\to\infty}E_{0}\left[e^{-lT}u_{c}\left(T\right)k\left(T\right)\right]=0$

証明：まず、(2)(3)(6)(7)(9)および$\lim_{T\to\infty}E_{0}\left[e^{-lT}\boldsymbol{l}\left(T\right)a\left(T\right)\right]=0$を満たせば(10)(11)を満たすことを示す。(10)は(2)から(9)を差し引くことで得られる。さらに、(6)に(7)を代入すると、

$$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{r}-\sum_{i}^{m}\hat{r}^{i}\boldsymbol{f}^{i}-r^{b}\boldsymbol{f}^{m+1}-\sum_{a}\sum_{i}\frac{H^{a}}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{f}^{i}\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\right)dt+\sum_{a}H^{a}dz^{a}$$

である。また、(1)は

$$da=\left\{\sum_{i}\hat{r}^{i}\boldsymbol{f}^{i}a+\hat{w}l+r^{b}\boldsymbol{f}^{m+1}a-c\right\}dt+\sum_{a}\sum_{i}\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\boldsymbol{f}^{i}a\,dz^{a}$$

であるから、これらを使って

$$d\left(e^{-rt}\boldsymbol{l}a\right)=-\boldsymbol{r}\left(e^{-rt}\boldsymbol{l}a\right)dt+e^{-rt}d\left(\boldsymbol{l}a\right)=e^{-rt}\left\{-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{l}a\,dt+\left(d\boldsymbol{l}\right)a+\boldsymbol{l}\left(da\right)+\left(d\boldsymbol{l}\right)\left(da\right)\right\}$$

を求めると、

$$d\left(e^{-rt}\boldsymbol{l}a\right)=\left\{e^{-rt}\left(\hat{w}l-c\right)\boldsymbol{l}\right\}dt+e^{-rt}\sum_{a}\left(aH^{a}+\boldsymbol{l}\sum_{i}\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\boldsymbol{f}^{i}a\right)dz^{a}$$

であり、さらに１階の条件(2)(3)から

$$d\left(e^{-rt}\boldsymbol{l}a\right)=-\left\{e^{-rt}\left(u_{c}c+u_{l}l\right)\right\}dt+e^{-rt}\sum_{a}\left(aH^{a}+\boldsymbol{l}\sum_{i}\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\boldsymbol{f}^{i}a\right)dz^{a}$$

である。これを積分すると

$$e^{-rT}\boldsymbol{l}a=\boldsymbol{l}_{0}a_{0}-\int_{0}^{T}e^{-rt}\left(u_{c}c+u_{l}l\right)dt+e^{-rt}\sum_{a}\int_{0}^{T}\left(aH^{a}+\boldsymbol{l}\sum_{i}\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\boldsymbol{f}^{i}a\right)dz^{a}$$

であるから、横断性条件$\lim_{T\to\infty}E_{0}\left[e^{-lT}\boldsymbol{l}a\right]=0$に考慮して、$T\to\infty$とすると、

(11) $$E_{0}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-lT}\left(u_{c}c+u_{l}l\right)dt\right]=\boldsymbol{l}_{0}a_{0}=u_{c}\left(c_{0}\right)a_{0}$$

を得る。ただし伊藤積分の期待値が０であることを用いた。

次に、分配$\left(c,l,k\right)$が(10)(11)を満たせば、誘導可能分配の条件を満たすような価格と政策

の組みを構成できることを示す。まず、利子率と賃金を $r^i = f_i \ (\vee i)$、$w = f_l$ と定義する。公債利回りを $E[du_c / u_c] = (r - r^b)dt$ を満たすように決定する。さらに、資本課税率を(7)を満たすように決定する。また、公債発行残高を

$$(12)\ b_t = \frac{1}{u_c(c(t))} E_t\left[\int_s^\infty e^{-lT}(u_c c + u_l l)ds\right] - k_t$$

