CIRJE-J-179

非経路依存型バランスシートアプローチ

東京大学大学院経済学研究科博士課程
池田亮一

東京大学大学院経済学研究科
小林孝雄

2007 年 6 月

非経路依存型バランスシートアプローチ

A Structural Approach without Path Dependency

2007 年 6 月 29 日

池田　亮一
東京大学大学院経済学研究科博士課程学生
日本学術振興会　特別研究員

小林　孝雄
東京大学大学院経済学研究科教授

要約

この論文は、企業の信用リスク評価の構造型アプローチに、短期負債と長期負債の区別を取り込むフレームワークを提示する。池田・小林・高橋（2005）では短期負債の償還をすべて新たな短期負債の発行によって行うと仮定したため、将来の負債残高が資産価値の経路に依存しモデルが複雑になる問題点があった。本論文ではその問題点を回避するため、将来の負債額面を一定と仮定することにより経路依存性のないモデルに改良した。モデルの改良により、クレジット・デリバティブのプライシングへの応用が可能になり、その例として転換社債のプライシングを行った。

Abstract

This paper proposes a structural model to price credit risk of firms with short-term and long -term debts. In Ikeda, Kobayashi, and Takahashi (2005), since it assumed that the short-term debt is refunded by issuing a new short-term debt only, the future face value of the short-term debt depends on the path of asset value, which makes analysis very complicated. In order to avoid the problem, we build a new model without path dependency by assuming the future face values of short term debts to be fixed. Furthermore, by the improvement of the model, we show that the model can apply to the pricing of credit derivatives, and present the example of the pricing of a convertible bond.

1. はじめに

この論文では、構造型アプローチによる企業の信用リスクの新たなフレームワークを提示する。

構造型アプローチは、企業の資産価値を確率過程として外生的に与え、企業の発行する株式や債券の価格や倒産確率を算出する信用リスク評価モデルである。初めてモデル化したMerton(1974)では、企業が期限前償還のない一種類の割引債を債務として保有しているとき、株式価値は原資産を資産価値とするヨーロピアンコールオプションのブラック・ショールズ価格になることを示した。

Merton(1974)のモデルでは保有している債務を一種類と単純化したため、短期的な倒産確率の期間構造を計算することはできないという問題点がある。多種の債務をモデルにインプットできるモデルの代表例として Delianedis and Geske(1998)と Leland and Toft(1996)が挙げられる。

Delianedis and Geske(1998)では、これまで 1 種類としていた債券を、新たに短期債と長期債の 2 種類の割引債を債務として保有すると仮定し、短期と長期の倒産リスクをそれぞれ短期債務と長期債務という別々のファクターによって説明するモデルを提示した。このモデルは短期債・長期債の満期でのみ倒産の可能性がある Merton 型モデルである。

Leland and Toft(1996)では、様々な満期を持つ数種類の債券を、連続的に、それぞれ一定額面を発行する企業を仮定した。Delianedis and Geske(1998)が、債券の満期でのみ倒産の可能性があったのに対して、このモデルでは倒産の可能性が時間的に連続になる Black-Cox 型モデルになる。

これらのモデルは異なる 2 種類の債券をインプットできるものの、計算によって得られた短期と長期の倒産リスクと短期・長期債の額面の大きさとの相関関係が現実的ではない点が問題点として挙げられる。通常、企業の債務は一般業務のための資金調達手段としての意味を持つ短期債務と、過去のプロジェクトのための一時的な資金調達手段としての長期債務の二種類に分かれている。従って、短期的な倒産リスクは短期債務、長期的な倒産リスクは長期債務のウエイトに大きく依存するはずである。しかし、前述の 2 つのモデルでは、長期債務の大きさが短期的な倒産リスクにも大きく影響を与えるモデルになり、現実と整合的ではないという問題点がある。さらに、Delianedis and Geske(1998)での短期債はより償還期限が近い長期債務としての性格が強く、それゆえ増資によって償還されるように仮定されている。そのため、Delianedis and Geske(1998)では短期債の償還後は長期債の満期まで倒産する可能性がなく、倒産確率の中・長期的な期間構造を求めることができない。

そこでこの論文では、企業の短期・長期債務がそれぞれ短期・長期の倒産リスクを表すものとして捉えることができる、より現実的な倒産確率の期間構造を求めるモデルを構築する。我々は、短期債を前述のような性格のものとして捉えるために、Delianedis and Geske(1998)のモデルを応用し、短期債の償還を常に同額面の短期債を発行して行うと仮定したモデルを構築する。このモデルは、短期的な倒産リスクがより短期債務のウエイトに依存して決まる性質をもつようになり、また、Delianedis and Geske(1998)における、短期債の償還後に長期債の満期まで全く倒産の可能性が

ないという問題点も克服される。よって、モデルは中・長期的なクレジット・デリバティブのプライシングにも応用できるようになる。さらに、短期債の額面を常に一定に仮定することにより、池田・小林・高橋(2005)でのモデルの経路依存性を回避することができる。

また、新たなモデルでは債権者の償還猶予についての分析が可能になる。債権者が債券価値を最大にするように行動すると仮定すれば、債権者が債券の満期日に償還を猶予することが債権者にとって合理的選択になることがあるモデルになる。さらに、モデルでは債権者の保有証券によって償還の猶予に対する選択が異なる場合があることが示される。

以下、第2章では基本モデル、第3章では短期債債権者が償還猶予の権利を有する場合のモデルの説明をする。第4章では第2・3章のモデルを用いてクレジット・デリバティブのプライシングを求める例として転換社債の場合についてのモデルを説明する。第 5 章はモデルを使って実際に各証券価値や企業の生存確率、さらに転換社債の価格を求めた結果を述べる。第 6 章は結論である。

２．基本モデル

この章では、Delianedis and Geske(1998)のモデル(以下Gモデル)を基に作られた新たなモデルについて説明する。ここでは、短期債債権者に償還猶予の権利がないケース(以下Pモデル)を考える。

仮定・表記法

初期時点において企業は債務として、年限Δ、額面f_Sの短期債と、年限$N\Delta$、額面f_Lの長期債を 1 単位ずつ保有している。債券はともに割引債で、優先順位は短期債の方が高いものと仮定する。

短期債の償還は、満期に新たに年限Δ、額面f_Sの短期債を発行し、さらに不足分を増資によって補うことによって行うと仮定する。他の資金調達手段は用いない。短期債の償還に必要な資金調達が出来ずかつ短期債債権者が償還を猶予しない限り企業は直ちに破産手続きをとり、資産が流動化される。破産手続きの際には資産価値のα倍のみが回収され、残りは費用として資産から差し引かれるものと仮定する。以下では、企業が破産手続を行うことを「倒産」と呼び、αを資産回収率と呼ぶ(ただし$0<\alpha\leq 1$)。

また、長期債の満期において企業は解散し、短期債・長期債の償還は資産を流動化して行う。ただし、その場合に資産価値が負債総額を下回る場合は、短期債のみの償還の際と同様に破産手続を行い資産価値のα倍を債権者に分配される。上回る場合は、資産の現金化は私的整理によって行うため費用がかからないものとする。

資産価値A_tは外生的にリスク中立確率の下で幾何ブラウン運動をすると仮定する。リスクフリーレート及び資産価値のボラティリティーは一定と置き、また期間中に配当は支払われない。

$$dA_t = A_t\left(rdt + \sigma dW_t\right)\ 0 \le t \le N\Delta \quad （W_t \text{ は標準ブラウン運動}）(2.1)$$

各証券価値を以下のように表記する。

$F_{S,i\Delta}(t, A_t)$　　$(i-1)\Delta \le t \le i\Delta$ における短期債の現在価値

$F_L(t, A_t)$　　t における長期債の現在価値

$E(t, A_t)$　　t における発行済み株式の時価総額

また、

$PV_t[\cdot]$　　将来のペイオフの期待割引現在価値

$t = i\Delta^-$　　短期債の償還日直前

を表す。

（１）２期間モデル

最も基本的な場合として、$N = 2$ のモデルで分析をする。$t = \Delta$ で短期債が満期を迎え、$t = 2\Delta$ に短期債と長期債が同時に満期を迎える。いま我々が知りたいのは、$t = 0$ における各証券価値と短期債の各満期における企業の生存確率である。そこで、$t = \Delta$ で短期債が償還され企業が倒産しないような資産価値 A_Δ の条件を考える。

仮に $t = \Delta$ で倒産せず短期債が償還された後、$t = \Delta$ における短期債、株式の価値は

$$F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) = PV_\Delta[\, f_S \cdot 1_{\{A_{2\Delta} > f_S + f_L\}} + \min(\alpha A_{2\Delta}, f_S)\cdot 1_{\{A_{2\Delta} \le f_S + f_L\}}] \quad (2.2)$$

$$E(\Delta, A_\Delta) = PV_\Delta[\max(A_{2\Delta} - (f_S + f_L), 0)\cdot 1_{\{A_{2\Delta} > f_S + f_L\}}] \quad (2.3)$$

