

CIRJE-J-56

## イールドカーブ戦略の動学的最適性

成蹊大学経済学部

時岡規夫

東京大学大学院数理科学研究科

高橋明彦

東京大学大学院経済学研究科

小林孝雄

2001年5月

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられたい。

# イールドカーブ戦略の動学的最適性\*

時岡 規夫<sup>†</sup> 高橋 明彦<sup>‡</sup> 小林 孝雄<sup>§</sup>

2001 年 5 月 27 日

## 要旨

動学的最適化問題の枠組で、残存期間の異なる債券間のポートフォリオ選択を考える。金利の期間構造モデルを導入し、投資家にとって最適な債券ポートフォリオの構成を解析的に、あるいは、漸近展開やモンテカルロ法を組合せて求めた。さらに、得られた結果と利回り曲線の形状の関係を分析することで、イールドカーブ戦略とよばれる実務における債券ポートフォリオ運用戦略の理論的正当性を検討する。

## Abstract

This paper formulates and analyzes a dynamic optimization problem of bond portfolios within the Markovian Heath-Jarrow-Morton term structure models. In particular we find the exact condition under which the so-called barbell/bullet strategies become optimal relative to the forecasted term structure movements.

---

\*本論文は横浜国立大学・南山大学共同ファイナンス・ワークショップにおける報告論文を基に、加筆・修正したものである。上記ワークショップ出席者をはじめ、日本経済学会 2000 年度秋季大会での討論者である本多俊毅教授や成蹊大学での研究会の参加者からは貴重なコメントを頂戴した。記して感謝の意を表したい。もちろん、なお残る誤りの責はひとり筆者に帰する。

<sup>†</sup>成蹊大学 経済学部 E-mail: ntokioka@econ.seikei.ac.jp

<sup>‡</sup>東京大学大学院 数理科学研究科

<sup>§</sup>東京大学大学院 経済学研究科

# 1 問題の所在

最近のいくつかの研究 (Brennan, Schwartz, and Lagnado (1997), Brennan and Xia (1998), Campbell and Viceira (1999), Liu (1999), Sørensen (1999) Wachter (1999) など) を除けば、これまで動学的最適化問題の枠組で債券ポートフォリオを分析する試みはほとんどなされてこなかった。しかも、上記研究の1つの大きな現実的な関心は株式と債券間のポートフォリオ組入れ比率に関する、Canner, Mankiw, and Weil (1997) の「アセット・アロケーション・パズル」にあった。

しかし、一口に「債券」といっても、実際にはさまざまな債券が存在する。そうした異なる債券をどう組合せるべきかについて、既存の研究はあまり理論的関心を払ってこなかったといえる。そこで、本論文ではまず金利の期間構造モデルを明示的に導入して、残存期間の異なる債券で構成される動学的に最適な債券ポートフォリオを求める。次いで、そうして得られた結果と、イールドカーブ戦略といった実務において行なわれている債券運用戦略を比較し、実際の取引へのインプリケーションを導き出す。具体的には、債券の最適な債券ポートフォリオと金利の期間構造を表す利回り曲線の形状ならびにその変化との関係が検討される。想定する投資家は、ここでは簡単化のため、債務をかかえておらず、かつ、運用手段は債券に限定されているとする。

以下、2節では、金利の期間構造モデルに一般的な1-ファクター Heath-Jarrow-Morton モデルを考えた場合の最適な債券ポートフォリオについて調べる。そして、そのような一般的な設定の下では、最適なポートフォリオはインプリシットな形でしか得られないことが示される。そこで、Ritchken and Sankarasubramanian (1995) の結果を用いて、金利の期間構造がマルコフ過程で表現されるようにモデルを特定化し最適なポートフォリオを分析したのが3節である。中でも、3.1節は解析的に完全に解ける Hull and White (1990) による拡張された Vasicek モデルを取り扱う。3.2節は、その金利の期間構造モデルの2-ファクター・モデルへの拡張版を用いた分析になっている。3.3節では1-ファクター・モデルに戻って、解析的に完全には解けないが、金利の期間構造が2次元マルコフ過程で記述される場合の最適ポートフォリオの性質を数値解法等によって調べる。3節では主に、実務におけるイールドカーブ戦略との比較検討がなされ、実際の運用戦略を支持するような結果が、かなり広い金利の期間構造モデルのクラスで得られることが示される。最後の4節において結果をまとめる。

## 2 1-ファクター Heath-Jarrow-Morton モデルの下での最適ポートフォリオ

### 2.1 金利の期間構造モデル

フィルター付き確率空間が  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  で与えられ、金利の期間構造モデルとして受渡し時点を  $T$  とする時点  $t$  における瞬間的なフォワード金利 (instantaneous forward rate)  $f(t, T)$  が、その上のような1-ファクター Heath-Jarrow-Morton モデルに従うとする ( $T \geq t$ )。

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW^P(t) \quad (1)$$

ここで、すべての  $T$  について  $\alpha(\cdot, T)$  と  $\sigma(\cdot, T)$  は技術的条件<sup>1</sup>を満たす  $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合 (adapted) な確率過程であり、 $W^P$  は1次元  $P$ -ブラウン運動とする。そして、投資家はこのブラウン運動が起動するリス

<sup>1</sup>Heath, Jarrow, and Morton (1992) や Musiela and Rutkowski (1997)などを参照。

クのみに関心があると仮定する。金利リスクの市場価格を  $\{\mathcal{F}_t\}$ -適度な確率過程  $\theta$  とおけば、無裁定条件よりすべての  $t \in [0, T]$  に対して

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)(\nu(t, T) - \theta(t)), \quad \text{where } \nu(t, T) \triangleq \int_t^T \sigma(t, u) du \quad (2)$$

が満たされる。表記方法として  $\triangleq$  は定義を表すと約束する。また、 $P$ -ブラウン運動  $W^P$  と同値マルチンゲール測度 (equivalent martingale measure)  $Q$  の下でのブラウン運動  $W^Q$  との間には

$$dW^Q(t) = dW^P(t) - \theta(t)dt \quad (3)$$

の関係が成り立つ。

運用手段として、マネー・マーケット・アカウント (money market account あるいは savings account) と割引債 (以下では、満期時点を  $T$  とする割引債を「 $T$ -割引債」のように表記する。) の2種類の資産を考える。ここで言うマネー・マーケット・アカウントとは各時点の短期金利でロール・オーバー運用する資産であり、時点  $t$  における短期金利  $r(t)$  はよく知られているように  $r(t) = f(t, t)$  の関係が成立する。よって、時点 0 における価値を 1 に規準化すれば、マネー・マーケット・アカウントの価値は

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1 \quad (4) \\ \Rightarrow B(t) &= \exp \left( \int_0^t f(0, u)du + \int_0^t \int_0^u \alpha(s, u)dsdu + \int_0^t \int_0^u \sigma(s, u)dW^P(s)du \right) \end{aligned}$$

であり、一般に時点  $t$  における  $T$ -割引債価格  $P(t, T)$  は、 $P(t, T) = \exp \left( - \int_t^T f(t, u)du \right)$  だから

$$P(t, T) = \exp \left( - \int_t^T f(0, u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s, u)duds - \int_0^t \int_t^T \sigma(s, u)dudW^P(s) \right) \quad (5)$$

と表される。このとき、そのプロセスは

$$dP(t, T) = P(t, T)(\mu(t, T)dt - \nu(t, T)dW^P(t)), \quad \text{where } \mu(t, T) \triangleq r(t) + \theta(t)\nu(t, T) \quad (6)$$