と定義すればよい。□

Lemma(10)式は財市場の均衡条件式である。この式の確実性パートについては決定論的な場合と同様であるが、資本の生産性の変動を表す不確実性パート（右辺第 2 項）が新たに加わっている。また、(11)式は誘導可能条件といわれるものである。また、(12)はラムゼイ均衡における公債残高が満たさなくてはならない条件である。$(u_c c + u_l l)$ は資産価値であらわした各時点での純支出額であるから、(12)式は純支出額の現在価値から現時点での資本額を差し引いた額だけ、公債が発行されなくてはならないことを示している。

われわれは再び Dual アプローチを使って、政策決定者の問題を解こう。以上の制約式を用いて、政策決定者の意思決定問題は次のように特定される。

$$Max \quad U \quad s.t.\ (10), (11),\ \vee i\ \ k^i(0) = k_0^i,\quad b(0) = b_0,\quad \sum_i^m j^i - 1 = 0$$

以下での分析方針は、Shimokawa(2001)と基本的に同じである。ただし、誘導可能条件を使うことによって、分析が幾分簡略化できる。

まず、資本の社会的限界価値（dual variable）を p^k と定義しよう。ただし、ここで社会的限界価値の「社会的」とは、「政策意思決定者にとっての」という意味であり、「税によるゆがみも考慮したうえでの」という意味で使っている。以下、「社会的限界価値」、「社会的な価値」などの文言を多用するが、いずれもこの意味で使用している。

また、資本の社会的限界価値 p^k が

$$dp^k = \dot{p}^k dt + \sum_a T^{ka} dz^a$$

という Ito 過程にしたがっているとしよう。ここで $\dot{p}^k$ は期待変化分をあらわし、以下ですぐに特定化される。また、T^{ka} は p^k と z^a の瞬時的な共分散である。今の時点では T^{ka} は単なる記号として定義しておこう。この前提は前節の分析の場合と同様であり、決定論的なモデルと上式を比較すると不確実性パートが新たに加わっている。
T^{ka} は我々の分析において、社会的なリスクの価格をあらわし重要な変数となる。T^{ka} の値はいまのところ未定であるが、前 Section での場合と同様に、のちほど内生的に決定される。

したがって、ここでは p^k が Ito 過程に従うことだけを天下り的に仮定する。この過程の妥当性については Bismut(1973)を見よ。

以上を用いて、一般化されたハミルトニアンは次のように定義される。

$$\text{Hamiltonian} = u(c, l) + \boldsymbol{d}(u_c c + u_l l) + p^k \left\{ f\left(\boldsymbol{j}^1 k, \cdots, \boldsymbol{j}^m k, l\right) - c - g \right\}$$
$$+ V\left(1 - \sum_i^m \boldsymbol{j}^i\right) + \sum_a T^{ka} \sum_i \boldsymbol{j}^i k \boldsymbol{q}^{kia}$$

ただしここで $\boldsymbol{d}, V$ はそれぞれ関係する条件式のラグランジュアン乗数である。

このハミルトニアンの意味を考えよう。
このハミルトニアンは、政府の選択によって得られるある時点での社会的効用を現していると考えられる。それは消費と労働供給からの瞬時的な効用（右辺第 1 項）と、資本を蓄積することの社会的な価値の増加分（右辺第３項および第５項）、税によるゆがみの社会的価値の減少分（右辺第２項）
決定論的なモデルと比較して、異なるのは、我々の定式化ではリスクの社会的価値が考慮されている点である。リスク（分散）が価格 T^{ka} によって評価され、加味されている。

上式の $\boldsymbol{d}$ は、 Shimokawa(2001)における $\boldsymbol{d}$ に対応し、ここでも税による歪みを代表する変数である。 Shimokawa(2001)では $\boldsymbol{d} = -\left(p^b / \boldsymbol{l}\right)$ と定義したが、この論文では $\boldsymbol{d}$ は誘導可能条件のラグランジュ乗数である。Shimokawa(2001)では $\boldsymbol{d}$ が（時間を含めた）各ステイトにおいて一定であることをあらためて証明したが、この論文では $\boldsymbol{d}$ はラグランジュ乗数であるから当然各ステイトにおいて一定となる。このように誘導可能条件を用いた分析では、$\boldsymbol{d}$ が一定であることは定義から与えられる。その意味では誘導可能条件を用いることで分析が簡単化されるといえる。
また、δの大きさ（すなわちδ(0)）は政府負債の初期条件によって決定される。k_0 を所与としたとき、$\boldsymbol{d}$ は b_0 の増加関数となる。すなわち初期時点において資本に対する公債残高が大きいほど marginal excess burden も大きくなる。