と求められる。

これは解析的に求めることができる。短期債の価値は

$$F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) = \begin{cases} \alpha A_\Delta - \alpha BSCall(A_\Delta, f, \Delta) \\ \qquad + \exp(-r\Delta)\cdot(w_s - \alpha)\cdot f \cdot N(d_2(A_\Delta, f, \Delta)) & if\ \ w_s > \alpha \\ \alpha A_\Delta - \alpha BSCall\left(A_\Delta, \dfrac{f_S}{\alpha}, \Delta\right) & if\ \ w_s \le \alpha \end{cases} \quad (2.4)$$

である。ただし、負債総額 $f = f_S + f_L$、短期債のウエイト $w_s = \dfrac{f_S}{f}$ である。また $BSCall(S, K, T)$ は、現在の原資産価格を S、権利行使価格を K としたときのブラック=ショールズ価格であり、

$$BSCall = S \cdot N(d_1(S, K, T)) - K \cdot \exp(-rT) N(d_2(S, K, T))$$

$$d_1(S,K,T) = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2(S,K,T) = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$N(\cdot)$:標準正規分布の累積密度関数

である。

このように、優先債である短期債の価値はそのウエイトが高いときには劣後債である長期債を含めた負債総額に依存するが、低いときには負債総額には依存しない。この意味について、債権者が実際に気にするのは自分の持っている債券の額面が全額償還されるかどうかであり、企業が倒産するかどうかとは別問題である。もし短期債のウエイトが低い場合には、例え倒産することがあっても倒産費用の控除後に短期債の額面が全額償還されることがあるので、短期債債権者には倒産したかどうかは問題ではなく、満期での資産価値にのみ興味がある。それに対し、短期債のウエイトが高く、倒産したときには必ず一部しか償還されない場合には、倒産するかどうかが大きな問題になるので負債全体の額そのものが問題になる。このため、短期債のウエイトが高い場合には負債総額に依存するが、低い場合には負債総額に依存しない。

株式価値は

$$E(\Delta, A_\Delta) = BSCall(A_\Delta, f, \Delta) \quad (2.5)$$

である。

いま、$t = \Delta$ において、ある A_Δ の下で短期債が償還されるかどうかを考察する。短期債の償還のための資金調達は新たに発行される短期債の売却分と、その不足分を補うための増資によって行う。もし新たに短期債が発行されたとしたとき、その売却額は $F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta)$ であるので、必要な増資額は $f_s - F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta)$ である。しかし、古い短期債が償還され増資が行われた直後の株式の総価値は $E(\Delta, A_\Delta)$ であるので、増資後の総株式価値が必要増資額を下回っている場合には株主が増資に応じることは損である。つまり

$$f_S - F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) \geq E(\Delta, A_\Delta)$$

あるいは

$$E(\Delta, A_\Delta) + F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) \leq f_S \quad (2.6)$$

のとき、短期債は償還されずに企業は倒産する。逆に増資後の総株式価値が必要増資額を上回っているときに株主が増資に応じず倒産する場合、資産流動化後に株主に配分があるかどうかについて場合わけすることによって、明らかに株主が損になることが分かる。

従って、$t=\Delta$ で短期債が償還され企業が倒産しない必要十分条件は、A_Δ が

$$E(\Delta, A_\Delta) + F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) > f_S \quad (2.7)$$

を満たすことである。

ここで、

$$F_{S,2\Delta}(\Delta, \underline{A}_\Delta) + E(\Delta, \underline{A}_\Delta) = f_S \ (2.8)$$

を満たす $\underline{A}_\Delta$ を考える。このとき、左辺を $\underline{A}_\Delta$ の関数と見ると明らかに単調増加関数であるので、この方程式を満たす $\underline{A}_\Delta$ はただ一つ決まる。すると、$A_\Delta > \underline{A}_\Delta$ を満たす A_Δ は(2.7)式を満たすので、短期債が償還されるための条件は $A_\Delta > \underline{A}_\Delta$ であると言い換えることができる。

このように、短期債が償還される資産価値の範囲はある閾値を資産価値が上回る場合として表現される。この資産価値の閾値を以下では償還のクリティカルバリュー(償還 CV)と呼ぶ。

まとめると、$t=\Delta$ では

　$A_\Delta > \underline{A}_\Delta$ のとき　企業は生存し、短期債は全額償還される。

　$A_\Delta \le \underline{A}_\Delta$ のとき　倒産

となる。

0 時点における短期債、長期債、株式の価値

したがって 0 時点における短期債は以下のように求められる。

$$F_{S,\Delta}(0, A_0) = PV_0[\, f_S \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta\}} + \min(\alpha A_\Delta,\, f_S)\cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta\}}] \quad (2.9)$$

0 時点の株式の価値は、Δ時点の増資直前の株式価値の期待割引現在価値として求められることに注意する。増資直前の株式価値は増資後の総株式価値から増資額を引いて求められるので、

$$E(\Delta^-, A_\Delta) = E(\Delta, A_\Delta) - (\, f_S - F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta)) \ (2.10)$$

である。従って、

$$E(0, A_0) = PV_0[(E(\Delta, A_\Delta) - (\, f_S - F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta)))\cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta\}}] \ (2.11)$$

である。

0 時点の長期債の価値はΔ時点において倒産しなかった場合の長期債の価値 $F_L(\Delta, A_\Delta)$ を用いて

$$F_L(0,A_0)=PV_0[F_L(\Delta,A_\Delta)\cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta\}}+\max(\alpha A_\Delta - f_S,0)\cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta\}}] \quad (2.12)$$

と書ける。$F_L(\Delta,A_\Delta)$ は 2Δ 時点において得られるペイオフの期待現在価値として

$$F_L(\Delta,A_\Delta)=PV_\Delta[f_L\cdot 1_{\{A_{2\Delta} > f_S+f_L\}}+\max(\alpha A_{2\Delta} - f_S,0)\cdot 1_{\{A_{2\Delta} \le f_S+f_L\}}] \quad (2.13)$$

と求められる。これは 2 期間モデルの場合解析的に解くことができ、

$$F_L(\Delta,A_\Delta)=\begin{cases}\exp(-r\Delta)\cdot(1-w_s)\cdot f\cdot N(d_2(A_\Delta,f,\Delta)) & if\ \ w_s>\alpha \\ \alpha BSCall\left(A_\Delta,\dfrac{f_S}{\alpha},\Delta\right)-\alpha BSCall(A_\Delta,f,\Delta) & \\ \qquad +\exp(-r\Delta)\cdot(1-\alpha)\cdot f\cdot N(d_2(A_\Delta,f,\Delta)) & if\ \ w_s\le\alpha\end{cases} \quad (2.14)$$

である。

Delianedis and Geske(1998)（Gモデル）との比較

まずGモデルの説明をする。上で述べたPモデルとGモデルの相違点は、$t=\Delta$ での短期債の償還のための資金調達方法である。上のモデルでは短期債の償還のために新たに同額面の短期債を発行したが、Gモデルでは代わりに 100%増資を行って資金調達を行うと仮定する。このため、Gモデルでは $t=\Delta$ において短期債の償還後に企業が保有する債券は長期債のみになる。短期債が償還される資産価値の条件は、増資後の株式の価値が短期債の額面より大きいことなので、

$$E^G(\Delta,A_\Delta)>f_S \quad (2.15)$$

であり、これは

$$E^G(\Delta,\underline{A}_\Delta^G)=f_S \quad (2.16)$$

となる償還CV $\underline{A}_\Delta^G$ を用いて $A_\Delta>\underline{A}_\Delta^G$ と書ける。ただし、$E^G(\Delta,A_\Delta)$ は $t=\Delta$ におけるGモデルでの発行済み株式の全時価総額であり、

$$E^G(\Delta,A_\Delta)=BSCall(A_\Delta,f_L,\Delta) \quad (2.17)$$

である。

ここで、負債総額 f に占める短期債のウエイト w_S について、f が一定のときの w_S と償還CVおよびリスク中立確率の下での倒産確率の関係について、先ほどのモデルとGモデルを比較する。

以下のグラフは負債総額が一定のときの、w_S の変化に対する各モデルにおける償還CV及び短期債満期における倒産確率の変化を表している。ただし、$f=30$、$\sigma=0.2$、$r=0.01$、$\Delta=1$、

