CIRJE-J-100

信用リスク・モデル化のアプローチ

東京大学大学院経済学研究科
小林 孝雄

2003 年 11 月

信用リスク・モデル化のアプローチ

Credit Risk Modeling Approaches

2003 年 11 月 17 日

小林　孝雄

東京大学大学院経済学研究科

Abstract

This article originates from a speech given by the author in the seminar organized by the Security Analysts Association of Japan (SAAJ) on September fifth of 2003 to commemorate the founding of the Certified International Investment Analyst (CIIA) qualification. In the first half, I give a fairly comprehensive, non-quantitative summary of the recent developments of credit risk modeling approaches and techniques. In the latter half, I illustrate a new convertible-bond (CB) pricing model that we developed using the reduced-form approach to handle the credit-risk component embedded in convertible bonds. I also present some results of applying our model and, for comparison, a structural model, to Japanese CB markets.

要約

この論文は、2003 年 9 月 5 日に行われた日本証券アナリスト協会主催の「国際アナリスト資格制度記念セミナー」で筆者が行った講演をベースに、加筆訂正したものである。前半では、信用リスク・モデル化のアプローチ、ならびに信用リスク・プライシング手法の最近の発達を概観する。後半では、筆者の研究グループの手による信用リスク・プライシングに重点をおいた転換社債の評価モデルと、日本の転換社債市場への応用結果を紹介する。

はじめに

このセミナーはCIIA®試験制度を記念するものである。セミナーのテーマに信用リスクプレミアムが選択されたことには、次のような理由がある。第2セッションの講師であるダレル・ダフィー教授も、私も、この制度の国際専門家委員会のメンバーを務めている。かねてより、ダフィー教授は、信用リスクに関連するテーマのカバレッジを高める必要があるという意見を、試験制度専門家委員会で述べてこられている。一方、私にとっても、信用リスクのモデリングは最近の研究テーマの一つである。特に、信用リスク・プライシングに重点を置いた転換社債の評価モデルを提唱し、それを日本の転換社債の分析に応用した論文を Journal of Fixed Income という専門誌に発表している。そうした背景で、信用リスクプレミアムを今日の CIIA 記念セミナーのテーマに取り上げることになったわけである。

第1セッションの前半では、信用リスク・モデル化のアプローチを歴史的・体系的に解説する。それぞれのアプローチについては、その背景にある現代ファイナンス理論の考え方との関連付けに重点をおく。後半では、信用リスク・プライシングに重点をおいた転換社債の評価モデルと、それを日本の転換社債市場に応用した結果を紹介する。

1. バランスシート・アプローチ

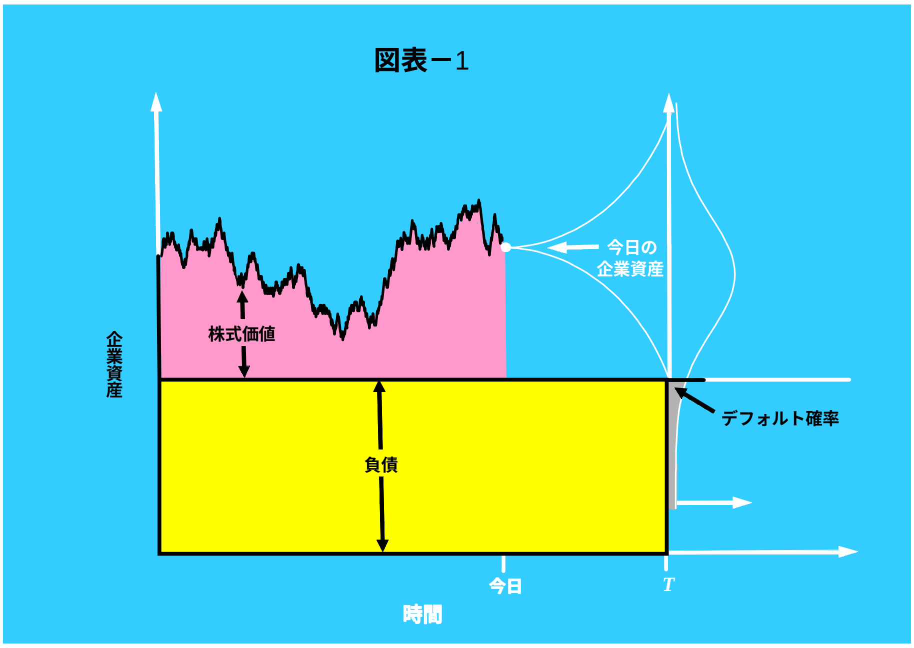
(1) バランスシート・アプローチの考え方

信用リスクのモデル化には、大別して「バランスシート・アプローチ」と「誘導型アプローチ」がある。

バランスシート・アプローチは、別名「構造型アプローチ（Structural Approach）」と呼ばれる。バランスシート・アプローチの考え方を最初に発表したのはロバート・マートンで、ブラック＝ショールズのオプション評価モデルが発表された直後の 1974 年に、オプション評価理論を用いて社債を評価する方法を提唱した（参考文献 Merton [1974]）。その後、1980 年代後半に、米国サンフランシスコに拠点を置く KMV コーポレーション（現在の Moody's KMV）が、マートンのアプローチを適用して企業の倒産確率を予測するサービスを始め、実務上大きな成功を収めている。

マートンのアプローチを図表―1 に即して説明する。ぎざぎざの折れ線は、時間とともも

に変動する企業資産の価値（企業価値）を表している。横軸上の点Tは、企業が発行した社債の償還日を示している。点Tより手前（左側）に今日の時点が示されている。企業価値がある水準（ここでは負債額）以下に低下すると、デフォルトが起きる。オプション用語を用いると、企業価値が負債の額を下回ると、株主の立場からいえばアウト・オブ・ザ・マネーの状態になる。企業価値が負債の額を上回ればイン・ザ・マネーである。このように、株式を、企業資産を原資産とするコール・オプションに見立てることができ、社債の価値は、企業資産と株式（すなわちコール・オプション）の価値の差になる。そこで、ブラック＝ショールズのオプション評価公式を使って、株式と負債の価値を求めようというのが、マートンの着想である（Merton [1974]）。



バランスシート・アプローチは、デフォルト・イベントの発生をモデル化するという発想に立っており、その際、企業の支払い能力をバランスシートの状態から定義する。直観的に表現すると、企業資産が負債との関係である水準以下に減価するとデフォルトが起きる、と考えるわけである。

(2) バランスシート・アプローチの類型

バランスシート・アプローチには、前述のマートン・タイプないしはKMVタイプのモデル（クラシカル・モデルとも呼ばれる）と、ファースト・パッセージ・モデルの２種類

がある。

クラシカル・モデルでは、負債の償還日（図表－1 の時点T）に資産が負債を下回ればその企業はデフォルトすると考える。したがって、デフォルトのタイミングは償還日に限定され、その日にデフォルトが起きるかどうかを問題にする。つまりこのモデルでは、株式をヨーロピアン・コール・オプションと見ていることになる。一方、ファースト・パッセージ・モデルは、企業価値がある下限値まで低下すれば、その日がいつであってもデフォルトが起きると考える。最初に閾値を通過した時点でデフォルトが起きると想定するモデルであるため、「ファースト・パッセージ」という用語が使われる。つまり、この場合は株式をヨーロピアン・オプションではなく、バリアー型（境界型）のオプションに見立てることになる。

企業は複数の負債を発行している場合が多く、現実の複雑な負債構造を正確にモデルに表現して数学的な解を求めるのは不可能に近い。したがって、信用リスクを内包する金融商品のプライシングに関しては、デフォルト時点が固定的なクラシカル・モデルよりも、いつでも企業にデフォルトが起こりうるとするファースト・パッセージ・モデルの方が、より現実的なモデルということができる。後で述べる転換社債の評価では、ファースト・パッセージ・モデルの適用事例も紹介する。

(3) ブラック＝ショールズ＝マートン・モデル

ブラック＝ショールズ＝マートン・モデル（KMV モデル）では、企業が額面D、償還日Tの割引債を 1 本だけ発行しているという単純化を行い、償還日Tに企業価値が社債の額面Dを下回ればデフォルトが起きると考える。したがって、企業価値A_tの時間的経路の確率モデルを定めて、時点Tで企業価値がDを下回る確率を計算すれば、デフォルト確率が求められる。