に従うことが知られている<sup>2</sup>。(6)式は、不確実性の源泉である金利の期間構造モデルのただ1つのリスク・ファクターと割引債価格のプロセスを起動するブラウン運動とが一致していることを示している。

## 2.2 分析

次に、投資家の最適化行動を定式化する。本論文では全体を通じ、投資家は、ある期末時点  $T^0$  における wealth の上に定義された、相対的リスク回避度が一定な (constant relative risk aversion, CRRA) 効用関数を持ち、その期待効用を最大化すると仮定する。また、期初時点 0 における投資家の wealth はプラスで所与であるとする。この下では、wealth をいかに割引債とマネー・マーケット・アカウントに振り分けて運用するかが投資家の考える最適化問題の内容になる。

<sup>2</sup>Heath, Jarrow, and Morton (1992) や Musiela and Rutkowski (1997) などを参照。

時点  $t$  における wealth を  $V(t)$  , 投資家の相対的リスク回避度を  $\gamma$  とおけば, 投資家の効用関数は  $U(V(T^0)) = 1/(1-\gamma)V(T^0)^{1-\gamma}$  と表される。  $w$  を割引債に対する投資ウェイトとすれば, 投資家の最適化行動は

$$\begin{aligned} & \max_{(V(T^0), w)} \mathbb{E}^P[U(V(T^0))], \\ & \text{s.t. } (V(T^0), w) : \text{budget feasible and } V(0) : \text{given} \end{aligned}$$

と定式化される。このような動学的最適化問題の解法は大きく分けて2つある。1つは Merton (1971) をはじめとするダイナミック・プログラミングの手法であり, もう1つは Cox and Huang (1989) や Karatzas, Lehoczky, and Shreve (1987) によるマルチンゲール・アプローチである。本論文では後者の手法を採用する。マルチンゲール・アプローチは, マネー・マーケット・アカウントの価値で割引いた最適な資産価値のプロファイルが  $Q$ -マルチンゲールとなる性質を利用する。そこでは, 状態価格デフレーター (state-price deflator; state-price density, state-price kernel あるいは pricing kernel などともよぶ。) が重要な役割をはたす。ギルサノフの定理を使えば, (3) 式より, 時点  $t$  における状態価格デフレーターは  $\eta(t)/B(t)$  と表されて

$$\eta(t) = \eta_1(t) \triangleq \exp\left(\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds\right) \Rightarrow d\eta_1(t) = \eta_1(t)\theta(t)dW(t), \quad \eta_1(0) = 1 \quad (7)$$

となる。かくして, 上の投資家の最適化行動は状態価格デフレーターを使って次のように書き換えられる。すなわち,

$$\max_{V(T^0)} \mathbb{E}^P \left[ \frac{1}{1-\gamma} V(T^0)^{1-\gamma} \right], \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}^Q \left[ \frac{V(T^0)}{B(T^0)} \right] = V(0) \Leftrightarrow \mathbb{E}^P \left[ \frac{\eta_1(T^0)V(T^0)}{B(T^0)} \right] = V(0)$$

である。ラグランジュ乗数を  $\lambda$  とおけば, 1階の条件から

$$V^*(T^0) = \lambda' \left( \frac{\eta_1(T^0)}{B(T^0)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \text{where } \lambda' \triangleq \lambda^{-\frac{1}{\gamma}}$$

となる。よって,

$$V^*(t) = B(t) \mathbb{E}^Q \left[ \frac{V^*(T^0)}{B(T^0)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \lambda' \frac{B(t)}{\eta_1(t)} \mathbb{E}^P \left[ \left( \frac{\eta_1(T^0)}{B(T^0)} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

であり, (4) 式, (5) 式, (7) 式および無裁定条件を使って最適解は

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \lambda' \left( \frac{\eta_1(t)}{B(t)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} P(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} G(t, T^0), \quad \text{where} \quad (8) \\ G(t, T) &\triangleq \mathbb{E}^P \left[ \exp \left( \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \left( \int_t^T (\theta(s) - \nu(s, T)) dW(s) - \frac{1}{2} \int_t^T (\theta(s) - \nu(s, T))^2 ds \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

になる。さらに,  $\lambda'$  は  $V^*(0) = V(0)$  を満たすように決まり  $\lambda' = V(0)P(0, T^0)^{-(1-1/\gamma)}/G(0, T^0)$  となる。

割引債に対する最適な投資ウェイト  $w^*$  は (8) 式で求めた  $V^*$  を複製するような取引戦略となる。それは、 $\eta(t)^{-1/\gamma}$  を複製する戦略、 $P(t, T^0)^{1-1/\gamma}$  を複製する戦略、 $G(t, T^0)$  を複製する戦略という3つの部分に分けて考えることができる。 $\gamma = 1$  のとき、あるいは、 $T^0 = t$  のとき  $P(t, T^0)^{1-1/\gamma}$ 、 $G(t, T^0)$  はともに1となるから、それらを複製する戦略としての割引債に対する最適な投資ウェイトはゼロとなり、その場合、結局  $\eta(t)^{-1/\gamma}$  を複製する戦略のみとなる。このことから、 $P(t, T^0)^{1-1/\gamma}$  と  $G(t, T^0)$  を複製する戦略は Merton (1971) のヘッジ・ポートフォリオ (intertemporal hedging portfolio) に対応していると考えられる。一方、最初の  $\eta(t)^{-1/\gamma}$  を複製する戦略は静学的な1期間モデルにおいて最適となる平均・分散ポートフォリオ (mean-variance efficient portfolio; myopic portfolio あるいは growth optimum portfolio など) に当たる。それは、仮に割引債が1つだとすると、(6) 式と (7) 式よりその部分のウェイトは  $1/\gamma \times (\mu(t, T) - r(t))/\nu(t, T)^2$  となって、投資家のリスク許容度と、資産の収益率の分散1単位当たりのリスク・プレミアムの積を表していることになるということを確認できる。

しかし、一般的な状況で、これら3つの構成要素のうち  $G(t, T^0)$  を複製する戦略を明示的に求めることが難しいため、最適ポートフォリオに共通する性質を見出すことはかなり困難である。もっとも、もしすべての  $s \in [t, T]$  について  $\theta(s) - \nu(s, T)$  が deterministic ならば、正規分布の積率母関数を使って

$$G(t, T) = \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\int_t^T (\theta(s) - \nu(s, T))^2 ds\right)$$

となりその複製戦略としての割引債への投資ウェイトはゼロとなる。また、limiting case として  $\gamma \rightarrow \infty$  のとき、 $V^*$  は  $V(0)/P(0, T^0)$  単位の  $T^0$ -割引債の価値に一致することが知られている<sup>3</sup>。そこで、次節ではもう少しモデルを特定化し最適ポートフォリオの性質を調べることにする。

### 3 金利の期間構造がマルコフ過程で表現されるときに最適ポートフォリオとイールドカーブ戦略

Ritchken and Sankarasubramanian (1995) によれば、(1) 式の拡散係数が

$$\sigma(t, T) = \sigma_r(r(t), t) \exp\left(-\int_t^T \kappa(x) dx\right) \quad (9)$$