$\alpha = 0.9$、倒産確率を求める際の初期資産価値は $A_0 = 30$ とした。

図 **1**　各モデルにおける短期債のウエイトと償還CVの関係

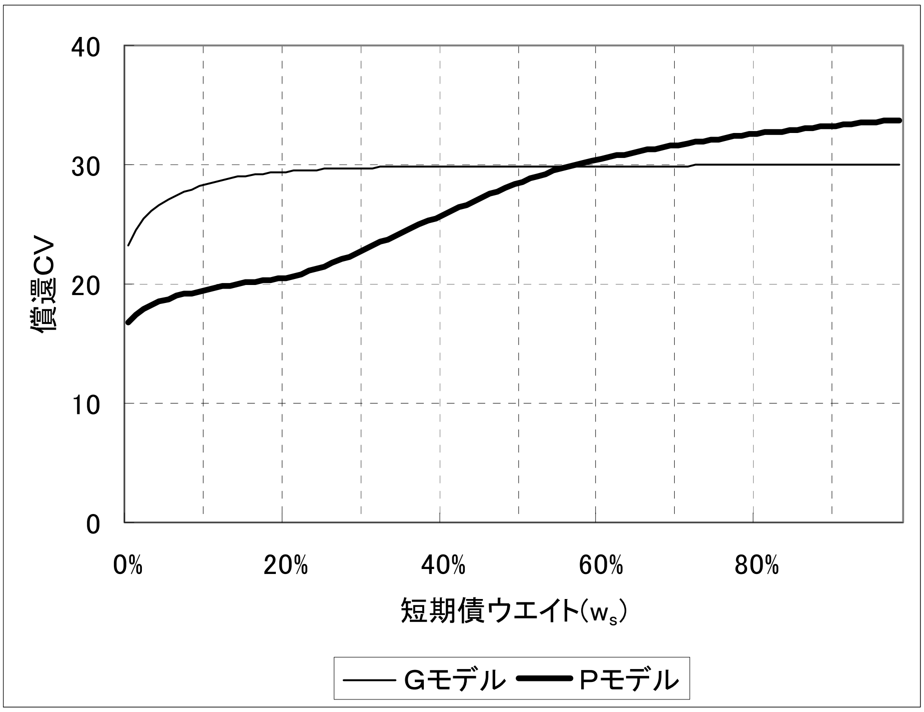


図 **2**　各モデルにおける短期債のウエイトと倒産確率の関係

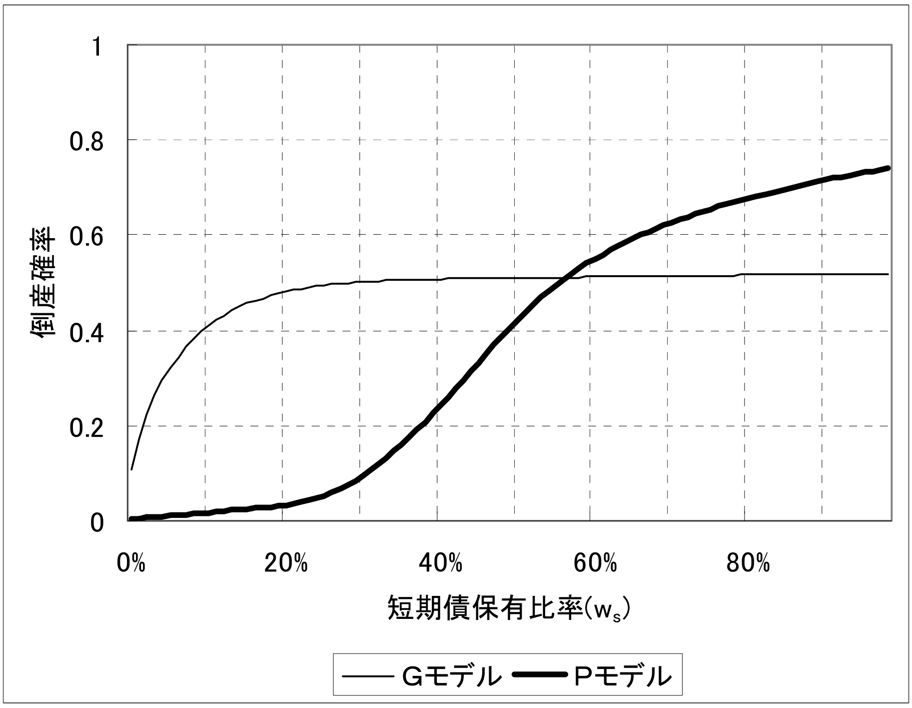


図 1 で短期債のウエイト w_S の変化に対する償還CVの変化を比較すると、Gモデルでは w_S が20％付近を越えると償還CVはほとんど変化しない。それに対してPモデルでは w_S の上昇に対して償還CVは緩やかに上がり続ける。したがって、図 2 のようにGモデルではある程度以上の w_S では短期債満期における倒産確率がほとんど変化しないのに対し、Pモデルでは w_S が上がれば倒産確率も徐々に上がり続けるという結果が得られる。

このように、G モデルでは償還 CV が負債の期間構造にほとんど依存しないのは、以下のように考えられる。G モデルでは短期債を株主がすべて購入することによって短期債の償還が行われるが、そのために株主はその見返りとして将来のペイオフを要求する。将来のペイオフはその資産価値によって決まるので、今日の資産価値の水準が問題になる。いま、負債全体の額を一定と仮定して、短期債の償還額が高いときと低いときを考えてみると、短期債の償還額が少ないときには株主が要求する将来のペイオフも少なくなるが、逆に長期債の償還額が多いので、今日の資産価値の水準もそれなりに高くなければ株主の要求するペイオフが期待できない。逆に、短期債の償還額が多い場合、株主が要求する将来のペイオフは多くなるものの、長期債の償還額も少ないので、結局、短期債の償還に必要な資産価値の水準は負債総額自体に強く依存し、短期債のウエイトにほとんど依存しなくなると考えられる。

一方、P モデルでは償還 CV が負債の期間構造に強く依存するのは、短期債の償還を主に優先順位の最も高い短期債を発行することによって行われると仮定したため、その発行価格が劣後債である長期債の額面にほとんど依存しないためである。したがって、短期債の償還額がより大きいほど、新たに発行する短期債の価値が高くならなくてはいけないため、償還 CV は高くなる。

G モデルと比較したときに、P モデルでは償還 CV は倒産時の資産回収率に依存するという性質を持つ。G モデルでは、短期債の償還は株式の発行によるが、株式価値は負債総額にのみ依存し倒産後の処理に関係なく決まるので、償還 CV が資産回収率に依存しないのは明らかである。それに対して、P モデルでは短期債の償還を新たに発行された短期債によって行われ、倒産時の資産回収率が小さいほど新たな短期債の価値は小さくなる。従って、資産回収率が低いとき、短期債を償還するためには資産価値がより高い必要があるので償還 CV は高くなり、特に短期債の償還額が高いときにより顕著になる。

（２）有限多期間モデル

有限多期間の場合で $t = i\Delta\ (i = 1, 2, \cdots, N-1)$ に短期債が償還される条件は 2 期間モデルと同様に

$$F_{S,(i+1)\Delta}(i\Delta, A_{i\Delta}) + E(i\Delta, A_{i\Delta}) > f_S \quad (2.18)$$

が成立することであり、これは

$$F_{S,(i+1)\Delta}(i\Delta, \underline{A}_{i\Delta}) + E(i\Delta, \underline{A}_{i\Delta}) = f_S \quad (2.19)$$

を満たす償還CV $\underline{A}_{i\Delta}$ を定義したとき、$A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}$ を満たすすべての $A_{i\Delta}$ と言い換えられる。
これより各期の短期債に発行される短期債の価値および、そのときの長期債・株式価値は $i=1,\cdots,N$ として

$$F_{S,i\Delta}((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta}) = PV_{(i-1)\Delta}[\, f_S \cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}\}} + \min(\alpha A_{i\Delta},\, f_S)\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}_{i\Delta}\}}] \tag{2.20}$$

$$F_L((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta}) = PV_{(i-1)\Delta}[F_L(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}\}} + \max(\alpha A_{i\Delta} - f_S, 0)\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}_{i\Delta}\}}] \tag{2.21}$$

$$E((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta}) = PV_{(i-1)\Delta}[(E(i\Delta, A_{i\Delta}) - (f_S - F_{S,(i+1)\Delta}(i\Delta, A_{i\Delta})))\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}\}}] \tag{2.22}$$

と求められる。

ここでの注意は、全ての償還CV $\underline{A}_{i\Delta}$ は $\underline{A}_{N\Delta}$ からバックワードに求められることである。つまり、$\underline{A}_{N\Delta} = f_S + f_L$ と $t=(N-1)\Delta$ における短期債・株式の価値の算出式から $\underline{A}_{(N-1)\Delta}$ が、さらに $\underline{A}_{(N-1)\Delta}$ と $t=(N-2)\Delta$ における短期債・株式の価値の算出式から $\underline{A}_{(N-2)\Delta}$ 、と続けていくことにより、$i=1,\cdots,N$ についてすべての $\underline{A}_{i\Delta}$ が算出される。

３．短期債債権者に償還猶予の権利が与えられるケース

次に、短期債が全額償還されない場合に、短期債債権者が償還を猶予する権利があるケースを考える。

追加的仮定・表記

短期債の償還のための資金調達は、前と同様に年限 Δ 、額面 f_S の短期債の発行と増資によって行われるものとする。期債の満期に同時に満期を迎える短期債は、償還は資産の流動化によって行う。