必要なパラメーターは、企業価値の動きを記述するパラメーターと負債の大きさである。μは企業資産の期待成長率（ドリフト率）、γは企業資産からの現金流出率を表している。株式を原資産とするコール・オプションの場合には、現金の流出率γは株価を分母とする配当利回りを意味するが、今のモデルでは、γは、企業資産を分母とする現金流出率を意味している。σは、企業の資産価値A_tの確率的な動きのボラティリティーである。

以上のパラメーターを使って、現時点tから、後の時点Tまで企業が存続する確率（survival probability）を求めると、(1)式のように与えられる。この存続確率$p(t,T)$は、

今日時点での企業の資産価値をA_tとして、社債の償還時点TでA_TがDを下回らない確率であり、図表—2 の正規分布グラフの斜線部分の面積である。(1)式の$N(\cdot)$は標準正規分布の累積分布関数を表している。

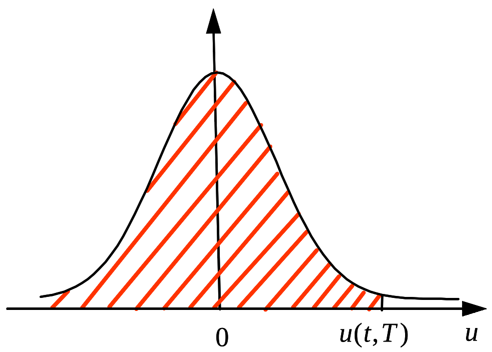
$$p(t,T) = N\left(u(t,T)\right) \tag{1}$$

ただし $u(t,T) = \dfrac{X_t + m(T-t)}{\sqrt{T-t}}$

$$X_t = \frac{\log(A_t/D)}{\sigma}$$

$$m = \left(\mu - \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Big/\sigma$$

図表—2



このモデルにおける最も強い仮定は、企業の資産価値が幾何ブラウン運動に従う、つまり資産価値のボラティリティーσが時間を通じて一定という仮定であるが、これはブラック＝ショールズ・モデルの基本的な仮定である。

X_tは、今日時点における「デフォルトまでの距離」（distance to default）で、第 2 セッションで一方の柱となる概念である。今日時点tにおける企業資産と負債の対数値の差（A_tとDの比率の対数値）をとり、ボラティリティーσで割った値として定義される。対数が登場するのは、σが時間的に一定の場合にA_tが対数正規分布に従うという数学的性質に由来する。

このタイプのモデルでは、償還日Tに負債の返済が可能かどうかによってデフォルトを

定義する。したがって、企業はT以前には決してデフォルトしないことになる。

(4) ファースト・パッセージ・モデル

ファースト・パッセージ・モデルの場合には、閾値D（default boundary）を想定して、時点を問わず企業価値がDをヒットしたタイミングで企業がデフォルトすると考える。

このモデルでも、企業価値A_tの確率モデルとしてはブラック＝ショールズ＝マートン・モデルと同じ幾何ブラウン運動を想定しており、相違点は、Dという境界をヒットすればいつでもその時点でデフォルトがという、デフォルトの定義にある。この定義のもとで、現時点tから後の時点Tまでの間にデフォルトが起きない確率、つまり企業の存続確率を求めると、(2)式のようになる。Dの値が同じ場合、ファースト・パッセージ・モデルの方がクラシカル・モデルよりも企業のデフォルト確率は大きく（存続確率は小さく）なるはずである。この差が(2)式の最後の項に相当する。

$$\begin{aligned} p(t,T) &= \Pr{}_t\{\tau > T \,|\, \tau > t\} \\ &= N\left(\frac{X_t + m(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{-2mX_t} N\left(\frac{-X_t + m(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

フォワード・デフォルト・レート(Forward Default Rate)という概念もここで定義しておこう。フォワード・デフォルト・レート$f(t,T)$は、時点tからみて、将来の時点Tから$T+\Delta$までの微少な時間の間にデフォルトが起きる確率を、単位時間当たりに換算したものであり、(3)式のように定義される。厳密にはΔを0に近づけた極限値が$f(t,T)$で、(3)式の最後の等式が示すように、存続確率$p(t,T)$のTに関する偏微分を用いて定義できる。

$$\begin{aligned} &\Pr{}_t\{\tau < T+\Delta \,|\, \tau \geq T\} \big/ \Delta \\ &= \frac{\left[p(t,T) - p(t,T+\Delta)\right]}{p(t,T)} \Big/ \Delta \\ &\approx -\frac{\partial p(t,T)}{\partial T} \Big/ p(t,T) \equiv f(t,T) \end{aligned} \tag{3}$$

図表―3 に、ファースト・パッセージ・モデルから導かれるフォワード・デフォルト・レートのカーブを示した。なお、以後の図表 3、6、7、9 は Duffie-Singleton[2003]から転載したものである。

図表ー3

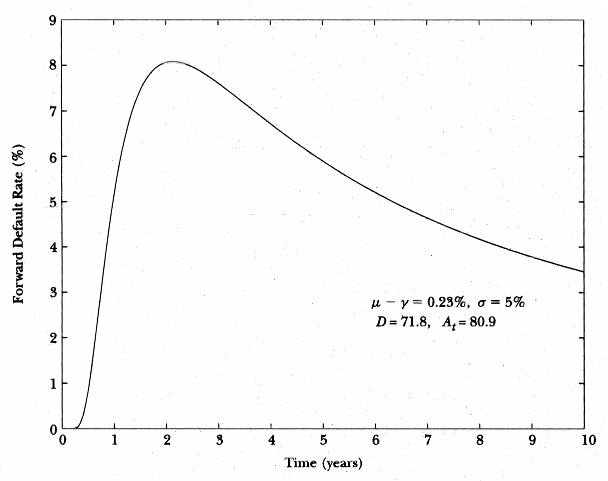


Figure 3.8. *Forward default rate for the classical first-passage model.*

図表―3 のフォワード・デフォルト・レートのカーブをみると、ゼロ年近傍のデフォルト確率が非常に小さいことが分かる。これは、後で説明する誘導型モデルと比較した場合のファースト・パッセージ・モデルの重大な欠点である（クラシカル・モデルの場合には、デフォルトは特定の時点にしか起きない）。これは、企業の資産価値 A_t が幾何ブラウン運動に従うというモデルの前提条件から生じる。幾何ブラウン運動に従う確率過程は時間に関して連続的に変動し、ジャンプがないので、現在の存続企業が微小時間の間に突然倒産する確率はほとんどゼロとなる。

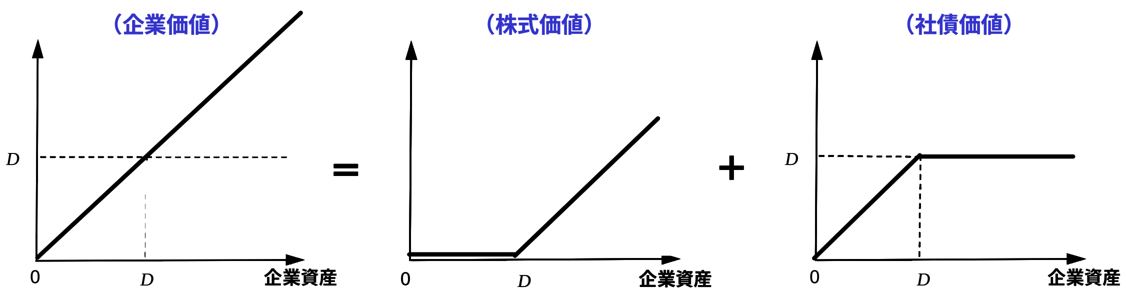
この点の修正については、２つの方向がある。一つは、A_t の確率過程にジャンプの可能性を組み込むという方向で、Zhou [2001]がそうしたアプローチの例である。もう１つは、会計情報の不完全性をモデルの中で考慮することである。公表されたバランス・シートの数値から計算した「デフォルトまでの距離」に過大なノイズが含まれ、健全と思われた企業がある日突然破綻するという事例は、日本の金融機関やエンロン社の例など枚挙に暇がない。Duffie and Lando [2001]は、会計情報の不完全性をモデルに組み込むことによって、ファースト・パッセージ・モデルの上記の欠点を修正する方向を示した。