という構造を持ち、確率過程で表される金利リスクの市場価格が関数  $\theta(r(t), t)$  で表されるならば、金利の期間構造に関するダイナミクスは次の2次元マルコフ過程

$$\begin{aligned} dr(t) &= \left(\kappa(t)(f(0, t) - r(t)) + \phi(t) - \sigma_r(r(t), t)\theta(r(t), t) + \frac{\partial}{\partial T}f(0, t)\right) dt + \sigma_r(r(t), t)dW^P(t) \quad (10) \\ d\phi(t) &= (\sigma_r(r(t), t))^2 - 2\kappa(t)\phi(t) dt \end{aligned}$$

に従う  $(r, \phi)$  で表現される。ここで、2番目の状態変数は  $\phi(t) \triangleq \int_0^t \sigma(s, t)^2 ds$  で定義される。このとき、 $T$ -割引債の収益率の標準偏差は、(2) 式より

$$\nu(t, T) = \sigma_r(r(t), t) \int_t^T \exp\left(-\int_t^u \kappa(x) dx\right) du \quad (11)$$

<sup>3</sup>Sørensen (1999) や、より一般的には Wachter (1999) を参照。

である。

運用手段として、マネー・マーケット・アカウントと割引債の2種類の資産を考えれば、経済は完備市場になっている。Ocone and Karatzas (1991) で示されているように、上記経済における投資家の割引債に対する最適な投資ウェイト  $w^*$  は、

$$\begin{aligned} \nu(t, T)w^*(t) &= \frac{1}{\gamma}\theta(r(t), t) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mathbb{E}^P \left[ \xi(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \int_t^{T^0} D_t r(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}^P \left[ \xi(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \middle| \mathcal{F}_t \right]} \\ &+ \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mathbb{E}^P \left[ \xi(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left( \int_t^{T^0} \theta(r(s), s) (D_t \theta(r(s), s)) ds - \int_t^{T^0} D_t \theta(r(s), s) dW(s) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E}^P \left[ \xi(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \middle| \mathcal{F}_t \right]} \end{aligned} \quad (12)$$

を満たすこととなる。 $\xi(t, T)$  は時点  $t$  と時点  $T$  における状態価格デフレーター之比、

$$\begin{aligned} \xi(t, T) &= \frac{\frac{\eta(T)}{B(T)}}{\frac{\eta(t)}{B(t)}} = \exp \left( - \int_t^T r(s) ds + \int_t^T \theta(r(s), s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_t^T \theta(r(s), s)^2 ds \right) \\ \Rightarrow d_T \xi(t, T) &= \xi(t, T) (-r(T) dT + \theta(r(T), T) dW(T)); \quad \xi(t, t) = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

であり、 $D$  はマリアヴァン微分を表すとする。(12) 式は投資家の需要が3つの部分から成ることを示している。2.2 節で指摘したように、第1項は平均・分散ポートフォリオに相当し、第2項と第3項の和はヘッジ・ポートフォリオに対応する部分である。さらに、第2項、第3項はそれぞれ「IRヘッジ需要」、「MPRヘッジ需要」とよばれる需要に対応する部分である<sup>4</sup>。この場合、IRヘッジ需要は短期金利の変動に対する、MPRヘッジ需要は金利リスクの市場価格の変動に対するヘッジ需要であると解釈される。

### 3.1 Hull and White(1990) による拡張された Vasicek モデル

最初に、(9) 式の  $\sigma_r(r(t), t)$  と  $\kappa(x)$  が、さらにプラスの定数  $\kappa, \sigma$  を用いて、 $\sigma_r(r(t), t) = \sigma, \kappa(x) = \kappa$  となる場合の分析を行なう。つまり、

$$\sigma(t, T) = \sigma \exp(-\kappa(T - t)) \quad (14)$$

となる構造を仮定する。ここで、金利リスクの市場価格が

$$\theta(r(t), t) = \theta > 0 \quad (15)$$

で一定ならば  $\phi$  は deterministic になり、金利の期間構造が1状態変数  $r$  で表現されることになる。そして、その短期金利のプロセスは Hull and White(1990) による拡張された Vasicek モデル

$$dr(t) = (\psi^Q(t) - \kappa r(t)) dt + \sigma dW^Q(t), \quad \text{where} \quad \psi^Q(t) \triangleq \frac{\partial}{\partial T} f(0, t) + \frac{\sigma^2(1 - \exp(-2\kappa t))}{2\kappa} + \kappa f(0, t) \quad (16)$$

<sup>4</sup>Detemple, Garcia, and Rindisbacher (2000) による。

となる。(14) 式の下では, (11) 式は

$$\nu(t, T) = \frac{\sigma(1 - \exp(-\kappa(T - t)))}{\kappa} \quad (17)$$

となって割引債の収益率の標準偏差が deterministic な関数であることが分かる。同時に, (15) 式と (16) 式から

$$\begin{aligned} D_t \theta(s) &= 0 \\ D_t r(s) &= \sigma \exp(-\kappa(s - t)) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

投資家の運用手段としてマネー・マーケット・アカウント,  $\bar{T}_1$ -割引債,  $\bar{T}_2$ -割引債の3資産を考える。ただし,  $\bar{T}_1 > \bar{T}_2$  とする。これにより,  $\bar{T}_1$ -割引債を長期債,  $\bar{T}_2$ -割引債を中期債, マネー・マーケット・アカウントを短期債とみなすことができる。ただし, ここでは投資家の選択できる債券ポートフォリオはデデュレーションが  $\bar{T} - t$  となるものに限られるとする。このように債券ポートフォリオのデデュレーションに制約をおくのは, むしろ, 実務上の慣行をモデルにとり入れるためである。(16) 式で表される金利の期間構造は1-ファクター・モデルであるため, 上のようなデデュレーションに関する制約条件を課しても, 3資産で完備市場となる。 $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ -割引債の投資ウェイトをそれぞれ  $w_1, w_2$  とおけば, (12) 式, (17) 式, (18) 式より

$$\nu(t, \bar{T}_1)w_1(t) + \nu(t, \bar{T}_2)w_2(t) = \frac{1}{\gamma}\theta + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\nu(t, T^0)$$

を満たす  $w_1, w_2$  が最適となる。債券ポートフォリオのデデュレーションの制約条件は

$$w_1(t)(\bar{T}_1 - t) + w_2(t)(\bar{T}_2 - t) = \bar{T} - t$$

と表せるから, まとめると, 最適な投資ウェイトの満たすべき関係は

$$\begin{bmatrix} \nu(t, \bar{T}_1) & \nu(t, \bar{T}_2) \\ \bar{T}_1 - t & \bar{T}_2 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\theta + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\nu(t, T^0) \\ \bar{T} - t \end{bmatrix} \quad (19)$$

ということになる。左辺の行列に逆行列が存在することについては, (17) 式より  $T > t$  について

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\nu(t, T)}{T - t} \right) = \frac{\sigma}{\kappa} \frac{(\kappa(T - t) + 1) \exp(-\kappa(T - t)) - 1}{(T - t)^2} < 0 \quad (20)$$

が成り立つから,  $\bar{T}_1 > \bar{T}_2 > t$  について

$$\Delta_1 \triangleq \begin{vmatrix} \nu(t, \bar{T}_1) & \nu(t, \bar{T}_2) \\ \bar{T}_1 - t & \bar{T}_2 - t \end{vmatrix} = (\bar{T}_1 - t)(\bar{T}_2 - t) \left( \frac{\nu(t, \bar{T}_1)}{\bar{T}_1 - t} - \frac{\nu(t, \bar{T}_2)}{\bar{T}_2 - t} \right) < 0 \quad (21)$$