最適化の一階の条件を導出しよう[11]。
$c, \ \boldsymbol{j}^i$ に関する一階の条件から

(13) $\quad u_c + \boldsymbol{d} u_c - p^k + \boldsymbol{d}\left(u_{cc} c + u_{cl} l\right) = 0$

---

[11] 十分条件は天下り的に満たされるとする。十分条件について、詳しくは Brock-Magill(1979)を見よ。また、このとき消費者の最適化問題に置ける横断性条件も満たされる。

(14) $$f_i + \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} \boldsymbol{q}^{kia} = \frac{V}{p^k k} \quad \vee i = 1, 2, \cdots, m$$

となる。

これらの意味を考えよう。

まず、(13)に注目すると、この式は決定論的なモデルでの条件と同じであることがわかる。(13)式は、代表的消費者の最適化行動を遵守することによる社会的コストが $\boldsymbol{d}(u_c + u_{cc} c + u_{cl} l)$ であることを意味している。したがって、もし税による歪みの価値 $\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{0}$ であるなら[12]、$u_c - p^k = 0$ となり、(2)から $\boldsymbol{l} = p^k$ となる。すなわち、資本の限界価値はその社会的限界価値と一致する。

(14)の右辺は資本 i の社会的な限界利益をあらわしている。それは資本の限界期待利益（第 1 項）にリスクの社会的コスト（第 2 項）を加味したものとなっている。

Dual 変数 p^k は以下のプロセスに従う。

(15) $$\frac{dp^k}{p^k} = \left[\boldsymbol{r} - \sum_i f_i \boldsymbol{j}^i - \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} \sum_i \boldsymbol{q}^{kia} \boldsymbol{j}^i \right] dt + \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} dz^a$$

(15)は、(14)を使って整理すると、

$$\frac{dp^k}{p^k} = \left[\boldsymbol{r} - f_i - \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} \boldsymbol{q}^{kia} \right] dt + \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} dz^a$$

となる。この式の右辺第 1 項は資本の社会的な期待割引率である。決定論的なモデルと異なるのは期待割引率が社会的なリスクのコスト（リスクプレミアム）を加味している点である。また、右辺第 2 項は資本の社会的価値のショックによる変動分に対応している。

現時点において T^{ka} は、p^k と z^a の共分散である以外に何もわかっていない。しかしながら T^{ka} はリスクの価格に対応するものであり、リスクを評価するうえで、その値を決定することは非常に重要となる。これは決定論的なモデルを、不確実性下へ拡張するうえで最も重要な点であるとも言える。以下の我々の分析では、T^{ka} を決定することが一つの目標となる。T^{ka} が決定されれば、リスクの社会的価値、あるいは資本の社会的割引率などが自動的に決まることになり、決定論的な場合と全く同様にして最適課税ルールを特徴付けることが出来るからである。

前 Section で見たように、消費者の意思決定の場合、リスクの価格 H^a は消費需要と労働供給によって特徴付けることが出来た。いわゆる C-CAPM の考え方である。

---

[12] たとえば、一括税が利用可能ならば、この条件は満たされる。

では、リスクの社会的価格T^{ka}はどのように特徴付けられるのだろうか？
結論を先取りして言えば、やはり消費需要と労働供給によって特徴付けることが出来る。ただし、それはH^{a}よりも若干複雑で、特にその決定には税によるゆがみが重要な役割を果たすことになる。そこで、われわれは$v \equiv \left(-\frac{u_{cc}c+u_{cl}l}{l}\right)=\left(-\frac{u_{cc}c+u_{cl}l}{u_{c}}\right)$と、変数を新たに定義して、これによってリスクの社会的価値T^{ka}を特徴付けることになる。T^{ka}の具体的な導出については次の Theorem の証明中でおこなわれる。