(5) 構造型アプローチによる割引債の評価

株式と割引債の評価式

図表―4 は、ブラック＝マートン＝ショールズ・タイプのモデルのアプローチを示した図である。横軸は企業の資産価値 A_t を表す。このモデルでは、社債の償還日 T に企業資産が負債額Dを上回っていれば企業は存続し、Dを下回れば倒産すると考えるので、株主と債権者に帰属する価値は、それぞれ図に示すような形になる。

図表―4



株主のペイオフは典型的なコール・オプションのそれであるから、株式価値は、ブラック＝ショールズのコール・オプションの公式をそのまま当てはめて、(4)式で与えられる。式の$N(d_{1t})$は、満期日に企業資産がDを上回る（コール・オプションがイン・ザ・マネーになる）確率をあらわしている。

$$\text{株式価値} = A_t e^{-\gamma(T-t)} N(d_{1t}) - De^{-r(T-t)} N(d_{2t}) \tag{4}$$

ただし、

$$d_{1t} = \frac{\log\left[A_t e^{-\gamma(T-t)} \middle/ De^{-r(T-t)}\right]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_{2t} = d_{1t} - \sigma\sqrt{T-t}$$

社債の価値は、企業価値から株式価値を引いた値になるので、(5)式で与えられる。

$$\text{ゼロ債価格} = A_t - \text{株式価値} \tag{5}$$

客観確率とリスク中立確率

(1)式の $p(t,T)$ と(4)式の $N(d_{1t})$ は、いずれも、社債の償還日 T に企業が存続している確率を表している。実際、(4)式の d_{1t} を変形すると(1)式の $u(t,T)$ になるが、よく見ると(1)式の μ の項が(4)式では r に入れ替わっていることが分かる。μ は企業資産の期待成長率であったが、これは投資家が予想する期待成長率である。企業の倒産確率を予想するにはわれわれ人間の目から見た企業資産の期待成長率を用いる、という当然の原理である。これに対して、(4)式では μ の代わりに r が用いられている。すなわち、企業資産の期待成長率が短期金利に等しいと仮定して企業の倒産確率を計算し、株式や社債の評価を行っているわけである。後者の確率を「リスク中立確率」、後者の考え方を「リスク・ニュートラル・プライシング」という。

前者の客観確率、つまりわれわれ人間の目で見る確率と、リスク中立確率の相違について、簡単に説明しておこう。前者から後者を推定するという着想とその計量的方法が、第2セッションのテーマになるからである。

金融商品の価格を決定する「マーケットの神様」の存在を想定するのが、「リスク・ニュートラル・プライシング」の特徴である。人間はリスク回避的であるが、マーケットの神様は、リスクに対して中立的な選好の持ち主である。言い換えると、個々の金融資産が内包するリスクの大きさにかかわらず、すべての金融資産に同一の期待リターンを求める。あらゆる金融資産ということは、安全資産も含むことになるので、神様が求めるこの期待リターンは、安全利子率（リスクフリー・レート）に等しいということになる。したがって、この「神様」が金融資産の価格を決定する際には、将来のキャッシュフローを安全利子率で割引いた現在価値の期待値を計算して、その値を今日のマーケット・プライスとして提示する。

もちろん、実際にマーケットで価格を形成するのは人間である投資家であり、人間はリスクの高いものには、より高いリターンを求める。ある金融資産について、将来のキャッシュフローを安全利子率で割引いた価格では、高過ぎると考える。つまり、人間は、リスクに見合う分だけ高い割引率で割引いて、金融商品の今日の価値を決める。

人間は、キャッシュフローの将来の期待値を求めて、それをリスク調整済みのリターンで割り引いて、今日の価格を決めている。一方、金融商品の値付けの主役は「マーケットの神様」で、この神様はリスク中立的で、将来のキャッシュフローの期待値を安全利子率で割り引くと想定すると、人間が実際につける値段と「神様」がつける値段が違ってしま

うではないか、という疑問が生じる。しかし、神様が将来価値の期待値を求めるために用いる確率と、人間が用いる確率とは異なると考えれば、この疑問は解消する。

人間は人間の頭で確率を計算する。人間の眼鏡をかけて過去のデータを分析し、それを将来の予測に投影して、人間の頭の中で確率計算をしている。こうして算出される確率を、ここでは客観確率と呼ぶことにしよう。人間は、金融資産の将来のキャッシュフローの期待値をとるとき、この客観確率を使って期待値をとり、それをリスクで調整した期待リターンで割り引いて、今日の価値を決める。これに対して、「神様」は別の眼鏡を持っている。それが「リスク中立確率」と呼ばれるものである。確率論的な用語を使って、「マルチンゲール確率」と呼ばれることもある。この「リスク中立確率」の眼鏡をかけて、確率を計算する。確率計算をした後は、「神様」は将来のキャッシュフローの期待値を安全利子率で割引いて現在価値を求める。客観確率とリスク中立確率の相違の結果、人間のつける値段と「神様」のつける値段は同じ値になるのである。

現代ファイナンス理論には、金融商品の価格を説明する理論として、「需要と供給の原理」と「無裁定原理」という、レベルの異なる 2 つの理論が存在する。前者は、市場に参加するすべての需要者と供給者の欲求が最大化された状態（これを市場の均衡状態という）が、現実の日々のマーケットで実現していると考える。他方、後者は、人々の欲求の最大化を常に実現するほどマーケットが超合理的な仕組みかどうかは知らないが、リスクなし・元手なしでプラスのリターンが得られる機会（「フリーランチ」のチャンス）が存在しない（無裁定条件）程度には、市場は合理的な存在であると考える。フリーランチのチャンスがあれば、少しでもより高い満足を求める投資家が、割安の商品には「買い」、割高の商品には「売り」を集中させて、一瞬のうちにそうした利益裁定の機会を洗い流してしまう、というわけである。

さきほど、マーケットの神様は、リスク中立確率による期待値の計算と安全利子率を用いた割引きによって資産価格を決める、という話をした。そのようなマーケットの神様の眼鏡（リスク中立確率）が少なくても一つは定義できて、その眼鏡をかけて将来価値の期待値計算をすると、あらゆる金融商品の価格が整合的に説明できる、というのが、市場にフリーランチが存在しないための数学的な必要十分条件となる。

「需要と供給の原理」に依拠した価格理論の代表格が、資本資産評価モデル(Capital Asset Pricing Model)である。これは、リスクに見合った期待リターンのあるべき大きさ（リスク・プレミアムの大きさ）を教えてくれる理論ということができる。この理論を適

用するときは、人間による金融商品の値付けに注目する。すなわち、客観確率を用いて将来のキャッシュフローの期待値をとり、それをリスクで調整した期待リターン（安全利子率にリスク・プレミアムを上乗せしたレート）で割引いて、金融商品の価値を決める。

一方、「ノー・フリーランチ理論」の代表格は、ブラック＝ショールズのオプション価格理論である。このアプローチで実際の金融商品の理論価格を求めるときは、「神様の眼鏡」、つまり「リスク中立確率」を求めることがキー・ステップになる。この眼鏡をみつけてしまえば、あとは、評価対象となる金融商品が何であれ、その所有者が受け取る将来のキャッシュフローを安全利子率で割り引いた割引現在価値の期待値を、その眼鏡をかけて計算すればよい。

λとλ*

第 2 セッションでは、λとλ*という２つの概念が登場する。λは、われわれ人間が頭の中に描く企業のデフォルト確率、λ*は、「マーケットの神様」の眼鏡で見たデフォルト確率である。λは人間の判断による客観的なデフォルト確率で、Moody's-KMV コーポレーションや（株）格付投資情報センター（R&I）などがサービスを提供している倒産確率の予測値と考えればよい。λ*はより抽象的な確率であるが、社債の価格や CDS（Credit Default Swap）のレートなど、クレジット物の価格データから推定できる。なお、厳密にいえば、λもλ*も、微少な時間間隔におけるデフォルト確率のことを指し、「デフォルト強度」ないしは「デフォルト・インテンシティー」と呼ばれるが、これについては誘導型モデルのところで説明する。