いま、短期債の満期が到来し、前述の資金調達方法で短期債が償還されない場合に限り、短期債債権者は償還を猶予するか、すぐに倒産させ資産を流動化させるかを決定できる権利を持つ（ただし、長期債の満期と重なる場合、それ以上は猶予できないものとする）。償還を猶予する場合、額面は f_S に等しいままで猶予期間は Δ 年間とし、償還猶予は短期債の満期ごとに何度でも行使することができるものとする。つまり、あるとき短期債の償還を猶予したとき、その Δ 年後に再度株主はその短期債を償還する機会が与えられるが、もしこのときも償還ができない場合、それが長期債の満期ではない限り、短期債債権者は再度その償還を Δ 年間、同額面で猶予することが可能とする。それ以降も同様である。

単純化のため短期債債権者は一人で発行済み短期債をすべて保有しており、他の証券を保有している場合もその証券を全て保有しているものとする（株式を保有している場合には、増資分も全て保有する）。以下では短期債債権者が(a)短期債のみ（S ケース）、(b)短期債と長期債（SL ケース）、(c)短期債と株式（SE ケース）を保有している3つの場合について考察する[1]。

この猶予か倒産の選択は、長期債や株式を含めた、短期債債権者が保有している全証券価値が最大化するように行動すると仮定する。

短期債債権者の権利行使は、短期債債権者の保有証券に依存するので、倒産リスクや各証券価値もそれに依存して決まる。以下では、短期債債権者の保有証券に依存して決まる値には保有証券を表す記号（S、SL、SE）を上付き文字で付して区別する。短期債債権者の保有証券ケース $X\ (=S\ ,\ SL\ or\ SE)$ において、短期債の満期 $t=i\Delta\ (i=1,2,\cdots,N-1)$ において短期債が全額償還されない場合、仮に権利行使した場合の保有証券すべての現在価値の和を $V^X(i\Delta, A_{i\Delta})$ 、行使せず倒産する場合の保有証券のもたらすペイオフを $V_D^X(i\Delta, A_{i\Delta})$ と表す。

（１）２期間モデル

短期債の償還猶予がない場合と同じように、まず基本的なモデルとして 2 期間モデルで分析する。

$t=\Delta$ における償還ＣＶ

前述のように、2Δ 時点では企業は解散することが決まっており、短期債債権者は償還を猶予できない仮定になっているので、その 1 期間前の Δ 時点における各証券価値は、短期債債権者の保有証券パターンによらず、償還猶予がない場合の証券価値とそれぞれ等しい。したがって、任意の短期債債権者のある証券保有ケース X について、$t=\Delta$ で短期債が償還されるための資産価値の条件は

$$F_{S,2\Delta}^X(\Delta, \underline{A}_\Delta^X) + E^X(\Delta, \underline{A}_\Delta^X) = f_S \quad (3.1)$$

を満たす $\underline{A}_\Delta^X$ について $A_\Delta > \underline{A}_\Delta^X$ が成立する場合であり、償還猶予がない場合のモデルを用いて、

$$F_{S,2\Delta}^X(\Delta, A_\Delta) = F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) \quad (3.2)$$

$$E^X(\Delta, A_\Delta) = E(\Delta, A_\Delta) \quad (3.3)$$

と求められる。したがって

$$\underline{A}_\Delta^X = \underline{A}_\Delta \quad (3.4)$$

が言える。

Δにおける資産価値が $A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^X$ を満たしている場合、短期債債権者が償還猶予しない限り企業は倒産する。以下では、短期債債権者がどのような場合に償還を猶予するかを、その保有証券ケースに分けて考察する。

（a）**短期債債権者が短期債のみ保有している場合（S ケース）**

$A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^X$ のときを考えると、短期債債権者が猶予するときに資産価値が満たす条件は、

$$F_{S,2\Delta}^S(\Delta, A_\Delta) > \min(\alpha A_\Delta, f_S) \quad (3.5)$$

である。流動化して短期債が額面全額償還される場合（$f_S \le \alpha A_\Delta$）の場合は短期債債権者は明らかに猶予しない方が有利である。全額償還されないとき（$f_S > \alpha A_\Delta$）には、以下の系が成立する。

系1
2 期間モデルのSケースで、短期債債権者が
(ｉ) $w_s > \alpha$ のとき
A_Δ が(3.5)式満たすのは、

$$F_{S,2\Delta}^S(\Delta, \overline{A}_\Delta^S) = \alpha \overline{A}_\Delta^S \quad (3.6)$$

となる $\overline{A}_\Delta^S > 0$ について $A_\Delta < \overline{A}_\Delta^S$ を満たすときである。

(ⅱ) $w_s \le \alpha$ のとき

$$F_{S,2\Delta}^S(\Delta, A_\Delta) > \alpha A_\Delta \quad (3.7)$$

満たす A_Δ は存在しない。□

系 1 より短期債のウエイトが資産回収率より大きい場合には、資産価値が $\overline{A}_\Delta^S$ を下回る場合に、短期債債権者は償還を猶予したほうが得であることが分かる[2]。逆に、短期債のウエイトが資産回収率より小さい場合は、資産価値にかかわらず短期債債権者は倒産させた方が常に有利になる。

$F_{S,2\Delta}^S(\Delta, \overline{A}_\Delta^S) = \min(\alpha \overline{A}_\Delta^S, f_S)$ のように、

$$V^X(i\Delta, \overline{A}^X_{i\Delta}) = V^X_D(i\Delta, \overline{A}^X_{i\Delta}) \quad (3.8)$$

を満たす資産価値を猶予のクリティカルバリュー（猶予CV）と呼び、$\overline{A}^X_{i\Delta}$ のように表す。等しくなる正の資産価値が存在しない場合には $\overline{A}^X_{i\Delta} = 0$ とする。このように猶予CVを定義すると、$t = \Delta$ では

$A_\Delta > \underline{A}^S_\Delta$ のとき　企業は生存し、短期債は全額償還される。

$A_\Delta \leq \underline{A}^S_\Delta$ のとき　短期債債権者は倒産か猶予かを選択

$A_\Delta > \overline{A}^S_\Delta$ ならば　倒産

$A_\Delta \leq \overline{A}^S_\Delta$ ならば　短期債は償還猶予

とまとめられる。よって、0 時点における短期債、長期債、株式の価値が以下のように求められる。

$$F^S_{S,\Delta}(0, A_0) = PV_0[f_S \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}^S_\Delta\}} + (\min(\alpha A_\Delta, f_S)) \cdot 1_{\{A_\Delta > \overline{A}^S_\Delta\}} + F^S_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \overline{A}^S_\Delta\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \underline{A}^S_\Delta\}}] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} &F^S_L(0, A_0) \\ &= PV_0[F^S_L(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}^S_\Delta\}} + (\max(\alpha A_\Delta - f_S, 0) \cdot 1_{\{A_\Delta > \overline{A}^S_\Delta\}} + F^S_L(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \overline{A}^S_\Delta\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \underline{A}^S_\Delta\}}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} E^S(0, A_0) &= PV_0[E(\Delta^-, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}^S_\Delta\}} + (E(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \overline{A}^S_\Delta\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \underline{A}^S_\Delta\}}] \\ &= PV_0[(E(\Delta, A_\Delta) - (f_S - F_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta))) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}^S_\Delta\}} + (E(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \overline{A}^S_\Delta\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \leq \underline{A}^S_\Delta\}}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

このように、額面全額が償還されない場合に、短期債債権者が猶予するかどうかについて、もし負債全体に占める短期債のウエイトが小さい場合には猶予しないほうが良く、逆に大きい場合には資産価値が小さい場合には猶予し大きい場合には猶予しないほうが良いことになる。

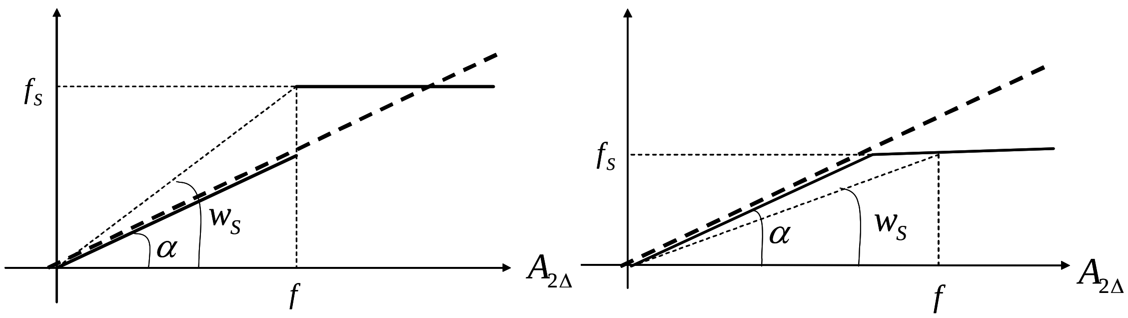
短期債のウエイトが資産回収率より小さいときには短期債債権者は猶予しないほうが常に良いことは、次のように直観的に考えられる。短期債が償還されない場合に、短期債債権者は清算して今日資産価値の α 倍を得るか、猶予して将来ペイオフを得るかの選択をする。もし将来あらゆる状態でペイオフが資産価値の α 倍をこえることがなければ、資産価値の現在価値がマルチンゲールでリスク中立確率の下では、明らかに今日清算したほうが得である。負債総額に占める短期債のウエ