３－２　最適資本収益課税の特徴付け

以下では、ラムゼイ流の最適資本課税ルールを特徴づける。我々の定式化では、任意の資本 i からの収益に関して、確実性パートと不確実性パートの両方に異なった税率を適用できることになっている。すなわち各資本 i にかんして、$\left(t^{i}, h^{i1}, \cdots, h^{im}\right)$というm＋１個の税率を決定する必要がある。この定式化は不確実性下における資本課税分析の先駆的業績である Eaton(1981)に習ったものであるが、よく知られているように、これらの税率の組みは最適化条件のみでは一意に決定できない。すなわちラムゼイ流の最適課税率の組合せは、一般に、m次元の非決定性を持つことになる（Zhu(1992)、Chari-Christiano-Kehoe(1994)）[13]。

この最適税率の非決定性を考慮して、以下の我々の分析では、税率ではなく、その組合せである最適限界課税収入について特徴付けることにしよう。すなわち、資本 I からの（リスク修正した）限界課税収入を

$$
\begin{aligned}
\Pi^{i} &\equiv t^{i} f_{i} + \sum_{a} \frac{H^{a}}{l} h^{ia} q^{kia} \\
&\equiv \left(f_{i} - \hat{r}^{i}\right) + \sum_{a} \frac{H^{a}}{l}\left(q^{kia} - \hat{q}^{kia}\right)
\end{aligned}
$$

と定義して、最適なΠ^{i}を分析する。
Π^{i}は最適税率m＋１個の組合せになっている。したがって、Π^{i}を特徴付ける場合、決定されなければならない変数が、個々の税率を決定する場合と比較して、m個だけ減少するわけである。このことは、追加的な条件なしでもΠ^{i}が一意に決定されることを意味している。

Π^{i}の定義第 1 式の第 1 項は「資本 I からの期待限界税収」、第 2 項は「不確実パートからの限界税収をリスクの価格で評価したもの」となっている。Π^{i}はまた、定義の第 2 式から「資本収益税がない場合のリスク修正された割引率」－「資本収益税を考慮した場合のリス

[13] 我々のモデルにおいて、最適税率が不決定であることの簡単な説明は Shimokawa(2001)にある。

ク修正された割引率」ともあらわせる。これらの点を考慮して、以下では、Π^i を資本 I からの（リスク修正した）限界課税収入と呼ぶ。

Π^i についての最適ルールが導出されれば、それに新たにm個の追加的な制約を加えることで、我々はm＋1 個の最適税率を決定することが出来る。一つの現実的な制約の例は「確実性パートと不確実性パートのすべての税率が同じ」というものである。すなわち、$\boldsymbol{t}^i = \boldsymbol{h}^{i1} = \cdots = \boldsymbol{h}^{ia} = \cdots = \boldsymbol{h}^{im}$（$\vee i$）を仮定する。これは資本収益に関する最適税率が、不確実性に関係なく、事前に、決定されることを意味している。Zhu(1994)や Chari-Christiano-Kehoe(1994)では、非決定性の問題を回避するために、exante taxation という概念をあらたに定義して分析している。この概念はここで設けた仮定とは若干異なるものであるが、事前に最適税率が決定されるという点で同じものであり、したがって、彼等の分析結果と上記の仮定を課した場合の結果とは類似したものになる[14]。

先にも簡単に触れたように$v \equiv \left(-\dfrac{u_{cc}c + u_{cl}l}{u_c}\right)$は税による通時的な歪みの大きさにかかわるものであるが、この点は(13)式を(2) を使って次のように変形するとよくわかる。

(16) $p^k = \boldsymbol{l}(1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v)$