このλとλ*の関係についてのエコノメトリック・モデルの構築が、第 2 セッションのテーマである。信用リスクを内包する金融商品のプライシングには適切なλ*の値を知ることが必要となるが、λとλ*の関係が分かれば、λの値からλ*の値を計算することができる。前者のλについては、Moody's-KMV コーポレーションが、世界中で何万社もの企業の倒産確率を提供しているので、この値を使えば、社債などが市場で取引されていないような企業についてもリスク中立確率λ*が計算できる。そのλ*をもとに、その企業の信用リスクにかかわる商品のプライシングやヘッジ係数などの計算ができることになる。

2. 誘導型アプローチ

(1) 構造型アプローチとの相違

バランスシート・アプローチは、所与のバランスシートを前提に、企業が支払能力を失いデフォルトするイベントを定式化して、企業のデフォルト確率を求める。一方、誘導型アプローチは、デフォルト確率の決まるメカニズムは問題にしないで、ブラックボックスとして扱う。これが、誘導型アプローチ（Reduced Form Approach）という名前の由来である。デフォルト確率を、外生的に、関数あるいは確率モデルの形で与えるので、Default Intensity Modeling Approach とよばれることもある。

(2) ポアソン過程

偶発的に発生する火災などのイベントが時点tまでに何回発生したかを$N(t)$で表す。初期時点ではイベントは未だ発生していないので、初期値$N(0)$は 0 である。つまり、$N(t)$は 0 から出発して、最初のイベントが起きると 1 になり、それからある時間の経過後にまたイベントが起きるとそのタイミングで 2 になる。もう一度イベントが起きると 3 になるという具合に、階段状に増えていく。このような確率過程を計数過程（counting process）という。すなわち、$N(t)$は、イベント発生の累積発生回数を記録した時系列を表す確率過程である。この計数過程が、以下の 3 つの性質を満たす場合に、それをポアソン過程と呼ぶ。ポアソン過程は、計数過程の最も単純な確率モデルである。

第 1 の性質は、異なる期間のイベント発生回数の間に相関がないという性質で、「独立的増分(independent increments)」と呼ばれる。これは、今年１年間のイベントの発生回数が多いときには来年１年間も多くなるとか、逆に少なくなるといった、発生回数の時系列相関がないことを意味する。

第 2 の性質は、異なる期間におけるイベント発生回数の確率分布がどの期間についても同じという性質で、「定常的増分(stationary increments)」と呼ばれる。

第 3 の性質は、イベントの発生頻度に関するものである。具体的には、

$$\Pr\left(N(\Delta t)=1\right)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\qquad \Pr(N(\Delta t)>1)=o(\Delta t) \tag{6}$$

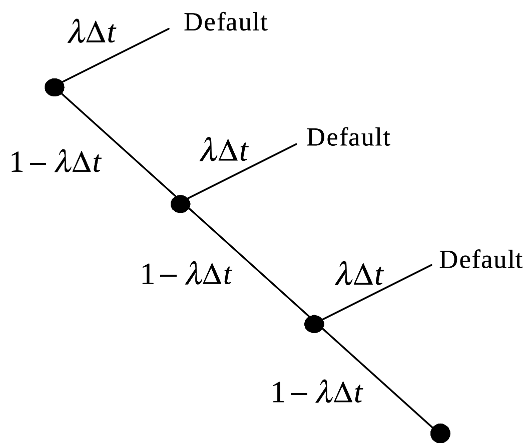
と表される。つまり、ごく短い期間Δtの間にイベントが 2 回以上起きる確率はほぼ 0 で、イベントが丁度 1 回起きる確率はほぼ$\lambda\Delta t$で与えられる、という性質である。このとき、期間Δtの間にイベントが 1 回も起きない確率は

$$\Pr(N(\Delta t)=0)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) \tag{7}$$

となる。パラメーターλは単位時間当たりの発生確率を示すが、これを「イベント強度（intensity）」と呼ぶ。イベントがデフォルトであれば、「デフォルト強度（default intensity）」と呼ばれる。

性質(1)〜(3)に即してポアソン過程を二項モデルで表現すると図表―5 のようになる。

図表ー5



ブラウン運動も、上の「独立的増分」と「定常的増分」の 2 つの性質を持つ確率過程である。第 3 の性質を、確率過程がジャンプのない連続な経路を描く、という「連続性」に置き換えれば、ブラウン運動を特徴づけることになる。

計数過程が強度λのポアソン過程に従うとき、ゼロからt時点までの間のイベント発生回数$N(t)$の分布はポアソン分布、最初のイベント発生までの時間（τ_1と記す）の分布は指数分布、n回目のイベント発生までの時間（τ_nと記す）の分布はガンマ分布に従うことが知られている。

(3) デフォルト強度

信用リスクに関しては、企業は 1 度倒産すれば終わりであるから、問題となるのは$N(t)=1$となるケースだけであり、τ_1のみを検討すればよい。τ_1の密度関数は

$$g(t)=\lambda\exp(-\lambda t), \qquad \text{for } t>0 \tag{8}$$

で与えられる。これが指数分布（negative exponential distribution）と呼ばれる確率分布

である。これを積分することによって、時点tに企業が存続している確率は

$$\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t} \tag{9}$$

となることが分かる。また、デフォルトまでにかかる時間の期待値は

$$\int_0^{\infty} t\left(\lambda e^{-\lambda t}\right) dt = \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

で与えられる。

(9)式の通り、企業が時点tまで存続する確率は$\exp(-\lambda t)$である。またτ_1の期待値（企業の平均寿命）は$1/\lambda$であるから、単位時間当たりでは平均λ回デフォルトが発生することになる。具体的なイメージとしては、例えば$\lambda = 0.04$とすると、$1/\lambda = 25$より平均寿命は 25 年となり、１年以内のデフォルト確率は$1-\exp(-0.04) = 0.0392$（3.92%）と、かなり大きな数字になる。

デフォルト強度を左右するファクターとしては、格付け、企業の財務状態、株価、金利、景気循環などを挙げることができる。

現実的な誘導型のモデルでは、デフォルト強度λの時間的変動や確率的変動を許すことになる。デフォルト強度の確率過程$\{\lambda(t): t>\}$が所与のとき、時点tでの生存企業が時点Tでも存続する確率$p(t,T)$は、

$$p(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T \lambda(s)ds} \right] \tag{11}$$

で与えられる。

(4) 誘導型モデルの類型

誘導型モデルで最も良く用いられる$\{\lambda(t): t>\}$のモデルは、Affine Intensity モデルと呼ばれるモデルである。その基本的な形の一つが(12)式である。

$$d\lambda(t) = k\left(\theta - \lambda(t)\right)dt + JdN(t) \tag{12}$$

これは、ジャンプ付き「Mean-Reverting Intensity モデル」と呼ばれるもので、図表－6にそのイメージを示す。デフォルト強度$\lambda(t)$がポアソン過程によるジャンプを散発的に起こし、ジャンプとジャンプの間では平均回帰的な経路に沿って決定論的に動くというモデルである。

図表－6

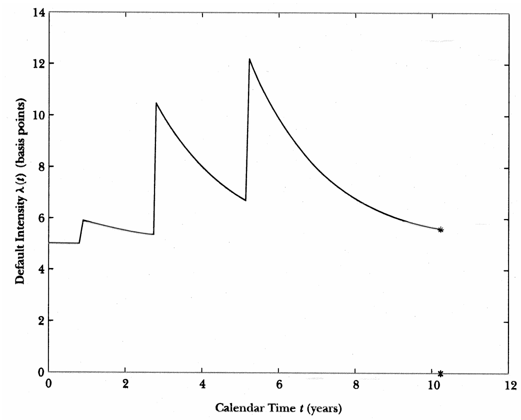


Figure 3.13. A simulated path of default intensity.