イト w_S が資産回収率 α を下回る場合には実はこのようなケースにあたる。企業が将来倒産しない場合には、資産は株主を含めた3者で分割されるため、「資産総額に占める」短期債債権者のペイオフのウエイトは「負債総額に占める」短期債債権者のウエイトより小さくなる。したがって、「資産全体に占める」短期債債権者の取り分は資産回収率 α を常に下回ることがわかる。また、将来倒産する場合は、明らかに資産価値に占める短期債債権者へのペイオフが資産回収率を上回ることはない。このことは図3(ⅱ)で、将来のペイオフを示す実線が、猶予しなかった場合のペイオフを表す傾き α の点線の下にあることによって表される。よって、負債総額に占める短期債のウエイトが資産回収率 α を下回る場合には、将来のあらゆる状態でペイオフは資産価値の α 倍以下であり、短期債債権者が償還を猶予するか否かの選択では、常に猶予しないほうが得になる。

一方で、短期債のウエイトが資産回収率より大きい場合は図 3(ⅰ)にあたる。この場合、猶予しなかった場合のペイオフを表す点線を、将来のペイオフを表す実線が上回る部分がある。つまり、短期債はいま資産を回収するより高い資産を将来回収できる可能性があるということであり、系 1 はその可能性が高くなるのは、今日の資産価値がより低いほど、将来資産価値が高くなった結果資産価値に占める短期債のペイオフの割合が低くなるという可能性が低くなるため、猶予した方がよいということを表している。

図 3 $t = 2\Delta$ における短期債のペイオフ

(ⅰ) $w_s > \alpha$ のとき　　　　（ⅱ）$w_s \le \alpha$ のとき



（ｂ）短期債債権者が長期債を保有している場合（ＳＬケース）

$A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}$ のとき、短期債債権者は償還を猶予するかを選択する。短期債償還を猶予する場合は、資産価値が

$$F_{S,2\Delta}^{SL}(\Delta, A_\Delta) + F_L^{SL}(\Delta, A_\Delta) > \min(\alpha A_\Delta,\ f_S + f_L) \quad (3.12)$$

を満たす場合である。ただし、$A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}$ より

$$\min(\alpha A_\Delta, f_S + f_L) = \alpha A_\Delta \quad (3.13)$$

である。これは、S ケースで長期債の額面が0と仮定した場合に猶予する条件と捉え直すことができる。したがって、系 1(ⅱ)で $f_S = f$ とおくと、短期債債権者が償還を猶予するための条件は

$$F_{S,2\Delta}^{SL}(\Delta, \overline{A}_\Delta^{SL}) + F_L^{SL}(\Delta, \overline{A}_\Delta^{SL}) = \alpha \overline{A}_\Delta^{SL} \quad (3.14)$$

となる $\overline{A}_\Delta^{SL} > 0$ について、A_Δ が $A_\Delta < \overline{A}_\Delta^{SL}$ を満たすことである。よって、$t = \Delta$ では

$A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SL}$ のとき　短期債は償還

$A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}$ のとき　短期債債権者は倒産か猶予かを選択

$A_\Delta > \overline{A}_\Delta^{SL}$ ならば　　倒産

$A_\Delta \le \overline{A}_\Delta^{SL}$ ならば　償還猶予

となる。この結果より、0 時点における短期債、長期債、株式の価値が求められる。

$$F_{S,\Delta}^{SL}(0, A_0) = PV_0[\, f_S \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SL}\}} + (\min(\alpha A_\Delta, f_S)) \cdot 1_{\{A_\Delta > \overline{A}_\Delta^{SL}\}} + F_{S,2\Delta}^{S}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \overline{A}_\Delta^{SL}\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}\}}]$$

(3.15)

$$\begin{aligned} &F_L^{SL}(0, A_0) \\ &= PV_0[F_L^{SL}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SL}\}} + (\max(\alpha A_\Delta - f_S, 0) \cdot 1_{\{A_\Delta > \overline{A}_\Delta^{SL}\}} + F_L^{SL}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \overline{A}_\Delta^{SL}\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}\}}] \end{aligned}$$

(3.16)

$$\begin{aligned} &E^{SL}(0, A_0) \\ &= PV_0[E^{SL}(\Delta^-, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SL}\}} + (E^{SL}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \overline{A}_\Delta^{SL}\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}\}}] \\ &= PV_0[(E^{SL}(\Delta, A_\Delta) - (f_S - F_{S,2\Delta}^{SL}(\Delta, A_\Delta))) \cdot 1_{\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SL}\}} + (E^{SL}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \overline{A}_\Delta^{SL}\}}) \cdot 1_{\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SL}\}}] \end{aligned}$$

(3.17)

（C）短期債債権者が他に株式を保有している場合（SE ケース）

短期債債権者が株式も保有しているときについて、短期債償還を猶予する場合、資産価値が満たす条件は

$$F_{S,2\Delta}^{SE}(\Delta, A_\Delta) + E^{SE}(\Delta, A_\Delta) > \min(\alpha A_\Delta, f_S) \quad (3.18)$$

である。
このとき、以下の系が成立する。

系 2
2 期間モデルのSEケースについて

(a) 短期債の額面が全額償還される場合（$A_\Delta \geq \dfrac{f_S}{\alpha}$）

$$F^{SE}_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) + E^{SE}(\Delta, A_\Delta) < f_S \quad (3.19)$$

が常に成立つ。

(b) 短期債の額面が全額償還されない場合（$A_\Delta < \dfrac{f_S}{\alpha}$）

(ｉ) $w_s > \alpha$ のとき
全ての A_Δ について

$$F^{SE}_{S,2\Delta}(\Delta, A_\Delta) + E^{SE}(\Delta, A_\Delta) > \alpha A_\Delta \quad (3.20)$$

が成立する。
(ⅱ) $w_s \leq \alpha$ のとき
A_Δ が (3.20)を満たすのは

$$F^{SE}_{S,2\Delta}(\Delta, \bar{A}^{SE}_\Delta) + E^{SE}(\Delta, \bar{A}^{SE}_\Delta) = \alpha \bar{A}^{SE}_\Delta \quad (3.21)$$

となる $\bar{A}^{SE}_\Delta > 0$ について A_Δ が

$$A_\Delta > \bar{A}^{SE}_\Delta \quad (3.22)$$

を満たす場合である。□

これより、短期債が全額償還される場合には倒産したほうがよい。そうでない場合、 $w_s > \alpha$ のとき、短期債債権者は資産価値にかかわらず常に償還猶予をしたほうが有利である。一方 $w_s \leq \alpha$ の時には償還を猶予した方が良いのは $\bar{A}^{SE}_\Delta$ を超える場合のみに限られる[3]。よって、$t = \Delta$ では

$A_\Delta > \underline{A}^{SE}_\Delta$ のとき　短期債は償還され、企業は存続

$A_\Delta \leq \underline{A}^{SE}_\Delta$ のとき　短期債債権者は倒産か猶予かを選択

$\dfrac{f_S}{\alpha} < A_\Delta$ ならば　企業は倒産。ただし、短期債は全額償還

$\bar{A}_\Delta^{SL} < A_\Delta \le \dfrac{f_S}{\alpha}$ ならば　償還猶予

$A_\Delta \le \bar{A}_\Delta^{SL}$ ならば　　倒産

と書くことができる。この結果より、0 時点における短期債、長期債、株式の価値が求められる。

$$F_{S,\Delta}^{SE}(0,A_0) = PV_0[\, f_S \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \min(\underline{A}_\Delta^{SE}, \frac{f_S}{\alpha})\right\}} + (F_{S,2\Delta}^{SE}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \bar{A}_\Delta^{SE}\right\}} + \alpha A_\Delta \cdot 1_{\left\{A_\Delta \le \bar{A}_\Delta^{SE}\right\}}) \cdot 1_{\left\{A_\Delta \le \min(\underline{A}_\Delta^{SE}, \frac{f_S}{\alpha})\right\}}]$$

(3.23)

$$\begin{aligned} &F_L^{SE}(0,A_0) \\ &= PV_0[F_L^{SE}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}} + (F_L^{SE}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{\bar{A}_\Delta^{SE} < A_\Delta \le \frac{f_S}{\alpha}\right\}} + \max(\alpha A_\Delta - f_S, 0) \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \frac{f_S}{\alpha}\right\}}) \cdot 1_{\left\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}}] \end{aligned}$$