ここで $p^k / \boldsymbol{l}$ は、社会と民間の資本の限界価値の比率であるから、この式は両者の比率が$\boldsymbol{d}(1-v)$によって決定されることを意味している。δは歪みの価値を表す変数であり、ｖは通時的な歪みの大きさを規定する変数であると解釈することが出来る。

たとえば、もし一括税が可能であるなら定義より$\boldsymbol{d} = 0$である。このとき(16)から社会と民間の資本の限界価値は一致する（$p^k = \boldsymbol{l}$）。これは課税の歪みによるロスがまったくないことを意味している。

また、効用関数が分離可能であるような場合、$u_{cl} = 0$となるから、ｖは異時点間代替の弾力性の逆数（あるいは相対的リスク回避度）と一致する。このことは歪みの大きさが、異時点間代替の弾力性の逆数（あるいは相対的リスク回避度）と深く関係していることを示唆している。この点はあとで見る。

今、vの low of motion を、$\dfrac{dv}{v} = m^v dt + \sum_a \boldsymbol{q}^{va} dz^a$ と書こう。これは notation の簡単化のためであって、$m^v, \boldsymbol{q}^{va}$ は、vの定義式を展開することによって、それぞれ

[14] この点に関しては Shimokawa(2001)の Section4 を参照されたい。

$$m^v = \left\{ v_c c m^c + v_l l m^l + \sum_a (1/2)\left(v_{cc}\left(c\theta^{ca}\right)^2 + 2v_{cl} c\theta^{ca} l\theta^{la} + v_{ll}\left(l\theta^{la}\right)^2 \right) \right\} \Big/ v、$$

$$\theta^{va} = \left\{ v_c c\theta^{ca} + v_l l\theta^{la} \right\} \Big/ v$$

と決まる。ここで注意していただきたいのは、m^v, θ^{va} はともに消費と労働供給によって特徴付けられることである。あとに Theorem で見るように、最適課税ルールを特徴付ける際、（dv/v）が重要な役割を果たすが、この値は均衡における消費と労働供給の変動によって決定できる。

(16)式の変化率をとることによって、資本の「社会的限界価値の変化率」と「民間の限界価値の変化率」の差$\left(\frac{dp^k}{p^k} - \frac{d\lambda}{\lambda} \right)$を得ることが出来る。さらに、(6)(15)を利用することによって、Π^i が満たすべき最適課税ルールを以下のように特徴付けることが出来る。

Theorem

$v \equiv \left(-\frac{u_{cc} c + u_{cl} l}{u_c} \right)$とし、その変化率を$\frac{dv}{v} = m^v dt + \sum_a \theta^{va} dz^a$ と書く。

さらに、$\hat{r}_0^i > 0, \hat{\theta}_0^{kia} > 0 \ (\forall i, a)$を仮定する。

このとき、金融資産市場が不完備であっても、任意の時間$t > 0$について、資本k^i からの限界課税収入Π^i は以下のように特徴付けることが出来る。

(17) $$\Pi^i = \chi \left(\sum_a \theta^{kia} \theta^{va} + m^v + \sum_a \frac{H^a}{\lambda} \theta^{va} \right)$$

ただしここで$\chi \equiv \frac{\delta v}{1 + \delta - \delta v}$であり、$-\frac{H^a}{\lambda} = -\left\{ \frac{u_{cc} c}{u_c} \theta^{ca} + \frac{u_{cl} l}{u_c} \theta^{la} \right\}$ である。

証明：証明の方針は、Shimokawa(2001)Theorem1 とまったく同様である。

$d\delta = 0$ に注意して、(16)式の変化率をとると、

(18) $$\frac{dp^k}{p^k} - \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-\delta v}{1 + \delta - \delta v} \left(\frac{dv}{v} + \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{dv}{v} \right)$$

となる。これは、資本の「社会的限界価値の変化率」と「民間の限界価値の変化率」の差をあらわしている。

また、(15)を(14)を使って整理することにより

(15a) $$\frac{dp^k}{p^k} = \left[r - f_i - \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} \theta^{kia} \right] dt + \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} dz^a$$