となることにより示される。(20) 式については, (2) 式より割引債の収益率の標準偏差はフォワード金利の拡散係数の和であり, しかも, その拡散係数が (14) 式のような, 受渡し時点までの期間  $T - t$  に

関して指数的に減衰する構造を持っていることから，フォワード金利の拡散係数の平均が  $T$  の減少関数になるのは明らかである。よって，マネー・マーケット・アカウントに対する投資ウェイトを  $w_3$  とおけば，最適な債券ポートフォリオは

$$\begin{bmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \\ w_3^*(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{\theta(\bar{T}_2-t)}{\Delta_1} \\ -\frac{\theta(\bar{T}_1-t)}{\Delta_1} \\ 1 + \frac{\theta(\bar{T}_1-\bar{T}_2)}{\Delta_1} \end{bmatrix} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} \frac{\nu(t, T^0)(\bar{T}_2-t)}{\Delta_1} \\ -\frac{\nu(t, T^0)(\bar{T}_1-t)}{\Delta_1} \\ 1 + \frac{\nu(t, T^0)(\bar{T}_1-\bar{T}_2)}{\Delta_1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} -\nu(t, \bar{T}_2)(\bar{T} - t) \\ \nu(t, \bar{T}_1)(\bar{T} - t) \\ -(\nu(t, \bar{T}_1) - \nu(t, \bar{T}_2))(\bar{T} - t) \end{bmatrix}$$

となり， $\theta$  の変化の最適ポートフォリオに対する効果は平均・分散ポートフォリオに限られ，(21) 式より

$$\frac{\partial w_1^*(t)}{\partial \theta} < 0, \quad \frac{\partial w_2^*(t)}{\partial \theta} > 0, \quad \frac{\partial w_3^*(t)}{\partial \theta} < 0 \quad (22)$$

である。ここでは，個別投資家の主体的均衡 (subjective equilibrium) について分析していることになる。(22) 式は，将来において利回り曲線の形状がどう変化するかという予測に基づく債券運用戦略であるイールドカーブ戦略の中のうち，ブレット (bullet) 型とよばれる取引戦略に近づけていくことに対応していると解釈できる。このうち，割引債のウェイトに関する符号は国際貿易における Rybczynski の定理の類推から説明可能である。ここでの「生産要素」はリスクと残存期間である。(19) 式の右辺ベクトルは，第 1 要素が投資家が債券ポートフォリオでとることが望ましいリスクの量を表し，第 2 要素が債券ポートフォリオのデュレーションになっている。ここで， $\theta$  の増加は (17) 式のように収益率の標準偏差が不変の下では割引債のベータを増やし，それによって，投資家はポートフォリオ全体でリスクをより取ろうとすることとなる。他方，デュレーションの方は固定されているから，Rybczynski の定理によればこのような場合，リスク「集約的」な割引債のウェイトを増やし，リスク集約的でない割引債のウェイトを減らすことになる。リスク集約度は，いま，リスク・残存期間比率  $\nu(t, T)/(T - t)$  で測られ，(20) 式はまさに残存期間の短い割引債ほどリスク集約的であることを示している。ゆえに，より残存期間の短い  $\bar{T}_2$ -割引債の最適ウェイトは  $\theta$  について増加関数であり，残存期間の長い  $\bar{T}_1$ -割引債の最適ウェイトは  $\theta$  の減少関数になるのである。さらに，(22) 式のマネー・マーケット・アカウントのウェイトの変化の方向から， $\bar{T}_2$ -割引債のウェイトの増加分が  $\bar{T}_1$ -割引債のウェイトの減少分を必ず上回ることが分かる。

ところで， $\theta$  の変化のフォワード曲線の形状に及ぼす影響を調べてみると，(2) 式と (14) 式より  $\theta$  の増加は将来のフォワード金利の分散を変化させることなく，期待値を減少させる。しかも，その減少幅はフォワード金利の拡散係数の構造を反映して，受渡し時点までの期間  $T - t$  に関して減少関数となる。これは，利回り曲線のシフトのタイプでいうと，downward parallel shift と steepening twist の組合せと解釈できる。Jones (1991) によれば，実際の利回り曲線の形状の変化として downward parallel shift と steepening twist との間にはプラスの相関が見出だされており，シフトの方向として現実的であるといえる。将来の利回り曲線が下方にシフトするのは， $\theta$  の増加は，収益率の分散が不変の下では将来の割引債価格の上昇を意味するためである。

結局，上の議論から，金利リスクの市場価格が定数で表されるが，その大きさの異なる経済を比較した場合について，次のような結果が得られることになる。

**Proposition 1.**

現在の利回り曲線が同一で，ともに，フォワード金利の拡散係数が (14) 式のように指数的に減衰する構

造を持つ2つの経済を比べたとき、将来のフォワード曲線がより *downward parallel shift* すると同時に *steepening twist* すると予想される経済においては、債券ポートフォリオのデュレーションの制約下にある投資家は中期債に対するウェイトを高め、長期債と短期債に対するウェイトを低めることになる。

この結果は、将来の利回り曲線の傾きが急になると予想されるならばブレット型の債券運用戦略をとるのが望ましい、という実務におけるイールドカーブ戦略と整合的であるといえる。

### 3.2 Hull and White(1994)による2-ファクター・モデル

次に、フィルター付き確率空間があらためて  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  で与えられ、金利の期間構造モデルとして、その上の次のような Hull and White (1994) による非斉時的 (time-inhomogeneous) な「拡張された2-ファクター Vasicek モデル」を考える。

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\psi^P(t) + u(t) - ar(t))dt + \sigma_1 dW_1^P(t) \\ du(t) &= -bu(t)dt + \sigma_2 dW_2^P(t) \\ dW_1^P(t)dW_2^P(t) &= \rho dt \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $a, b, \sigma_1, \sigma_2$  はプラスの定数、 $\rho$  は定数である。また、 $\psi^P(t)$  は deterministic で、 $\psi^P(t) > 0$  を満たすとする。 $u(0)$  は一般性を失うことなくゼロとおける。さらに、短期金利  $r$  についてのリスクの市場価格と  $u$  についてのリスクの市場価格をそれぞれプラスの定数である  $\theta_1, \theta_2$  とおけば、 $P$ -ウィナー過程  $\mathbf{W}^P = \begin{bmatrix} W_1^P & W_2^P \end{bmatrix}$  と  $Q$ -ウィナー過程  $\mathbf{W}^Q = \begin{bmatrix} W_1^Q & W_2^Q \end{bmatrix}$  との関係は

$$\begin{aligned} d\mathbf{W}^Q(t) &= d\mathbf{W}^P(t) - \boldsymbol{\theta} dt, \\ \text{where } d\mathbf{W}^P(t) &\triangleq \begin{bmatrix} dW_1^P(t) \\ dW_2^P(t) \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{W}^Q(t) \triangleq \begin{bmatrix} dW_1^Q(t) \\ dW_2^Q(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

と表される。時点  $t$  におけるマネー・マーケット・アカウントの価値を  $B(t)$  とおけば、 $B(t) = \exp\left(\int_0^t r(v)dv\right)$  で状態価格デフレーターは  $\eta(t)/B(t)$  となる。ここで、