(3.24)

$$\begin{aligned} &E^{SE}(0,A_0) \\ &= PV_0[E^{SE}(\Delta^-, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}} + (E^{SE}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{\bar{A}_\Delta^{SE} < A_\Delta \le \frac{f_S}{\alpha}\right\}}) \cdot 1_{\left\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}}] \\ &= PV_0[(E^{SE}(\Delta, A_\Delta) - (f_S - F_{S,2\Delta}^{SE}(\Delta, A_\Delta))) \cdot 1_{\left\{A_\Delta > \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}} + (E^{SE}(\Delta, A_\Delta) \cdot 1_{\left\{\bar{A}_\Delta^{SE} < A_\Delta \le \frac{f_S}{\alpha}\right\}}) \cdot 1_{\left\{A_\Delta \le \underline{A}_\Delta^{SE}\right\}}] \end{aligned}$$

(3.25)

このように SE ケースでは、他のケースと比べて猶予に関する条件が複雑になる。資産を流動化せずに短期債が償還できない場合、流動化すれば短期債が全額償還できる場合には SE ケースでは常に流動化して償還したほうが有利になる。これは、数学的には償還 CV の定義から明らかで、短期債の償還を新たな短期債の発行と増資によって行うと仮定しているためにこのような結果になる。流動化しても短期債が全額償還されない場合には、負債全体に占める短期債のウエイトが大きい場合には常に猶予した方がよい。逆にウエイトが小さい場合には資産価値が大きいときにのみ猶予し、小さいときには倒産して流動化したほうが良い。

（２）有限多期間モデル

有限多期間モデルに拡張した場合、短期債の満期 $t = i\Delta\ (i = 1, 2, \cdots, N-1)$ での償還条件は、$A_{i\Delta}$ が

$$F_{S,(i+1)\Delta}^X(i\Delta, A_{i\Delta}) + E^X(i\Delta, A_{i\Delta}) > f_S \quad (3.26)$$

満たすことである。2 期間モデルと同様に、

$$F_S^X(i\Delta, \underline{A}_{i\Delta}^X) + E^X(i\Delta, \underline{A}_{i\Delta}^X) = f_S \quad (3.27)$$

となる $\underline{A}_{i\Delta}^X$ を定義したとき、$t = i\Delta$ において倒産することなく短期債が償還される条件は

$$A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}^X \quad (3.28)$$

と言い換えることが可能である。

また、$t = i\Delta$ に短期債が償還できない場合に、短期債債権者が償還猶予をするのは $A_{i\Delta}$ が、

$$V^X(i\Delta, A_{i\Delta}) > V_D^X(i\Delta, A_{i\Delta}) \quad (3.29)$$

を満たすことである。これについても 2 期間モデルと同様に、

$$V^X(i\Delta, \overline{A}_{i\Delta}^X) = V_D^X(i\Delta, \overline{A}_{i\Delta}^X) \quad (3.30)$$

を満たす $\overline{A}_{i\Delta}^X$ （存在しない場合は 0 とする）を用いて $A_{i\Delta}$ が

$$\begin{aligned} &A_{i\Delta} < \overline{A}_{i\Delta}^X && if\ \ X \neq SE \\ &\overline{A}_{i\Delta}^X < A_{i\Delta} < \frac{f_S}{\alpha} && if\ \ X = SE \end{aligned} \quad (3.31)$$

と言い換えることが可能である。(3.28)、(3.31)式を満たさない $A_{i\Delta}$ で、企業は倒産する。

便宜的に

$$\underline{A}_{N\Delta}^X = f_S + f_L \quad (3.32)$$

$$\overline{A}_{N\Delta}^X = \begin{cases} 0 & if\ \ X \neq SE \\ +\infty & if\ \ X = SE \end{cases} \quad (3.33)$$

とすると、$t = i\Delta\ (i = 1, 2, \cdots, N)$ に満期を迎える短期債の $t = (i-1)\Delta$ における価値は

$$F_{S,i\Delta}^X((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta})$$
$$= \begin{cases} PV_{(i-1)\Delta}[\, f_S \cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}_{i\Delta}^X\}} \\ \quad + (\min(\alpha A_{i\Delta}, f_S)) \cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \overline{A}_{i\Delta}^X\}} + F_{S,(i+1)\Delta}^X(i\Delta, A_{i\Delta}) \cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \overline{A}_{i\Delta}^X\}}) \cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}_{i\Delta}^X\}}] & if\ \ X \neq SE \\ PV_{(i-1)\Delta}[\, f_S \cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \min(\underline{A}_{i\Delta}^{SE}, \frac{f_S}{\alpha})\}} \\ \quad + (F_{S,(i+1)\Delta}^{SE}(i\Delta, A_{i\Delta}) \cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \overline{A}_{i\Delta}^{SE}\}} + \alpha A_{i\Delta} \cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \overline{A}_{i\Delta}^{SE}\}}) \cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \min(\underline{A}_{i\Delta}^{SE}, \frac{f_S}{\alpha})\}}] & if\ \ X = SE \end{cases} \quad (3.34)$$

である。また、そのときの長期債および株式の価値は

$$F_L^X((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta})$$

$$=\begin{cases} PV_{(i-1)\Delta}[F_L^X(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}^X_{i\Delta}\}} \\ \quad +(\max(\alpha A_{i\Delta} - f_S, 0)\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \bar{A}^X_{i\Delta}\}} + F_L^X(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \bar{A}^X_{i\Delta}\}})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}^X_{i\Delta}\}}] & if \quad X \neq SE \\ PV_{(i-1)\Delta}[F_L^{SE}(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}^{SE}_{i\Delta}\}} \\ \quad +(F_L^{SE}(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{\bar{A}^{SE}_{i\Delta} < A_{i\Delta} \le \frac{f_S}{\alpha}\}} + \max(\alpha A_{i\Delta} - f_S, 0)\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \frac{f_S}{\alpha}\}})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}^{SE}_{i\Delta}\}}] & if \quad X = SE \end{cases}$$

(3.35)

$$E^X((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta})$$

$$=\begin{cases} PV_{(i-1)\Delta}[(E^X(i\Delta, A_{i\Delta}) - (f_S - F^X_{S,(i+1)\Delta}(i\Delta, A_{i\Delta})))\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}^X_{i\Delta}\}} \\ \qquad\qquad + (E^X(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \bar{A}^X_{i\Delta}\}})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}^X_{i\Delta}\}}] & if \quad X \neq SE \\ PV_{(i-1)\Delta}[(E^{SE}(i\Delta, A_{i\Delta}) - (f_S - F^{SE}_{S,(i+1)\Delta}(i\Delta, A_{i\Delta})))\cdot 1_{\{A_{i\Delta} > \underline{A}^{SE}_{i\Delta}\}} \\ \qquad\qquad + (E^{SE}(i\Delta, A_{i\Delta})\cdot 1_{\{\bar{A}^{SE}_{i\Delta} < A_{i\Delta} \le \frac{f_S}{\alpha}\}})\cdot 1_{\{A_{i\Delta} \le \underline{A}^{SE}_{i\Delta}\}}] & if \quad X = SE \end{cases}$$

(3.36)

である。

４． 転換社債のプライシングへの応用

第2章及び3章の有限多期間モデルはクレジット・デリバティブのプライシングへ応用できる。例として、デフォルト可能性がある転換社債（CB）のプライシングを行った。

仮定

CBの額面を f_C、満期を $T_C(< N\Delta)$ とする。CBを保有する投資家は満期以前のあらゆる時点で k 単位の株式に転換する権利を持つ。企業が倒産した場合にはその時点で額面の $100\alpha_C$ % のみ償還される（α_C は外生変数である）。また、CB の発行枚数は株式や各債券に比べて十分小さく、それ自体が倒産リスクや株式価値に影響を与えないものとする。

t 時点における CB の価値

一株あたりの株式価値を $P(t, A_t)$ とおくと、満期以前の CB の価値 $F_C(t, A_t)$ は、$t \neq i\Delta$ では

$$F_C(t, A_t) = \max(F_C(t^+, A_t), kP(t, A_t)) \quad (4.1)$$

$t = i\Delta$ では

$$F_C(t, A_t) = \begin{cases} \max(F_C(t^+, A_t), kP(t, A_t)) & if \text{ 倒産しない場合} \\ \alpha_C f_C & if \text{ 倒産する場合} \end{cases} \quad (4.2)$$

である。ただし、$F_C(t^+, A_t)$ は t 時点で権利行使しなかった場合の CB の価値である。

満期では、$T_C \neq i\Delta$ のとき

$$F_C(T_C, A_{T_C}) = \max(kP(T_C, A_{T_C}), f_C) \quad (4.3)$$

$T_C = i\Delta$ のとき

$$F_C(T_C, A_{T_C}) = \begin{cases} \max(kP(T_C, A_{T_C}), f_C) & if \text{ 倒産しない場合} \\ \alpha_C f_C & if \text{ 倒産する場合} \end{cases} \quad (4.4)$$