と書ける。また、(6)に(7)を代入して、Π^i の定義を考慮すると、

(6a) $$\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} = \left(\boldsymbol{r} - f_i - \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{kia} + \Pi^i\right)dt + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}} dz^a$$

と出来る。(18)に(15a)(6a)を代入して、$\frac{dp^k}{p^k}$ と $\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}$ を消去すると、

[(26)式左辺] $= \left\{\sum_a \left(\frac{H^a}{\boldsymbol{l}} - \frac{T^{ka}}{p^k}\right)\boldsymbol{q}^{kia} - \Pi^i\right\}dt + \sum_a\left(\frac{T^{ka}}{p^k} - \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\right)dz^a$

[(26)式右辺] $= \frac{-\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}\left(m^v + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)dt + \frac{-\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}\sum_a \boldsymbol{q}^{va}dz^a$

であるから、伊藤過程の一意分解性より、両辺の dt 項と dz 項を比較することで、

(19) $$\Pi^i = \left\{\sum_a \left(\frac{H^a}{\boldsymbol{l}} - \frac{T^{ka}}{p^k}\right)\boldsymbol{q}^{kia} - \frac{-\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}\left(m^v + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)\right\}、$$

(20) $$\left(\frac{T^{ka}}{p^k} - \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\right) = \frac{-\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}\boldsymbol{q}^{va} \qquad \vee\, \boldsymbol{a} \in [1,2,\cdots,m]$$

を得る。(19)に(20)を代入すると(17)を得る。□

まず、Π^i は資産に関する初期条件と、資本の限界収益に関するショックの大きさ$\boldsymbol{q}^{kia}$ 、それに均衡での消費と労働の値によって決まることを確認しよう。（17）の右辺は$\boldsymbol{d}$と$\boldsymbol{q}^{kia}$ 、v 、dv/v 、それに$H^a/\boldsymbol{l}$で決まる。このうち$\boldsymbol{q}^{kia}$ は外生的に与えられるものである。$\boldsymbol{d}$は公債(と資本)の初期保有量によって決定される。 v 、dv/v、$H^a/\boldsymbol{l}$ は、先に見たように、消費と労働の均衡経路が決まれば決まる。

(17)式の意味を考えよう。
v が歪みの大きさを規定する変数であることは再三述べた。(17)を解釈する際は、さらにv が異時点間代替の弾力性の逆数に対応していることを思い出すと理解しやすい。
まず、右辺の$\left(m^v + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)$は、$v$ の（リスク修正された）成長率であり、それが大きいほど、資本収益への課税は大きい事をあらわしている。もしvが大きくなるなら（すなわち代替の弾力性が小さくなるなら）、より多くの課税をすることになる。なぜなら代替の弾力性が小さければ、多くの税を課したとしても、通時的な資源分配の変化は少なく、したがって課税による通時的な歪みが少なくなるからである。
また、$\sum_a \boldsymbol{q}^{kia}\boldsymbol{q}^{va}$ はv の変化率と資本収益の変化率との共分散である。資本I収益の変動がv に与える影響が大きいほど、異時点間代替に与える影響は大きくなり、したがって歪みも大きくなる。これを受けて、v の変化率と資本収益の変化率との共分散が大きいほど、資本Iからの収益への課税は大きくなる。ショックによって、より大きな歪みをもたらす資本の

保有量を減らすように課税されるわけである。
c は課税率の大きさを決定している。d が大きいほど（公債残高が大きいほど）課税額は大きくなる。

Remark：(17)において、もし $d=0$ や $(dv/v)=0$ であるなら、$\Pi^i=0$ となる。$d=0$ は税による歪みの存在しない状況、すなわち一括税が利用可能な状況に対応する。また、$(dv/v)=0$ は、たとえば、効用関数が c と l に関して同次であるようなケースに対応する。