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta_2(t) \triangleq \exp\left(\int_0^t \boldsymbol{\theta}^\top d\mathbf{W}^P(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \boldsymbol{\theta}^\top \Sigma \boldsymbol{\theta} ds\right), \\ \text{where } \Sigma dt &= d\mathbf{W}^P(t)^\top d\mathbf{W}^P(t) = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} dt \\ \Rightarrow d\eta_2(t) &= \eta_2(t) \boldsymbol{\theta}^\top d\mathbf{W}^P(t), \quad \eta_2(0) = 1 \end{aligned} \quad (25)$$

であり、 $^\top$  は行列の転置を表すものと約束する。

運用手段として3.1節同様、マネー・マーケット・アカウント、 $\bar{T}_1$ -割引債と  $\bar{T}_2$ -割引債の3資産を考える ( $\bar{T}_1 > \bar{T}_2$ )。ただし、3.1節と違って、ここでは債券ポートフォリオのデュレーションに制約を課さ

ない。すると，割引債価格は

$$P(t, T) = \exp(A(t, T) - B(t, T)r(t) - C(t, T)u(t)), \quad \text{where} \quad (26)$$

$$B(t, T) \triangleq \frac{1 - \exp(-a(T - t))}{a}$$

$$C(t, T) \triangleq \frac{1}{a - b} \left( \frac{\exp(-a(T - t))}{a} - \frac{\exp(-b(T - t))}{b} \right) + \frac{1}{ab}$$

となる。\$A(t, T)\$ は時点 \$t\$ と \$T\$ のみの deterministic な関数である。\$T > t\$ の範囲で \$B\$ と \$C\$ の符号を調べると，両者とも厳密にプラスであることが分かる。そして，そのプロセスは

$$dP(t, T) = P(t, T)(\mu(r(t), t, T)dt - \nu_1(t, T)dW_1^P(t) - \nu_2(t, T)dW_2^P(t)), \quad \text{where} \quad (27)$$

$$\mu(r(t), t, T) \triangleq r(t) + \theta_1\nu_1(t, T) + \theta_2\nu_2(t, T)$$

$$\nu_1(t, T) \triangleq \sigma_1 B(t, T) = \frac{1 - \exp(-a(T - t))}{a} \sigma_1$$

$$\nu_2(t, T) \triangleq \sigma_2 C(t, T) = \left( \frac{1}{a - b} \left( \frac{\exp(-a(T - t))}{a} - \frac{\exp(-b(T - t))}{b} \right) + \frac{1}{ab} \right) \sigma_2$$

となる。

\$\bar{T}\_1 > \bar{T}\_2 > t\$ のとき， \$\begin{bmatrix} \nu\_1(t, \bar{T}\_1) & \nu\_2(t, \bar{T}\_1) \\ \nu\_1(t, \bar{T}\_2) & \nu\_2(t, \bar{T}\_2) \end{bmatrix}\$ の逆行列が存在することは， \$\nu\_2(t, T)/\nu\_1(t, T)\$ が \$T > t\$ において \$T\$ に関する増加関数となることで示される。なぜならば，

$$\frac{\nu_2(t, \bar{T}_1)}{\nu_1(t, \bar{T}_1)} > \frac{\nu_2(t, \bar{T}_2)}{\nu_1(t, \bar{T}_2)} \Rightarrow \Delta_2 \triangleq \begin{vmatrix} \nu_1(t, \bar{T}_1) & \nu_2(t, \bar{T}_1) \\ \nu_1(t, \bar{T}_2) & \nu_2(t, \bar{T}_2) \end{vmatrix} < 0 \quad (28)$$

が成り立つからである。この逆行列の存在は，2つの満期の異なる割引債にマネー・マーケット・アカウントを組合せることで不確実性の源泉であるウィナー過程を複製できることを意味する。かくて，運用手段としてこれら3資産を考えた場合に完備市場になっているといえる。

そこで，2.2節と同様にして投資家の最適化問題を解けば，

$$V^*(t) = \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{\eta_2(t)}{B(t)} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} P(t, T^0)^{1-\frac{1}{\gamma}} H(t, T^0) \quad (29)$$

となる。ここで，\$\lambda\$ はラグランジュ乗数であり，\$H(t, T)\$ は時点 \$t\$ と \$T\$ のみの deterministic な関数である。\$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w\_1 & w\_2 \end{bmatrix}^\top\$ を \$\bar{T}\_1\$-, \$\bar{T}\_2\$-割引債への投資ウェイトとすれば，(25)式，(27)式，(29)式より最適投資ウェイト \$\mathbf{w}^\*\$ は

$$\begin{bmatrix} \nu_1(t, \bar{T}_1) & \nu_1(t, \bar{T}_2) \\ \nu_2(t, \bar{T}_1) & \nu_2(t, \bar{T}_2) \end{bmatrix} \mathbf{w}^*(t) = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\theta} + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \begin{bmatrix} \nu_1(t, T^0) \\ \nu_2(t, T^0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

を満たすことになる。マネー・マーケット・アカウントへの投資ウェイトを \$w\_3\$ とおけば，\$w\_3 = 1 - (w\_1 + w\_2)\$

だから，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \\ w_3^*(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{\theta_1 \nu_2(t, \bar{T}_2) - \theta_2 \nu_1(t, \bar{T}_2)}{\Delta_2} \\ \frac{\theta_2 \nu_1(t, \bar{T}_1) - \theta_1 \nu_2(t, \bar{T}_1)}{\Delta_2} \\ 1 + \frac{\theta_1 (\nu_2(t, \bar{T}_1) - \nu_2(t, \bar{T}_2)) - \theta_2 (\nu_1(t, \bar{T}_1) - \nu_1(t, \bar{T}_2))}{\Delta_2} \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} \frac{\nu_1(t, T^0) \nu_2(t, \bar{T}_2) - \nu_2(t, T^0) \nu_1(t, \bar{T}_2)}{\Delta_2} \\ \frac{\nu_1(t, \bar{T}_1) \nu_2(t, T^0) - \nu_2(t, \bar{T}_1) \nu_1(t, T^0)}{\Delta_2} \\ 1 + \frac{\nu_1(t, T^0) (\nu_2(t, \bar{T}_1) - \nu_2(t, \bar{T}_2)) - \nu_2(t, T^0) (\nu_1(t, \bar{T}_1) - \nu_1(t, \bar{T}_2))}{\Delta_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

となる。なお，同様の結果が文脈の異なる Brennan and Xia (1998) でも得られている。

3.1 節同様，現在の利回り曲線が一致するが，外生的に与えられているリスクの市場価格  $\theta_1, \theta_2$  の異なる経済を考えて，その違いが利回り曲線の形状の変化とどう結びついているのかをみる。同時に，それらの大きさに応じて投資家は最適ポートフォリオをどう組替えるかについて，(31) 式を使って分析する。利回り曲線の形状の変化との関係は，(23) 式と (26) 式より，フォワード金利のプロセスは  $P$ -ウィナー過程  $W^P$  を使って表現すると，

$$\begin{aligned} df(t, T) &= (\sigma_1^2 B(t, T) B_T(t, T) + \sigma_2^2 C(t, T) C_T(t, T) + \rho \sigma_1 \sigma_2 (B_T(t, T) C(t, T) \\ &\quad + B(t, T) C_T(t, T)) - \sigma_1 \theta_1 B_T(t, T) - \sigma_2 \theta_2 C_T(t, T)) dt \\ &\quad + \sigma_1 B_T(t, T) dW_1^P(t) + \sigma_2 C_T(t, T) dW_2^P(t) \end{aligned}$$