である。

一株あたり株式価値と発行済み株式数

一株あたりの株式価値は、全株式価値 $E(t, A_t)$ を発行済み株式数で除すことによって得られる。

株式が新たに発行されることがあるのは短期債の満期のみなので、発行済み株式数は $(i-1)\Delta \le t \le i\Delta^-$ において常に等しく、その期間の発行済み株式数を λ_i と定義することができる。

初期時点の発行済み株式数を $\lambda_1 = \overline{\lambda}_1$ (定数)とすると、$2 \le i \le N$ について、

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{i-1} \cdot \dfrac{E((i-1)\Delta, A_{(i-1)\Delta})}{E((i-1)\Delta^-, A_{(i-1)\Delta})} & if \ t = (i-1)\Delta \text{で短期債が償還される場合} \\ \lambda_{i-1} & if \ t = (i-1)\Delta \text{で短期債が償還猶予される場合} \end{cases} \quad (4.5)$$

が成立する。これより $(i-1)\Delta \le t \le i\Delta^-$ の一株あたり株式価値 $P(t, A_t)$ は

$$P(t, A_t) = \frac{E(t, A_t)}{\lambda_i} \quad (4.6)$$

と決まる。

この式から明らかなように、一般に発行済み株式数は一般に過去の短期債の満期におけるすべての資産価値 $A_\Delta, A_{2\Delta}, \cdots, A_{(i-1)\Delta}$ に依存して決まる。従って、全株式価値とは異なり一株あたり株式価値は現在の資産価値だけではなく、過去の短期債の満期における資産価値 $A_\Delta, A_{2\Delta}, \cdots, A_{(i-1)\Delta}$

に依存して決まる点に注意する必要がある。

５．結果

これまで述べてきたモデルについて、実際に計算した結果を考察する。考察するモデルは、短期債債権者が償還猶予をしない場合のモデル（Pモデル）、短期債債権者が償還猶予をするモデルとしてSモデル（短期債のみ保有）、SLモデル(短期債と長期債)、SEモデル（短期債と株式）、さらに既存モデルとの比較として Delianedis and Geske(1998)モデル（G モデル）、Leland and Toft(1996)モデル（L モデル）の6種類である。また、新たなモデルではCBのプライシングも併せて行った。

パラメータ・計算方法

以下のパラメータは予め固定し、$(f_S, f_L)=(10,20),(20,10)$ の場合に初期資産価値を $A_0 = 10, 20, 30, 40, 50$ に変化させたときの各モデルでの証券の価値および企業の生存確率をそれぞれ求めた。資産回収率は $\alpha = 0.5, 0.9$ の場合について行った。計算方法について、Lモデルでは解析的にすべての証券価値及び生存確率が求められる。その他のモデルは 2 項モデルを用いて計算した。

図 **4** 各パラメータ

短期債年限Δ	1年
長期債年限NΔ	4年
資産価値ボラティリティーσ	0.2
リスクフリーレートr	0.01
転換社債額面fC	100
転換株式数k	20

以下が結果である[4]。

表 **1**　$\alpha = 0.9$ の場合

(ⅰ)　$(f_S, f_L) = (10, 20)$

初期資産価値	モデル	証券価値				生存確率			
		短期債	長期債	株式	転換社債	1年目まで	2年目まで	3年目まで	4年目まで
10	P	8.61	0.39	0.00	49.56	0.00	0.00	0.00	0.00
	S	8.61	0.39	0.00	49.56	0.00	0.00	0.00	0.00
	SL	7.82	1.18	0.01	97.43	1.00	1.00	1.00	0.00
	SE	8.61	0.39	0.00	49.56	0.00	0.00	0.00	0.00
	G	8.61	0.38	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
	L								
20	P	9.90	7.80	0.73	78.09	0.80	0.53	0.35	0.12
	S	9.90	7.80	0.73	78.09	0.80	0.53	0.35	0.12
	SL	9.80	7.94	0.67	84.84	0.75	0.67	0.67	0.11
	SE	9.90	7.80	0.73	78.09	0.80	0.53	0.35	0.12
	G	9.90	8.10	0.07		0.03	0.03	0.03	0.03
	L								
30	P	9.90	13.90	4.99	144.53	1.00	0.95	0.81	0.44
	S	9.90	13.90	4.99	144.55	1.00	0.95	0.81	0.44
	SL	9.90	13.92	4.97	144.03	0.99	0.95	0.95	0.44
	SE	9.90	13.90	4.99	144.55	1.00	0.95	0.81	0.44
	G	9.90	15.96	2.91		0.55	0.55	0.55	0.51
	L	9.96	16.22	1.55		0.63	0.46	0.38	0.33
40	P	9.90	17.06	12.45	266.86	1.00	1.00	0.96	0.74
	S	9.90	17.06	12.45	266.92	1.00	1.00	0.96	0.74
	SL	9.90	17.07	12.44	267.06	1.00	1.00	1.00	0.74
	SE	9.90	17.06	12.45	266.92	1.00	1.00	0.96	0.74
	G	9.90	18.74	11.10		0.94	0.94	0.94	0.90
	L	9.95	18.80	9.28		0.98	0.89	0.81	0.73
50	P	9.90	18.33	21.46	435.81	1.00	1.00	0.99	0.87
	S	9.90	18.33	21.46	435.91	1.00	1.00	0.99	0.87
	SL	9.90	18.34	21.46	435.91	1.00	1.00	1.00	0.87
	SE	9.90	18.33	21.46	435.91	1.00	1.00	0.99	0.87
	G	9.90	19.15	20.86		1.00	1.00	1.00	0.98
	L	9.95	19.40	18.89		1.00	0.98	0.95	0.90

(ⅱ)　$(f_S, f_L) = (20, 10)$

初期資産価値	モデル	証券価値				生存確率			
		短期債	長期債	株式	転換社債	1年目まで	2年目まで	3年目まで	4年目まで
10	P	9.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	S	9.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	SL	8.96	0.04	0.00	97.18	1.00	0.99	0.99	0.00
	SE	9.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	G	8.99	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
	L								
20	P	17.23	0.68	0.27	56.51	0.17	0.10	0.07	0.05
	S	17.23	0.68	0.27	56.51	0.17	0.10	0.07	0.05
	SL	17.17	0.76	0.26	66.57	0.43	0.31	0.29	0.05
	SE	17.23	0.68	0.27	56.51	0.17	0.10	0.07	0.05
	G	17.22	0.78	0.05		0.02	0.02	0.02	0.02
	L								
30	P	19.68	4.65	4.28	127.57	0.85	0.68	0.55	0.39
	S	19.68	4.65	4.28	127.62	0.85	0.68	0.55	0.39
	SL	19.68	4.69	4.25	127.73	0.85	0.68	0.60	0.39
	SE	19.68	4.65	4.28	127.62	0.85	0.68	0.55	0.39
	G	19.68	6.38	2.64		0.50	0.50	0.50	0.50
	L	19.91	6.33	1.47		0.62	0.45	0.37	0.32
40	P	19.80	7.56	12.01	260.59	0.99	0.95	0.88	0.73
	S	19.80	7.56	12.01	260.72	0.99	0.95	0.88	0.73
	SL	19.80	7.64	11.94	260.20	0.99	0.95	0.95	0.73
	SE	19.80	7.56	12.01	260.72	0.99	0.95	0.88	0.73
	G	19.80	9.22	10.73		0.92	0.92	0.92	0.92
	L	19.90	8.97	9.14		0.98	0.89	0.80	0.73
50	P	19.80	8.76	21.13	431.17	1.00	0.99	0.96	0.87
	S	19.80	8.76	21.13	431.38	1.00	0.99	0.96	0.87
	SL	19.80	8.77	21.12	431.30	1.00	0.99	0.97	0.87
	SE	19.80	8.76	21.13	431.38	1.00	0.99	0.96	0.87
	G	19.80	9.59	20.54		0.99	0.99	0.99	0.99
	L	19.90	9.59	18.74		1.00	0.98	0.95	0.90