2 つ目は、「CIR（Cox, Ingersoll, and Ross）モデル」である。これは$\lambda(t)$が、ジャンプ・プロセスではなくて、連続経路の確率過程（厳密にはディフュージョン・プロセス）になる。このモデルの場合にもドリフト項は平均回帰的で、さらにボラティリティーが一定ではなく、デフォルト強度の平方根に依存する。

$$d\lambda(t) = k\big(\theta - \lambda(t)\big)dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t) \tag{13}$$

このモデルは、Cox-Ingersoll-Ross[1985]で提案された金利の確率モデルをそのままデフォルト強度の確率モデルに転用したものである。

CIR モデルから導かれるフォワード・デフォルト・レートのカーブを図表－7 に示す。このタイプのモデルでは、ボラティリティー（デフォルト強度の変動幅）が大きくなるほどフォワード・デフォルト・レート・カーブが下方に動く性質を持っているが、これは数学的にはジェンセンの不等式から確認できる。

図表－7

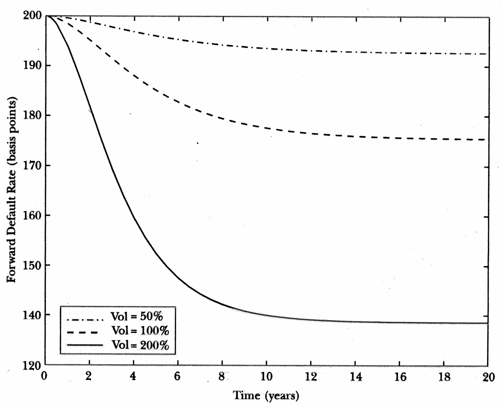


Figure 3.14. Forward default rate in the CIR intensity model with varying intensity volatility.

$\left(\theta = 200\,\mathrm{bp}, \kappa{=}0.25, \lambda(0){=}\theta\right)$

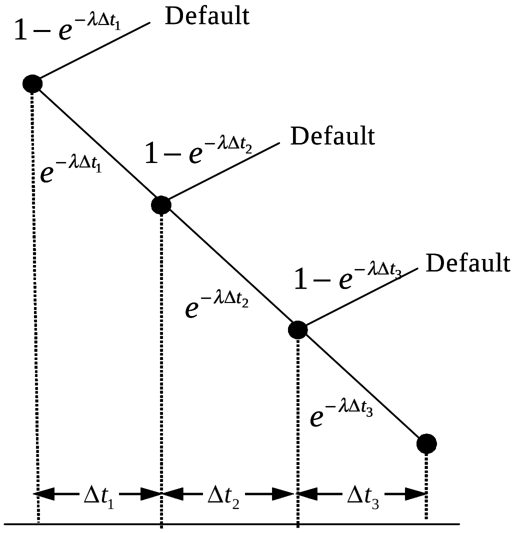
(5) 割引社債のプライシング

デフォルト・リスクのある割引社債のプライシングを、発行企業がデフォルトしたときの社債の回収率について、3 つの異なる仮定を置いて、行ってみよう。

① 回収率ゼロのモデル

図表ー8 に、$\lambda(t)$ が一定値λ の場合の二項ツリーを示した。図表ー5 はごく短い期間における近似的な二項ツリーであったが、図表ー8 は$\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ の長さにかかわりなく成立する厳密な二項ツリーである。

図表－8



回収率がゼロの場合、社債の償還日までのいずれかの時点で発行企業がデフォルトすれば、社債の価値はゼロになる。したがって、社債が償還日に正の価値を持つのは、図の最も右下のルートに沿ってデフォルトせずに償還日を迎えるケースだけである。各期にデフォルトしない確率 $\exp(-\lambda\Delta t_i)$ を掛け合わせれば、償還日 T まで発行企業が存続する確率が求まる。これに額面金額を掛けて、各期間に対応する短期金利で割引けば、リスク・ニュートラル・プライシングによる割引債の理論価格が求められる。ただし、これからは金融商品の理論価格を求める話になるので、デフォルト強度としては、人間の目で見たデフォルト強度 $\lambda(t)$ ではなく、神様の目で見たデフォルト強度 $\lambda^*(t)$ を用いなければならない。

デフォルト強度のリスク中立確率過程 $\{\lambda^*(t): t > 0\}$ と金利のリスク中立確率過程 $\{r(t): t > 0\}$ が所与とする。このとき、上の説明に従えば、償還日 T の社債の時点 t での理論価格 $d_0(t,T)$ は、

$$d_0(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T [r(s)+\lambda^*(s)]ds}\right] \tag{14}$$

で与えられることになる。

ところで、信用リスクのない割引債（割引国債）の理論価格 $\delta(t,T)$ は、

$$\delta(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\right] \tag{15}$$

で与えられる。国債の場合、デフォルトの可能性がないので、投資家は償還日Tに確実に額面金額 1 円を受け取ることができる。よって、額面金額の 1 円を償還日までの各時点に対応する短期金利で割引いて、その期待値をとれば、リスク・ニュートラル・プライシングによる割引債の理論価格が求められる。これを示すのが(15)式である。

(14)式と(15)式をくらべると、社債のようにデフォルトがある場合には、デフォルトしない場合の受取金額を、各時点に対応する短期金利にデフォルト強度を上乗せした割引率で割り引いて、その期待値をとればよいことが分かる。つまり、リスク調整割引率（risk-adjusted discount rate）$R(t)$を

$$R(t) = r(t) + \lambda^*(t) \tag{16}$$

と定義すると、割引社債の理論価格(14)式は

$$d_0(t,T) = E_t\left[e^{-\int_t^T R(s)ds} \right] \tag{17}$$

とも書くことができる。

金利プロセス$\{r(t): t > 0\}$とデフォルト・プロセス$\{\lambda^*(t): t > 0\}$が統計的に独立と仮定できる場合は、(14)式は

$$\begin{aligned} d_0(t,T) &= E_t\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \right] E_t\left[e^{-\int_t^T \lambda^*(s)ds} \right] \\ &= \delta(t,T)\, p^*(t,T) \end{aligned} \tag{18}$$

と、割引国債の価格と存続確率のかけ算に集約できる。ただし、この場合の存続確率$p^*(t,T)$は、社債償還日まで企業が存続する確率を、リスク中立確率を用いて計算したものである。

② 回収率を額面に対して定義する場合

デフォルトが起きても元本について一定の資金回収（リカバリー）があると想定する場合については、２つのアプローチがある。１つは、回収率を額面（face value）の一定割合と定義してモデル化するアプローチである。回収率を額面に対する割合で考えるのは素直な想定であるが、このタイプのモデルでは、途中でデフォルトする場合のリカバリー部分の価値計算と、満期日の額面部分の価値計算を、別個に行わなければならない。後者は(14)式の$d_0(t,T)$であるが、前者の計算はそれにくらべてやや複雑になる。さらに、クーポン債の場合には、クーポンと額面を分けて考えなければならないので、計算をもう一段

複雑にする。

最近日本で注目を集めている変額年金保険には、途中で契約者が死亡した場合に積立金の元本を保証するオプションがついている。死亡時点で積立金の運用金額が元本を下回っていても、元本が保障される。死亡時点におけるこの元本保障は、社債のデフォルト時の額面に対する 100%のリカバリーに相当する。したがって、変額年金保険の評価には、今のケースと同じ数学的な構造が含まれている。

③ 回収率を市場価値に対して定義する場合（ダフィー＝シングルトン・アプローチ）

デフォルトが起きたときの回収率をデフォルト直前の市場価値に対する割合で定義すると、①の回収率ゼロのケースの(17)式と同じように、単純に、デフォルトしない場合の受取金額をリスク調整割引率で割引いた現在価値の期待値を求めればよいことになることが知られている。この場合のリスク調整割引率 $R(t)$ は、デフォルトが時点 t で起きたときの損失率（１－回収率）を $L^*(t)$ とするとき、

$$R(t) = r(t) + \lambda^*(t)L^*(t) \tag{19}$$

で与えられる。

このアプローチでは、デフォルトが起きた場合に資金の部分的な回収があるとしても、デフォルトが起きない場合のキャッシュフローをツリーに描いて、ツリーの各経路に沿ってリスク調整割引率で割引けばよいので、数学的な扱いは非常に単純になる。この結果を発見したのは第 2 セッションの講師であるダフィー教授と、スタンフォード大学の同僚ケネス・シングルトン教授であり、2 人の名前を冠してダフィー＝シングルトン・アプローチと呼ばれている。リカバリーがあるケースでも、リカバリーがないときと全く同様の公式でプライシングできるというのが、ダフィー＝シングルトン・アプローチの便利な点である。デフォルトがない場合には「マーケットの神様」は短期金利で将来のキャッシュフローを割り引いて価値計算を行うが、デフォルトがある場合には、短期金利に（デフォルト強度×損失率）を上乗せした金利で割り引くと思えばよい。