となって  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の大きさはともにドリフトに影響を及ぼすことが分かる。さらに，その影響のしかたは

$$\begin{aligned} B_T(t, T) &= \exp(-a(T-t)) > 0, \\ B_{TT}(t, T) &= -a \exp(-a(T-t)) < 0, \\ C_T(t, T) &= \frac{-\exp(-a(T-t)) + \exp(-b(T-t))}{a-b} > 0, \\ C_{TT}(t, T) &= \frac{a \exp(-a(T-t)) - b \exp(-b(T-t))}{a-b} \stackrel{\geq 0}{\leq} 0 \Rightarrow T \stackrel{\leq}{\geq} t + \frac{\log a - \log b}{a-b} \end{aligned}$$

だから， $\theta_1$  の増加は，利回り曲線のシフトのタイプでいうと，downward parallel shift と steepening twist の組合せ， $\theta_2$  の増加は downward parallel shift と positive butterfly shift の組合せと解釈することができる。このうち， $\theta_1$  の変化に基づく利回り曲線のシフトは 3.1 節における  $\theta$  の変化の場合と同じような動きになっている。

ひるがえって，(31) 式は最適ポートフォリオが  $\theta_1$  や  $\theta_2$  といった個々のリスクの市場価格の大きさに依存していることを示している。もっとも，ヘッジ・ポートフォリオのウェイトについてはリスクの市場価格から独立であり，効いているのはもっぱら平均・分散ポートフォリオのみである。符号を調べると，(27) 式と (28) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^*(t)}{\partial \theta_1} &< 0, & \frac{\partial w_2^*(t)}{\partial \theta_1} &> 0, & \frac{\partial w_3^*(t)}{\partial \theta_1} &< 0 \\ \frac{\partial w_1^*(t)}{\partial \theta_2} &> 0, & \frac{\partial w_2^*(t)}{\partial \theta_2} &< 0, & \frac{\partial w_3^*(t)}{\partial \theta_2} &> 0 \end{aligned} \quad (32)$$

になる。割引債に対する最適ウェイトの符号については、やはり 3.1 節同様、Rybczynski の定理を用いて (30) 式から説明できる。ただし、いまのモデルの場合、生産要素は各ウィナー過程が表すリスクとなる。そして、要素集約度は  $\nu_1(t, T)/\nu_2(t, T)$  で測られ、それは  $T$  について減少関数になっている。

(22) 式と (32) 式を比べれば、最適な投資ウェイトの変化に関しても、 $\theta_1$  の増加による変化と 3.1 節における  $\theta$  の増加による変化は同じ方向であることが分かる。つまり、ここでの、金利の期間構造が 2-ファクター・モデルで表される設定においても、将来の利回り曲線の傾きが急になると予想されるならばプレット型の債券運用戦略をとるのが望ましいという、実務におけるイールドカーブ戦略を支持するようなメカニズムの存在することが理解される。あわせて、 $\theta_2$  の増加による効果をまとめると、将来のフォワード金利曲線をより downward parallel shift させると同時に、positive butterfly shift させる。そのとき、最適ポートフォリオに対しては長期債と短期債のウェイトを高め、中期債のそれを低めることになる。この変化はイールドカーブ戦略のうち、バーベル (barbell) 型とよばれる取引戦略に近づけていくことに対応していると解釈できるが、ここではまずフォワード金利曲線が下方にシフトするため、割引債の少なくとも 1 つはウェイトを高めることになる。それは、別の言い方をすれば、 $\theta_2$  の増加によってウィナー過程  $W_2$  が表すリスクを、投資家はより取るということである。次に、割引債の間の振り分けについては、 $\theta_1$  が変わらないのでウィナー過程  $W_1$  が表すリスクの量も不変である。よって、2 つの要請を満たすには、一方の割引債のウェイトを高めもう一方のウェイトは低めることになる。残るは、2 つの割引債のどちらのウェイトを高めることになるのか、ということである。この問題については、先に指摘したように  $W_2$  で表されるリスクが集約的な  $\bar{T}_1$ -割引債のウェイトを高め、 $W_1$  で表されるリスクが集約的な  $\bar{T}_2$ -割引債のウェイトを低めることとなる。逆に、仮に、ウィナー過程  $W_2$  が表すリスクをより取るようにして長期債のウェイトを低め中期債のウェイトを高めると、必ず  $W_1$  が表すリスクの取る量は投資家にとって過大になる。

### 3.3 数値解法

1-ファクター・モデルに戻って、3.1 節の設定のように解析的に最適な債券ポートフォリオを完全に求めることはできないが、2 つの状態変数によって表現されるような金利の期間構造モデルを考える。そして、数値解法を使って金利リスクの市場価格に関わるパラメータの変化がもたらす利回り曲線の形状の変化と最適ポートフォリオの変化を分析する。そのことを通じて命題 1. の結果がどの程度、広いクラスのモデルで成り立つかを調べる。というのは、

- (i) (15) 式のように金利リスクの市場価格が一定の下では MPR ヘッジ需要はゼロになる。
- (ii) しかも、そのリスクの市場価格の大きさが最適なポートフォリオに与える効果は、構造上、平均・分散ポートフォリオのみで、IR ヘッジ需要の大きさには何ら影響を及ぼさない。

という 2 つの点でかなり限定された状況の分析に 3.1 節はとどまっているからである。

ここでは、次のような追加的な仮定をおくことにする。すなわち、非負の定数  $\kappa, \sigma, \theta, \beta_\sigma, \beta_\theta$  で

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \kappa & (33) \\ \sigma^r(r(t), t) &= \sigma r(t)^{\beta_\sigma} \\ \theta(r(t), t) &= \theta r(t)^{\beta_\theta}\end{aligned}$$

が成り立つとするのである。このとき，(10) 式と (11) 式より状態変数  $r$  と  $\phi$  のドリフトや割引債の収益率の拡散係数が求まる。すると，マリアヴァン微分  $(D_t r(s), D_t \phi(s))(s \geq t)$  のプロセスは

$$d_s \begin{bmatrix} D_t r(s) \\ D_t \phi(s) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} -(\kappa + (\beta_\sigma + \beta_\theta)\sigma\theta r(s)^{\beta_\sigma + \beta_\theta - 1}) & 1 \\ 2\beta_\sigma \sigma^2 r(s)^{2\beta_\sigma - 1} & -2\kappa \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \beta_\sigma \sigma r(s)^{\beta_\sigma - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} dW(s) \right) \begin{bmatrix} D_t r(s) \\ D_t \phi(s) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} D_t r(t) \\ D_t \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma r(t)^{\beta_\sigma} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となってマルコフ過程に従うことが分かる。また，

$$D_t \theta(r(s), s) = \beta_\theta \theta r(s)^{\beta_\theta - 1} (D_t r(s))$$

という関係が成り立っている。これらを使って (12) 式に含まれる確率過程が満たす確率微分方程式を求め，それらを離散化した上で漸近展開やモンテカルロ法を組合せて数値的な評価を行なった。

投資家の運用手段としては，3.1 節同様， $\bar{T}_1$ -割引債， $\bar{T}_2$ -割引債，マネー・マーケット・アカウントの3資産を考え，さらに，投資家の選択できる債券ポートフォリオはデュレーションが  $\bar{T} - t$  のものに限られているとする。このような設定の下では，(12) 式の右边を一般に  $\nu_{V^*}(t, T)$  とおくと，最適な投資ウェイトは

$$\begin{bmatrix} \nu(t, \bar{T}_1) & \nu(t, \bar{T}_2) \\ \bar{T}_1 - t & \bar{T}_2 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{V^*}(t, T^0) \\ \bar{T} - t \end{bmatrix}$$