Remark：多資本モデルにおける資本間の最適課税の関係について
資本間の最適課税の関係についても、Shimokawa(2001)Theorem2 がそのまま不完備金融資産市場のケースにも拡張できることは明らかであろう。
すなわち、資本収益率の変動が v の変動率に大きな影響を与える資本ほど（共分散 $\sum_a q^{va} q^{kia}$ が大きな資本ほど）、Π^i がおおきくなるということである。つまり、資本収益の変動により、大きな歪みをもたらすような資本には高額の課税を課し、保有量を抑えるのが最適となる。

３－３　2 つの効用関数

つぎに、効用関数を特定化することによって、v を具体的に消費によってあらわしてみよう。これによって、Π^i の特徴付けに関するより直感的な理解が得られるはずである。

例１：効用関数を以下のように特定化する。
瞬時的効用関数が分離可能であり、かつ c に関して絶対的リスク回避度が一定であるとする。すなわち $u(c,l) \equiv \{1-\exp(-g\, c)\} + h(l)$ という場合を考える。ここで $h(\cdot)$ は l に関して concave であり、絶対的リスク回避度 g は正の定数である。

このモデルでは、 効用関数が分離可能であるため、v は消費のみから決まり、相対的リスク回避度と一致する。その値は $v = g\, c$ となる。さらに絶対的リスク回避度が一定であることを考慮すれば、$(dv/v) = (dc/c)$ が成立している。すなわち v の変化率は c のそれと一致する。故に $m^v = m^c$,　$q^{va} = q^{ca} \quad \vee a$ である。

また、リスクの価格は(8)から $\left(-H^a/l\right) = g\, c q^{ca} \quad \vee a$ となり、リスクプレミアムは、これを用いて $\sum_a -\frac{H^a}{l} q^{kia} = g\, c \sum_a q^{ca} q^{kia}$ とかける。すなわち相対的リスク回避度 $g\, c$ と消

費の成長率と資本の成長率の瞬時的共分散$\sum_a q^{ca} q^{kia}$ から決まることが確認できる。また、リスクプレミアムは正であるから、均衡経路上において消費と資本の共分散$\sum_a q^{ca} q^{kia}$ も正であることが分かる。すなわち、資本からの収益率の増加は必ず瞬間的な消費量を増加させる。
資産の裁定式(7)は、これをもちいて$\hat{r}^i - g\,c \sum_a q^{ca} q^{kia} = r^b$ となる。すなわち、資本からの収益の変動が消費に大きな影響を与えるほど、また相対的リスク回避度が大きいほど、リスクプレミアムは大きくなる。

さて、この関数系おけるΠ^iの特徴づけを見よう。つぎの(20a)では、vの変化率ではなく、消費 c の変化率によってΠ^iが特徴付けられるために、その解釈がより容易になる。

Corollary1
効用関数を$u(c,l) \equiv \{1 - \exp(-g\,c)\} + h(l)$と特定化すると、(17)は以下のように書ける。

(17a) $$\Pi^i = c\left(\sum_a q^{kia} q^{ca} + m^c - g\,c \sum_a \left(q^{ca}\right)^2 \right) \qquad \vee i$$

ただしここで $c \equiv \dfrac{dg\,c}{1 + 2d - dg\,c}$ である。

(17a)を解釈すると、リスク修正した消費の成長率$\left(m^c - g\,c \sum_a \left(q^{ca}\right)^2 \right)$が大きいほど課税収入は大きくなることがわかる。消費の成長率が大きいのは、資本蓄積がまだ十分に進んでいない状況である。このとき成長資本をより必要としているので、資源の異時点間代替の弾力性は小さい。すなわち仮に多くの資本所得課税を課しても、資源分配に大きな影響はもたらさない。したがって資本収益に関する最適課税額は大きくなる。この結果は決定論的なモデルにおいて良く知られた結果と一致する。
また、資本収益ショックが消費に大きな影響を与える（すなわち共分散が大きい）資本ほど課税額が大きくなることが分かる。これはショックが大きな歪みをもたらすような資本ほどその保有量を小さくするように課税されることを意味する。