(6) 構造型モデルと誘導型モデルの比較

図表－9 は、ファースト・パッセージ・タイプの構造型モデルから導かれる信用スプレッド・カーブと、誘導型モデルから導かれる信用スプレッド・カーブを比較したものである。点線と破線のカーブが構造型モデルのもので、実線のカーブが誘導型モデルのもので

ある。

前に述べたように、ファースト・パッセージ・タイプのモデルの場合、直近のデフォルト確率が極端に低くなる。このため、短期の債券の信用スプレッドはゼロ近傍の値になり、実際の市場から大きくかい離してしまう。また、破線は通常のファースト・パッセージ・タイプのモデルであるが、年限の長いところの信用スプレッドがほぼゼロに縮小してしまい、これも実際とは異なる。後者の欠陥については、構造型モデルに、企業が一定の目標値を中心に負債比率を管理しているという仮定を加えることで、うまく回避できることが知られている（点線のカーブがその場合を示す）。

誘導型アプローチによる信用スプレッドを実線で示しているが、こちらは年限の短いところでも、長いところでも、市場から大きくかい離することはない。

図表−9

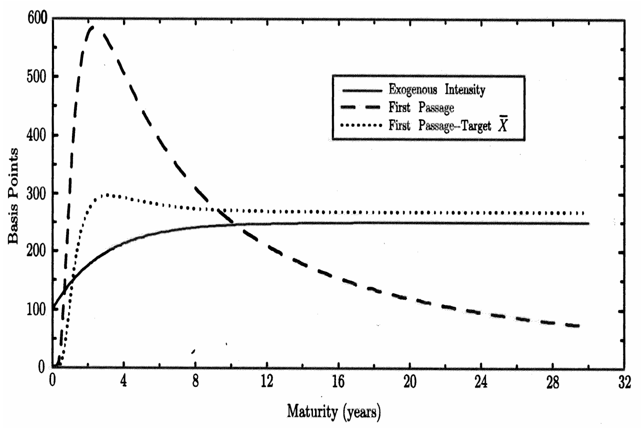


Figure 5.5. Credit spreads implied by reduced-form and structural models. (Source: Collin-Dufresne and Goldstein, unpublished paper, 1999).

3.　転換社債の評価モデル

(1) モデルの特徴

誘導型アプローチの応用例として、私の研究グループが提唱した転換社債の評価モデルを紹介する。この研究の詳細は、Takahashi-Kobayashi-Nakagawa[2001]にある。

この研究は、誘導型アプローチによる転換社債の評価モデルとしては、私たちが知る限り、世界最初のものである。信用リスクを考慮に入れた転換社債の評価モデルは、従来から構造型アプローチによるものが知られていたが、このアプローチにはすでに指摘したとおりの短所がある。他方、企業のバランス・シートの構造から出発しないアプローチの場

合には、転換社債を株式コール・オプションと債券のポートフォリオと見なして、信用リスクを無視してその評価を行うのが標準的であった。信用リスクの考慮を行ったモデルもいくつか存在するが、それらはいずれもアド・ホックで理論的な整合性に欠けるものであった。さきほど整理した信用リスクの誘導型モデルの手法が確立したのはごく近年のことであり、この理論的成果を踏まえて転換社債の評価モデルを提案したのは、これから紹介するモデルが最初である。

① 株式リスクと信用リスクに基づくモデル

転換社債のリスクの源泉としては、第 1 に株式リスク(equity risk)がある。転換社債は株式に近い挙動を示すときと、債券に近い挙動を示すときがあるので、両方のリスク・ファクターが含まれるが、より重要度が高いのは、株式リスクである。一方、債券の側面に注目すれば、金利リスクと、信用リスクがある。信用リスクをどのように理論的に取り込むかが私たちの関心なので、できるだけ単純でエッセンスだけをとらえたモデルにするために、この論文では金利リスクを副次的要素として無視した。つまり、現在のイールドカーブを所与として、将来におけるイールドカーブの確率的な変動を捨象している。ただしこの点の拡張は容易であり、著者の一人である中川君は、現在、ゴールドマン・サックス社で転換社債アービトレージを担当しているが、そこでは金利リスクを入れたバージョンのモデルを用いている。

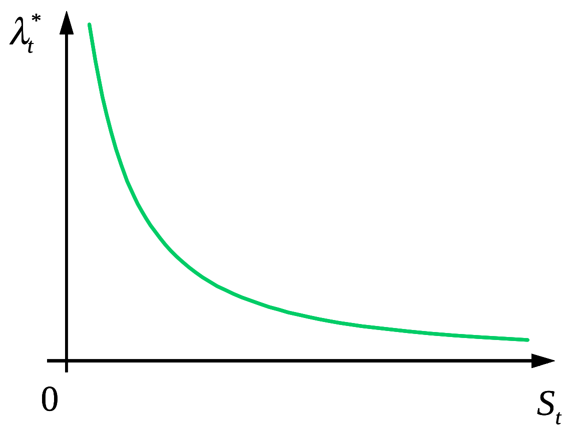
② $\lambda^*(t)$ を株価の関数と仮定

転換社債は企業業績が不振になるとデフォルト・リスクに非常に敏感になる一方、企業が好調のときにはデフォルト・リスクを余り意識しない価格付けが行われる。転換社債のこの側面をモデルに内生化するのが、モデル化の焦点である。誘導型アプローチでは、前述のように、通常はデフォルト強度$\lambda^*(t)$の確率過程を外生的に与える。その場合には、株価をドライブするブラウン運動とデフォルト強度をドライブするブラウン運動からなる 2 ファクター・モデルで問題を記述することになる。このアプローチをとる場合には、両者のブラウン運動に負の相関を与えて、株価の低下とデフォルト・リスクの増大が並行する側面を表現するのが、一つの方法となる。

わたしたちは、デフォルト強度を株価の関数と仮定することで、モデルのファクター数を 1 個にとどめた。この関数形を図表－10 に示す。株価とデフォルト強度は逆方向に動く

ので、この関数は株価に関して単調減少関数でなければならない。また、株価が 0 に近づくとデフォルト強度は無限大に発散し、株価が無限大に発散するとデフォルト強度は 0 に近づく。この３つの性質を満たす関数を与えて、その関数の具体的な形を特定するパラメーターの値を社債の価格データから決定する、というアプローチをとった。

図表ー10



株価**のドリフト項**

株価については、ブラック＝ショールズ・モデルと同じように、ボラティリティー一定の幾何ブラウン運動に従うと仮定した。ただし、株価のドリフト項について、通常の扱いをそのまま用いるのは、適当ではない。

リスク・ニュートラル・プライシングの考え方によると、「マーケットの神様」の目から見ると、株式の期待リターンは安全利子率に等しくなければならない。ここで、株式の期待リターンは、キャピタル・ゲインと配当利回りの合計であるから、株価のドリフト項（キャピタル・ゲイン）は、安全利子率マイナス配当利回りとなる。

これが、通常の株式オプションのプライシングに適用される考え方であるが、信用リスクを明示的に考慮する場合には、この考え方には修正が必要である。つまり、株式は、デフォルトが起きると株価は一瞬にしてゼロになってしまうというジャンプ・リスクを内包している。この点は社債と同様であり、株価のドリフト項には、安全利子率の代わりに、(16)式のリスク調整割引率を用いなければならない。ただし、通常の場合、デフォルト時には株主の回収額はゼロとなるので、損失率$L^*(t)=1$である。したがって、株価のリスク中立過程は、

$$dS(t)=\left\{r(t)-d\left[S(t),t\right]+\lambda^*\left[S(t),t\right]\right\}S(t)dt+\sigma S(t)dW(t) \tag{20}$$

と表現されることになる。ここで、$S(t)$は時点tでの株価、$d\left[S(t),t\right]$は時点tでの配当利回り、$r(t)$は時点tでの安全利子率、σは株価のボラティリティーである。