になる。

ところで，(9) 式と (33) 式よりフォワード金利の拡散係数は  $\sigma(t, T) = \sigma r(t)^{\beta_\sigma} \exp(-\kappa(T - t))$  となり，(14) 式と同じく受渡し時点までの残存期間  $T - t$  について指数的に減衰する減少関数になる。したがって， $\bar{T}_1 > \bar{T}_2 > t$  として 3.1 節における直観的な説明から，あるいは，実際に簡単な計算から，投資家がポートフォリオ全体で取るリスク  $\nu_{V^*}(t, T)$  が  $\theta$  について増加関数ならば，最適な投資ウェイトの  $\theta$  に関する偏微係数の符号が (22) 式のようになることは確認される。一方，(2) 式より  $\theta$  が大きくなると利回り曲線の形状は，より downward parallel shift しながら steepening twist することになる。

図 1 と図 2 はモンテカルロ法を使った結果を示している。シミュレーションの試行回数を  $10^6$  回とし，1/365 年の間隔で離散化を行なった。パラメータの選択は Chan, Karolyi, Longstaff, and Sanders (1992) や Pearson and Sun (1994) などを参照し，2 つのケースについて，(12) 式の右边の中の，平均・分散ポートフォリオ (図表中，MV)，IR ヘッジ需要 (同，IRH)，MPR ヘッジ需要 (同，MPRH) と全需要 (同，TD) に対応する部分ごとに分析した。その結果，金利リスクの市場価格の定数  $\theta$  に関して，平均・分散ポートフォリオの部分は増加関数となる。このことは，割引債の収益率の標準偏差 1 単位当たりのリスク・プレミアムが増えるということで容易に理解できる。平均・分散ポートフォリオは解析的に解くことができるので，数値解法に拠らず求められる。というわけで，採用した数値解法が効いているのはヘッジ・ポートフォリオの部分なのである。そのヘッジ需要については，IR ヘッジ需要は減少関数，MPR ヘッジ需要は増加関数となる結果が得られる。これは  $\theta$  が増加すると (10) 式より短期金

利  $r$  の平均水準への調整速度が上昇するため、短期金利の変動に対するヘッジ需要である IR ヘッジ需要は減少すると考えられるからである。その一方で、 $\theta$  の増加それ自体は、割引債のリスク・プレミアムの時間を通じた変動を増幅させることになる。この効果が、短期金利の平均回帰の度合いが強まることによるリスク・プレミアムの安定化効果を上回って、MPR ヘッジ需要の方は増加すると考えられる。このように、 $\theta$  の変化はヘッジ需要の中で互いに打ち消し合うような効果をもたらすのに対して、平均・分散ポートフォリオの部分にはリスク・プレミアムの大きさという直接的な形で効いてくるのである。そのため、需要全体としては結局、平均・分散ポートフォリオの動きが決めることになる。つまり、 $\nu_{V^*}(t, T)$  は  $\theta$  の増加関数となるのである。同様の定性的な結果は、漸近展開とよばれる解析的な、それゆえ、計算負荷の小さな手法を用いた場合にも得られることが、図 1 と図 2 で同時に明らかになっている。漸近展開については Kunitomo and Takahashi (2001), Takahashi (1999), Takahashi and Yoshida (2001b) 等を参照せよ。さらに、モンテカルロ法単独ではシミュレーションの精度が悪い場合に、漸近展開とモンテカルロ法を組合せることで、精度の大幅な改善をはかることができる (Takahashi and Yoshida (2001a))。そのことを、たとえば、ケース 2 の MPR ヘッジ需要に対応する部分についてシミュレーション回数と精度の関係で示したのが図 3 である。

以上から、総じてかなり広い金利の期間構造モデルのクラスで、最適なポートフォリオのウェイトの符号と将来の利回り曲線の形状の変化について、命題 1. と整合的な結果になると言える。逆に、3.1 節の Hull and White (1990) による拡張された Vasicek モデルで記述される金利の期間構造モデルの下で得られた命題 1. は、第 1 次近似として有効であると評価できる。

## 4 結論

本論文では、動学的最適化問題の枠組の中で最適な債券ポートフォリオを取り扱った。分析を簡単化するために債務を捨象し運用手段を債券に限定した上で、投資家の最適化行動を前提として、金利の期間構造モデルと最適な債券ポートフォリオとの関係に焦点を当てて分析を行なった。金利の期間構造モデルとして 1-ファクター Heath-Jarrow-Morton モデルから出発して、主に Ritchken and Sankarasubramanian (1995) で得られている構造の下で、解析的に、あるいは、漸近展開やモンテカルロ法を組合せて数値的に最適なポートフォリオを求めた。最適な債券ポートフォリオの性質を調べ将来の利回り曲線の形状の変化と結びつけて、比較的広い金利の期間構造のクラスで、将来の利回り曲線が急になると予想されるならば、イールドカーブ戦略の中でプレット型とよばれる債券運用戦略をとることが望ましいという実務におけるアドバイスと整合的な結果が得られることを示した。

## 参考文献

- Brennan, M. J., E. Schwartz, and R. Lagnado, 1997, "Strategic Asset Allocation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1377–1403.
- Brennan, M. J., and Y. Xia, 1998, "Resolution of a Financial Puzzle," Working Paper, UCLA.
- Campbell, J. Y., and L. M. Viceira, 1999, "Who Should Buy Long-Term Bonds?," forthcoming in *American Economic Review*.

- Canner, N., N. G. Mankiw, and D. N. Weil, 1997, "An Asset Allocation Puzzle," *American Economic Review*, 87, 181–191.
- Chan, K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, and A. B. Sanders, 1992, "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate," *Journal of Finance*, 47, 1209–1227.
- Cox, J. C., and C.-F. Huang, 1989, "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process," *Journal of Economic Theory*, 49, 33–83.
- Detemple, J., R. Garcia, and M. Rindisbacher, 2000, "A Monte-Carlo Method for Optimal Portfolios," Working Paper.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1992, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 77–105.
- Hull, J., and A. White, 1990, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 573–592.
- , 1994, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 37–48.
- Jones, F. J., 1991, "Yield Curve Strategies," *Journal of Fixed Income*, 1, 43–51.
- Karatzas, I., J. P. Lehoczky, and S. E. Shreve, 1987, "Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a "Small Investor" on a Finite Horizon," *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25, 1557–1586.
- Kunitomo, N., and A. Takahashi, 2001, "The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rate Contingent Claims Analysis," *Mathematical Finance*, 11, 117–151.
- Liu, J., 1999, "Portfolio Selection in Stochastic Environments," Unpublished.
- Merton, R. C., 1971, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, 3, 373–413.
- Musiela, M., and M. Rutkowski, 1997, *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag.
- Ocone, D. L., and I. Karatzas, 1991, "A Generalized Clark Representation Formula, with Application to Optimal Portfolios," *Stochastics and Stochastics Reports*, 34, 187–220.
- Pearson, N. D., and T.-S. Sun, 1994, "Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance*, 49, 1279–1304.
- Ritchken, P., and L. Sankarasubramanian, 1995, "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure," *Mathematical Finance*, 5, 55–72.