４－２　homogeneous utility function

次に、瞬時的な効用関数が消費と労働に関して homogeneous of degree h（ただし h は任意の整数）であるか、あるいは消費と労働に関して分離可能であり、かつ消費に関して homogeneous of degree h である場合を考えよう。このケースでは(dv/v)はつねに 0 とな

る。すなわちvは資本蓄積に関わらず常に一定である。Lemma2 よりδも常に一定であるから、これは課税による歪みdvが通時的に一定であることを意味している。従って、最適課税率は常に一定となる。ただし、政府支出は有限であるから、横断条件と合わせると、最適課税率は常に０でなくてはならない（上記２、３の結果）。

以上を公式から確認しよう。
vの定義より、効用関数が homogeneous of degree hならば$v = h - 1$となる。hはコンスタントであるから、vもコンスタントである。したがって$m^{v} = q^{va} = 0$（$\vee a$）である。
これらを（17）に代入すると

(17b) $\quad \Pi^{i} = 0 \qquad \vee i \in [1, 2, \cdots, m]$

がわかる。上述の非決定性により課税率の組合せは一意には決まらないが、上式は資本 I からの限界課税収入が常に 0 であることを意味している。

もし、課税率に関して、追加的に$t^{i} = h^{i1} = \cdots = h^{ia} = \cdots = h^{im}$という仮定を課せば、最適課税率は全て０となる。この仮定は課税率が事前に決定されるケースを意味している。このことは先に見た。まとめると、

Corollary4
瞬時的な効用関数を
(1)消費と労働に関して homogeneous of degree h であるか、
(2)あるいは消費と労働に関して分離可能であり、かつ消費に関して homogeneous of degree h であると仮定する。このとき(17)は以下のように特定化される。

(17b) $\quad \Pi^{i} = 0 \qquad \vee i \in [1, 2, \cdots, m]$

さらに課税率$t^{i} = h^{i1} = \cdots = h^{ia} = \cdots = h^{im}$という仮定を課せば、最適課税率は全て０である。

以上、我々は誘導可能条件を用いることによって、最適資本課税公式を特徴付ける Shimokawa (2001)Theorem1 が、不完備金融市場下においても成立することを確認した。

References

Atkinson, Anthony B., and Stiglitz, Joseph E. 1980. *Lecture on Public Economics*. McGraw-Hill, New York.

Back, K. 1991. “Asset Pricing for General Processes.” J. Math. Econ. 20: 371-396.

Bismut, Jean-Michel. 1973. “Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control.” *J. Math. Analysis and Applications* 44: 387-404.

Bismut, Jean-Michel. 1975. “Growth and Optimal Intertemporal Allocation of Risks.” *J. Econ. Theory* 10: 239-257.

Brock, William. And Magill, Michael. 1979. “Dynamics under Uncertainty.” *Econometrica* 47: 843-868.

Chamley, Christophe. 1986. "Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives." *Econometrica* 54: 607-22.

Chari, V. V.; Christiano, Lawrence J.; and Kehoe Patnck J. 1994. "Optimal Fiscal Policy in a Business Cycle Model.” J. Political Econ. 102: 617-652.

Eaton, Jonathan. 1981. “Fiscal Policy, Inflation and the Accumulation of Risky Capital.” Review of Economic Studies 48: 435-445.

Grinols, Earl L. and Turnovsky, Stephen J. 1993. “Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium.” *J. Econ. Dynamics and Control* 17: 1-36.

Judd, Kenneth L. 1985. 'Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model." *J. Public Econ*. 28: 59-83.

Judd, Kenneth L. 1999. "Optimal taxation and Spending in General Competitive Growth Models.” *J. Public Econ*. 71: 1-26.

Lucas, Robert E., Jr. and Stokey, Nancy L. 1983. “Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital.” *J. Monetary Econ*. 12: 55-93.

Shimokawa, Tetsuya. 2001. “Risk and Optimal Capital Income Taxation in a Continuous-Time, Multi-capital Economy.” Mimeo.

Zhu, Xiaodong. 1992. “Optimal Fiscal Policy in a Stochastic Growth Model.” *J. Econ. Theory* 58: 250-289.