転換社債やワラントなど、満期までの期間が長く、企業のデフォルト・リスクがプライシングに重要な影響を与えるようなエクイティー物の金融商品をモデル化する場合には、(20)式のように、ドリフト項にデフォルト強度$\lambda^*\left[S(t),t\right]$を含めるのが正しい定式化となる。この点を指摘したのは、わたしたちの上記論文が最初である。長期のワラントに観測されるインプライド・ボラティリティーのスキュー（スマイル）と短期のオプションのそれが逆方向になるという現象が、古くから報告されているが、わたしはこの現象は上の観点から説明できると思っている。

(2) 転換社債の理論価格の計算方法

転換社債の理論価格を求めるには、まず(20)式に従って株価の時間経路を確率のツリーで表現する。次に、償還日の各ノードについて、転換社債の価値を計算する。額面をF、1 単位の転換社債をa単位の株式に転換可能とすると、転換社債の最終価値Xは

$$X=\max\left\{aS(t),F\right\} \tag{21}$$

である。転換社債のクーポンも、支払い時点に対応する各ノード毎に計算する。さらに、ツリーのすべてのノードで、(19)式のデフォルト・リスク調整割引率$R(t)$を計算する。そして、ツリー上のひとつひとつの経路について、転換社債の最終価値とクーポンのキャッシュフローをデフォルト・リスク調整割引率$R(t)$で初期時点まで割り引いた割引現在価値を計算する。最後に、個々の経路の確率を重みづけにして、投資家が満期までに受け取るキャッシュフローの割引現在価値の期待値を計算する。これで、ツリーの初期時点における転換社債の理論価格が求められる。途中でデフォルトが起きれば、経路の最後まで到達しないが、デフォルト・リスク調整割引率$R(t)$で割り引くという操作によって、途中デフォルトに対する考慮を行っていることになる。

満期前の転換可能性については、各ノードで転換社債を持ち続けた場合の価値と株式に転換した場合の価値を比較すればよい。前者よりも後者の値が大きいときに転換権を行使する。したがって、ツリーの各ノードの時点をt、株価を$S(t)$とし、転換社債の理論価値を$V\left[S(t),t\right]$で表すと、転換オプションは

$$V\left[S(t),t\right]\ >\ aS(t) \tag{22}$$

という不等式で表される。

同じように考えると、発行企業に途中償還権が賦与されている場合、時点tでの償還価格を$cp(t)$で表すと、このコール・オプションは

$$V\left[S(t),t\right] < \max\left\{cp(t),aS(t)\right\} \tag{23}$$

という不等式で表される。発行企業が途中償還を宣言した場合、投資家は償還金額を現金で受け取るか、株式に転換するか、どちらか得な方を選択できる。企業と投資家の利得はゼロ・サムになるので、企業側は、途中償還によって投資家の利得が減少する場合にのみ償還権を行使するのが、合理的な意思決定となる。ただし、発行企業は、手元資金の状況や株価への影響など、他の要因も考えて途中償還の意思決定を行うので、現実の途中償還は(23)式が示唆するよりも低い頻度で行われていると考えられる。

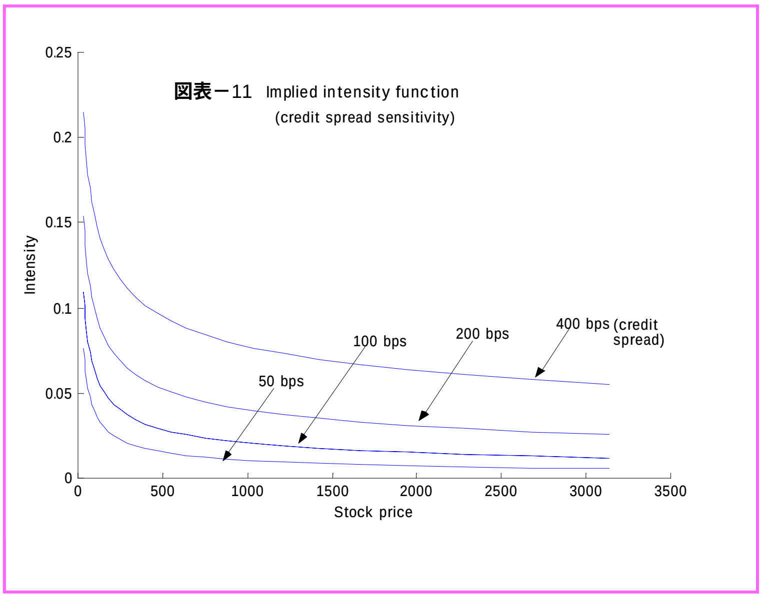
また、欧米で発行される転換社債の場合には、投資家に途中売り戻し権が賦与されることが多い。この場合には、時点tでの売り戻し価格を$pp(t)$で表すと、このプット・オプションは

$$V\left[S(t),t\right] > pp(t) \tag{24}$$

で表される。

なお、上では確率のツリーを使ってプライシング方法の概念的な説明をしたが、実際の計算には偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く方法を採用した。

モデルのパラメーターのうち、ボラティリティーσは、発行企業の普通株の 6 か月ヒストリカル・ボラティリティーを用いた。安全利子率については、LIBOR とスワップ・レート・カーブを利用して評価時点におけるイールド・カーブを計算し、そこから導かれるフォワード・レートを$r(t)$の将来の経路とした。デフォルト強度と株価の関係については、同じ企業が発行する普通社債のうち、償還日が転換社債の償還日に最も近いものを探して、その価格とモデルの計算値が合うように、パラメーター値を決めた。図表－11 に、測定(calibrate)されたデフォルト強度関数を、社債の信用スプレッドの数値毎に示す。

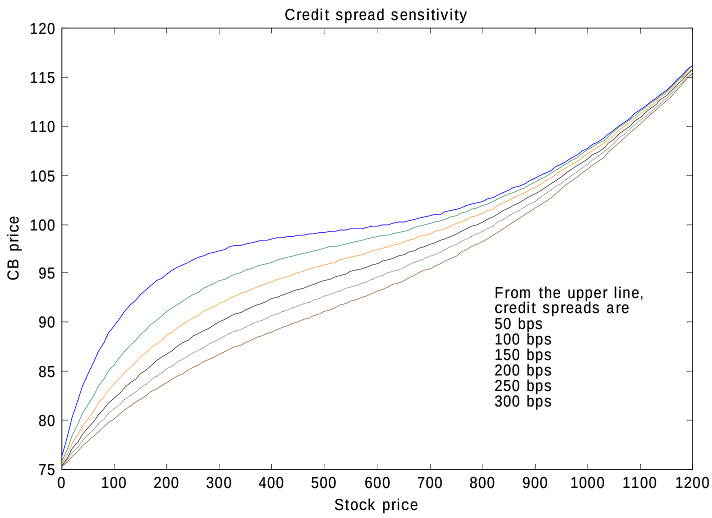


(3) 転換社債と株価の関係

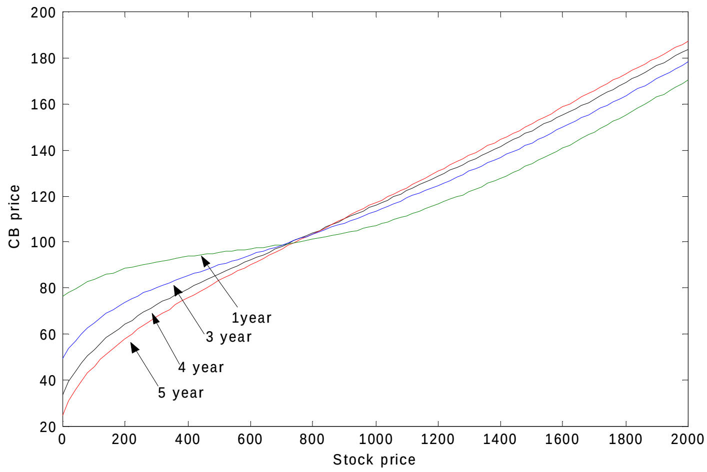
図表－12 に、モデルから計算した転換社債の理論価格と株価の関係を、社債の信用スプレッドの数値毎に示した。信用リスクがない場合には、償還日に転換オプションがイン・ザ・マネーにならなくても債券として額面が返ってくるので、株価の水準にかかわりなく額面の 100 円が理論価格のフロアー（下限線）になる。しかし、実際には、企業がデフォルトすれば社債価値も額面以下になってしまうので、株価が大きく下落すると転換社債の理論価格も額面を割り込み、ゼロに近づいていく。