- Sørensen, C., 1999, “Dynamic Asset Allocation and Fixed Income Management,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, 513–531.
- Takahashi, A., 1999, “An Asymptotic Expansion Approach to Pricing Financial Contingent Claims,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 115–151.
- Takahashi, A., and N. Yoshida, 2001a, “Asymptotic Expansion Approach with Monte Carlo simulation,” in Preparation.
- , 2001b, “Asymptotic Expansion Scheme for the Optimal Portfolio for Investment,” Submitted.
- Wachter, J. A., 1999, “Risk Aversion and Allocation to Long-Term Bonds,” Unpublished.

パラメータ

投資家の相対的リスク回避度	2
投資家の投資ホライズン	5年
initial forward curve	$f(0, t) = 8.08\%$
$\beta_\sigma$	0.5
$\beta_\theta$	0.5
$\kappa$	0.2339
$\sigma$	0.08544

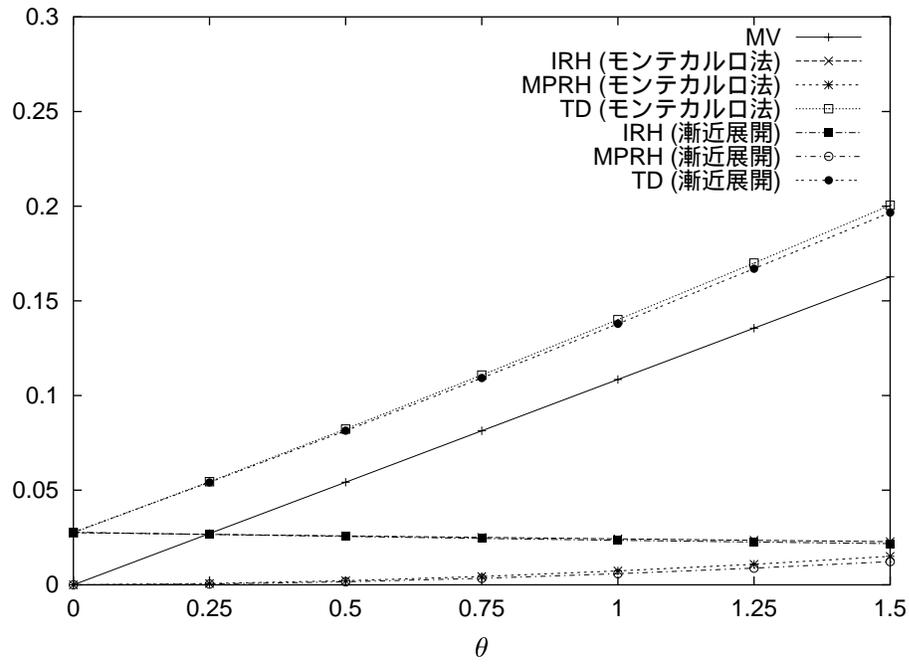


図 1: ケース 1

パラメータ

投資家の相対的リスク回避度	2
投資家の投資ホライズン	5年
initial forward curve	$f(0, t) = 5.89\%$
$\beta_\sigma$	0.5
$\beta_\theta$	0.5
$\kappa$	1.1407
$\sigma$	0.10992

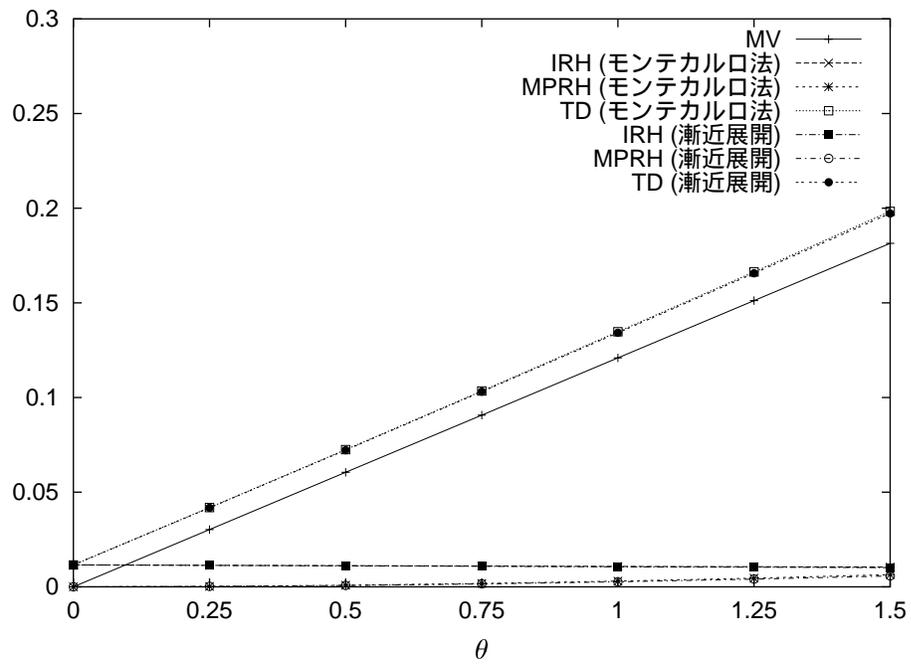


図 2: ケース 2

パラメータ

投資家の相対的リスク回避度	2
投資家の投資ホライズン	5年
initial forward curve	$f(0, t) = 5.89\%$
$\beta_\sigma$	0.5
$\beta_\theta$	0.5
$\kappa$	1.1407
$\theta$	1.0815
$\sigma$	0.10992

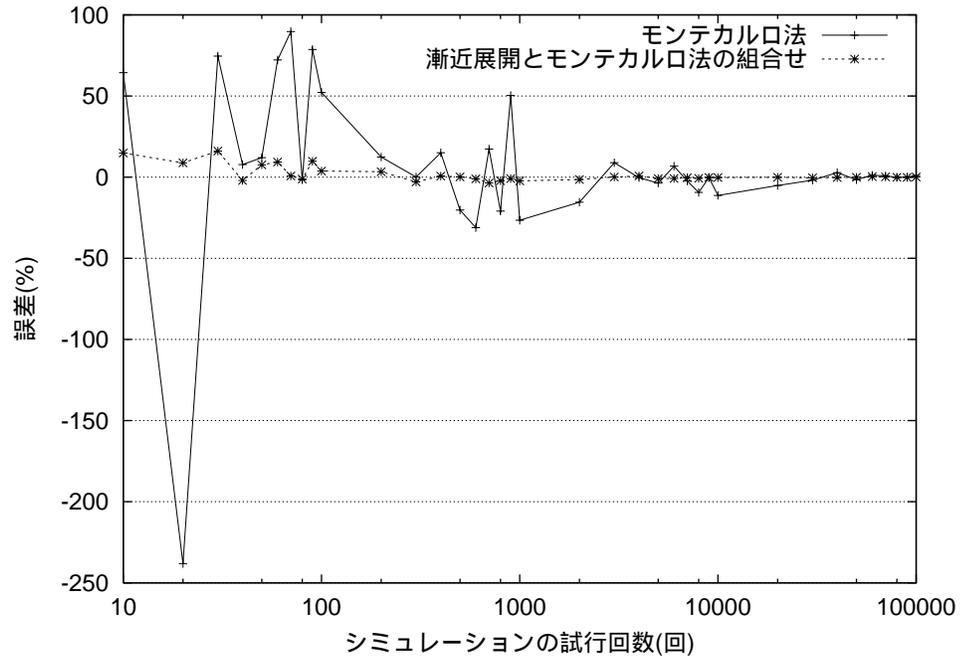


図 3: シミュレーションの精度