図の一番上の曲線は、信用スプレッドの小さい、優良企業の場合である。現在の信用スプレッドが小さくても、企業の業績が悪化すると、株価は下落し、デフォルト・リスクも高まる。これに伴って、信用スプレッドは拡大し、転換社債の理論価格は社債の額面以下に落ち込む。この現象をモデルの内部で捉えるのがわたしたちのモデルの目的であり、現象をうまく捉えている様子が図で分かるであろう。現在の信用スプレッドが小さい企業ほど、株価下落による信用スプレッド拡大のインパクトは大きいので、一定水準以下の株価下落で転換社債の価格は急激に下落する。低格付け企業の場合を示すのが図の下方の曲線であるが、この場合には価値の下支え効果（ガンマ）が小さく、株価の下落と共に転換社債の価値は直線的に落ち込んでいく。また、図表－13 は、残存期間の短い転換社債ほどガンマが大きく、残存期間が長くなればガンマが失われる様子を示している。

図表－12



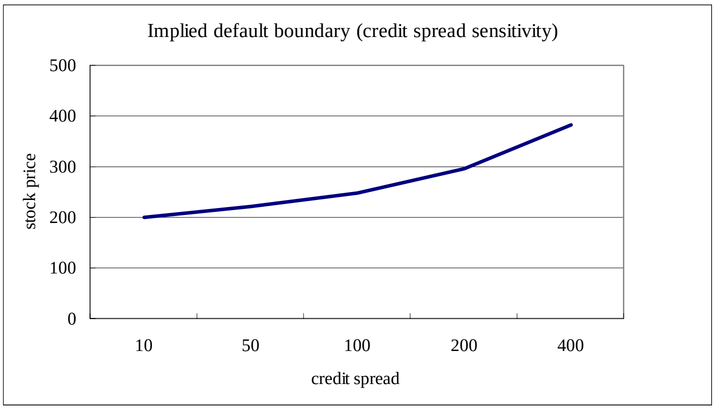
図表－13



(4) ファースト・パッセージ・モデルとの比較

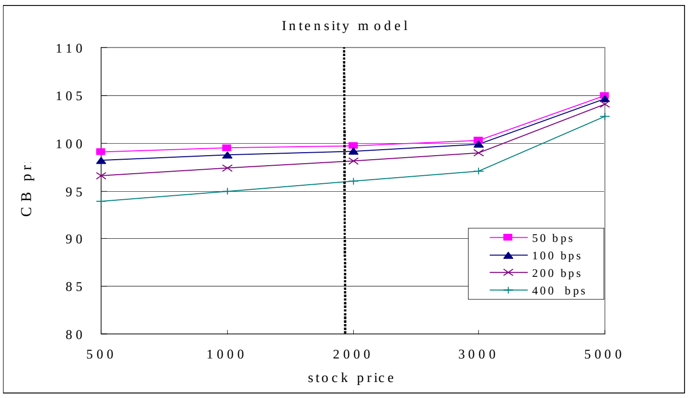
バランスシート・アプローチとの比較の結果を以下に示す。モデルとして、ファースト・パッセージ型のモデルを採用した。このモデルの場合、企業価値の閾値（default boundary) D の値を社債の市場価格から定めることになる。現在の社債の信用スプレッドが大きいほど、デフォルトまでの距離が近い、つまり閾値が大きいことになるが、モデルから導かれた関係は図表－14 のようになる。

図表－14

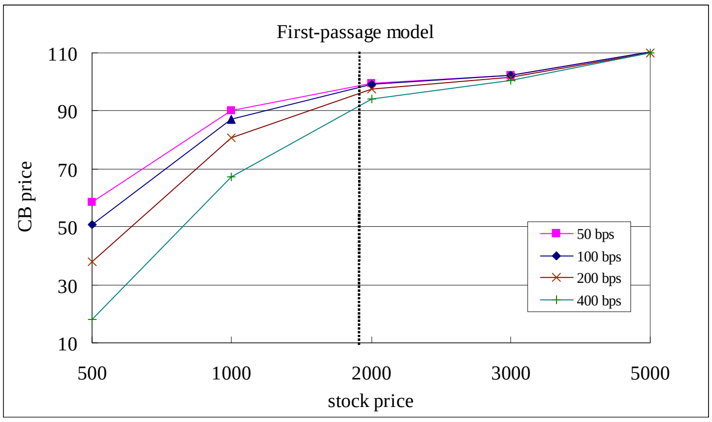


図表－15(a)と図表－15(b)は、転換社債の理論価格と株価の関係を、わたしたちのモデルとファースト・パッセージ・モデルで比較したものである。用いたのはセガ社の転換社債で、評価時点での株価は 1,940 円、アウト・オブ・ザ・マネーの状態で、転換社債の市場価格は 98.2 円であった。株価低下局面での理論価格の挙動を見ると、ファースト・パッセージ・モデルの場合、社債スプレッドに対する感応度が、わたしたちのモデルよりも大きくなる。他方、株価がある程度高いゾーンでは、ファースト・パッセージ・モデルは社債スプレッドに対する感応度がほとんどなくなるのに対して、わたしたちのモデルでは社債スプレッドによる格差が、株価が上昇しても残る。

図表－15(a)



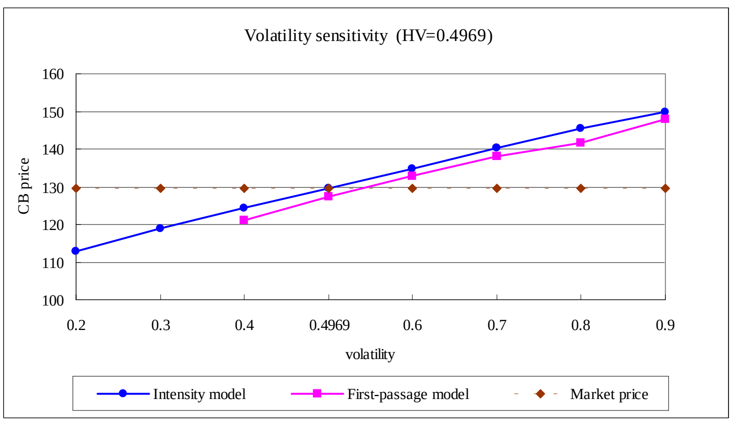
図表ー15(b)



株価のボラティリティーが上昇すると、転換オプションの価値が上昇するので、転換社債の理論価格も増加するが、これを示したのが図ー16 である。ファースト・パッセージ・モデルの場合、ボラティリティーの低いゾーンでは、社債の市場価格を説明する閾値レベル Dが得られなくなり、モデルを用いることができなくなる。これは、ボラティリティーが小さいと、閾値をゼロと仮定してもデフォルト確率が小さすぎて、観察された社債スプレッドを説明できないからである。

先に紹介した論文では、実務で用いられている最近の転換社債評価モデルを 3 つ取り上げて、モデルのパフォーマンスを比較しているが、それらのモデルの概要と詳しい結果については論文を参照していただきたい。

図表ー16



参考文献

Black F., and M. Scholes [1973], “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

Cox, J.C., J. Ingersoll, and S. Ross [1985], “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 53, 385-407.

Duffie, D., and D. Lando [2001], “Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information,” *Econometrica*, 69, 633-664.

Duffie, D, and K. J. Singleton [2003], Credit Risk: Pricing, Measurement and Management, Princeton University Press.

Merton, R. [1974], “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, 29, 449-470.

Takahashi, A., T. Kobayashi, and N. Nakagawa [2001], “Pricing Convertible Bonds with Default Risk,” *Journal of Fixed Income*, 11, 20-29.

Zhou, C., [2001], “The Term Structure of Credit Spreads with Jump Risk,” *Journal of Banking and Finance*, 25, 2015-2040.