表2　$\alpha = 0.5$の場合

(ⅰ)　$(f_S, f_L) = (10, 20)$

初期資産価値	モデル	証券価値 短期債	長期債	株式	転換社債	生存確率 1年目まで	2年目まで	3年目まで	4年目まで
10	P	5.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	S	5.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	SL	4.94	0.09	0.01	97.53	1.00	1.00	1.00	0.00
	SE	5.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	G	4.99	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
	L								
20	P	9.16	1.82	0.49	63.53	0.36	0.23	0.16	0.08
	S	9.16	1.82	0.49	63.53	0.36	0.23	0.16	0.08
	SL	8.54	3.10	0.63	100.46	1.00	1.00	1.00	0.13
	SE	9.16	1.82	0.49	63.53	0.36	0.23	0.16	0.08
	G	9.16	1.20	0.07		0.03	0.03	0.03	0.03
	L								
30	P	9.88	8.96	4.84	137.85	0.95	0.83	0.68	0.42
	S	9.88	8.96	4.84	137.87	0.95	0.83	0.68	0.42
	SL	9.80	9.42	4.76	145.66	1.00	1.00	1.00	0.44
	SE	9.88	8.96	4.84	137.87	0.95	0.83	0.68	0.42
	G	9.88	11.23	2.91		0.55	0.55	0.55	0.51
	L								
40	P	9.90	14.69	12.41	265.74	1.00	0.98	0.92	0.74
	S	9.90	14.69	12.41	265.80	1.00	0.98	0.92	0.74
	SL	9.90	14.79	12.37	266.68	1.00	1.00	1.00	0.74
	SE	9.90	14.69	12.41	265.80	1.00	0.98	0.92	0.74
	G	9.90	17.86	11.10		0.94	0.94	0.94	0.90
	L	9.96	12.28	1.11		0.44	0.32	0.25	0.22
50	P	9.90	17.12	21.45	435.67	1.00	1.00	0.98	0.87
	S	9.90	17.12	21.45	435.77	1.00	1.00	0.98	0.87
	SL	9.90	17.14	21.44	435.80	1.00	1.00	1.00	0.87
	SE	9.90	17.12	21.45	435.77	1.00	1.00	0.98	0.87
	G	9.90	19.02	20.86		1.00	1.00	1.00	0.98
	L	9.95	16.99	8.17		0.91	0.76	0.65	0.58

(ⅱ)　$(f_S, f_L) = (20, 10)$

初期資産価値	モデル	証券価値 短期債	長期債	株式	転換社債	生存確率 1年目まで	2年目まで	3年目まで	4年目まで
10	P	5.00	0.00	0.00	49.50	0.00	0.00	0.00	0.00
	S	5.01	0.02	0.01	97.53	1.00	1.00	1.00	0.00
	SL	5.01	0.02	0.01	97.53	1.00	1.00	1.00	0.00
	SE	5.01	0.02	0.01	97.53	1.00	1.00	1.00	0.00
	G	4.99	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00
	L								
20	P	10.03	0.04	0.02	50.18	0.01	0.01	0.00	0.00
	S	10.43	1.20	0.63	99.52	1.00	1.00	1.00	0.13
	SL	10.43	1.20	0.63	99.52	1.00	1.00	1.00	0.13
	SE	10.43	1.20	0.63	99.52	1.00	1.00	1.00	0.13
	G	10.07	0.21	0.05		0.02	0.02	0.02	0.02
	L								
30	P	15.58	1.77	1.82	91.46	0.36	0.26	0.21	0.18
	S	16.44	4.23	3.31	134.68	1.00	1.00	1.00	0.44
	SL	16.44	4.23	3.31	134.68	1.00	1.00	1.00	0.44
	SE	16.44	4.23	3.31	134.68	1.00	1.00	1.00	0.44
	G	16.21	4.80	2.64		0.50	0.50	0.50	0.50
	L								
40	P	19.00	5.71	9.66	232.24	0.85	0.72	0.64	0.59
	S	19.31	7.13	10.62	250.79	1.00	1.00	1.00	0.74
	SL	19.31	7.13	10.62	250.79	1.00	1.00	1.00	0.74
	SE	19.31	7.13	10.62	250.79	1.00	1.00	1.00	0.74
	G	19.33	8.89	10.73		0.92	0.92	0.92	0.92
	L	19.18	2.37	0.47		0.26	0.18	0.15	0.13
50	P	19.71	7.93	19.96	416.58	0.98	0.93	0.87	0.83
	S	19.77	8.41	20.31	422.31	1.00	1.00	1.00	0.87
	SL	19.77	8.41	20.31	422.31	1.00	1.00	1.00	0.87
	SE	19.77	8.41	20.31	422.31	1.00	1.00	1.00	0.87
	G	19.77	9.56	20.54		0.99	0.99	0.99	0.99
	L	19.83	7.04	7.05		0.85	0.68	0.57	0.50

既存モデルとの比較

1年目までの生存確率について、既存モデル（G・Lモデル）と償還猶予を考えないPモデルを比べると、$\alpha = 0.9, 0.5$ のどちらの場合でも、既存モデルでは短期債のウエイト w_S の変化に対してほとんど変化がない。それに対し、Pモデルでは w_S が高いほど1年目までの生存確率は高くなっている。また、4年目までの生存確率についてPモデルとGモデルを比較すると、Pモデルでは2・3年目でも倒産可能性があるため、生存確率はGモデルより小さく求められる。
さらに、P・Gモデルと比較して、Lモデルは各期までの生存確率は非常に低く。株式価値もLモデルが他と比べて著しく低く算出されることが分かる。これは、P・Gモデルが倒産の可能性がある時刻が離散的である Merton 型モデルであったのに対し、Lモデルは連続的に倒産可能性があるBlack-Cox型モデルになるためである。

償還猶予の与える影響

次に、新モデル間での比較をする。

まず、短期債債権者が短期債のみ保有するSモデルについてPモデルと比較する。w_S が資産回収率 α を下回る場合はSモデルの結果はPモデルのものと証券価値・生存確率ともほとんど同じである。しかし、w_S が α を上回る $\alpha = 0.5$、$(f_S, f_L) = (20,10)$ の場合はPモデルとSモデルの結果は大きく異なることが分かる。二つのモデルの違いは特に初期資産価値が低い場合に顕著で、3年目まで生存している確率はPモデルでは非常に小さいのに対し、Sモデルはほとんど1である。第3章の説明より、w_S が α を上回る場合には長期債の直前の短期債の満期では短期債が償還されなくとも短期債債権者は必ず償還猶予するが、データからそれ以前の短期債の満期で猶予する確率は高いことが分かる。また、SモデルではPモデルに比べて長期債の満期まで倒産しない確率も高くなるので、Sモデルの株式価値もPモデルのものと比較して大きくなっている。
Sモデルの結果と非常によく似た結果が出ているのがSEモデルである。これは、SEモデルで資産価値のボラティリティーが小さいとき、短期債の償還ができない低い資産価値の場合にもし償還猶予をしたとしても、猶予した直後の株式価値はほとんど 0 に等しいため、猶予するかどうかの判断に対しほとんど影響しないと解釈できる。

それに対し、SモデルとSLモデルを比較すると異なる部分が多い。これは、長期債が短期債についで資産配分の優先順位が高いため、資産価値が低い場合にも株式価値ほど小さくならず、猶予するかどうかの判断により強い影響力があるためである。特に顕著なのが $\alpha = 0.9$ の結果で、各期間の生存確率は初期資産価値や期間により大きく異なっている。これは、資産回収率が高いほど、倒産したときに劣後債である長期債も一部償還される可能性があるため、長期債を含めた価値比較をするときにより長期債の存在が重要になることを示している。

CB のプライシング結果

新モデルでの CB の価格は初期時点の株式価値のみではなく、初期資産価値が低い場合には CB の満期までの生存確率にも大きく依存する点が特徴である。従って、株式が著しく低い場合でも、CB の満期までの生存確率が大きい場合には CB の価格は額面の割引現在価値に近い値になるという性質が見られる。

６．結論

この論文では、企業が 2 種類の異なる満期の債券を保有していた場合の、債券および株式の価値および倒産確率の算出のための新たなフレームワークを提示した。短期的な倒産リスクが短期債務のウエイトにほとんど依存しない既存モデルの問題点は解消され、より現実的な倒産リスクの計算が出来るようになった成果は大きいと考えられる。さらに、このフレームワークを用いて、短期債が償還されない場合に短期債債権者が償還を猶予するケースについて分析できる点も大きい。日本企業の資金調達はいまだにメインバンク制度による銀行からの貸付が多く、企業と銀行のつながりは根強い。そのため、債務を返済できない場合に株主と銀行側が交渉することによって債務弁済猶予の措置がとられることはまれではなく、このような交渉が起こることを前提として倒産リスクを算出するモデルの構築は今後ますます必要になると考えられる。今後このモデルを用いた実証分析を課題としたい。

７．参考文献

Black, F., and J. C. Cox, 1976, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” Journal of Finance

Black, F., and M. Scholes, 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” Journal of Finance

Delianedis, G. and R. Geske, 1998, Credit Risk and Risk Beutral Default Probabilities: Information about Rating Migrations and Defaults,” UCLA, Anderson Working Paper

Geske, R. 1977, “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,” Journal of Financial and Quantitatives Analysis

Leland, H., 1994, “Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure,” Journal of Finance

Leland, H. and Toft, K, 1996, “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads,” Journal of Finance

Merton, R., 1974, “On the Pricing of Corporate Debt: the risk structure of interest rates,” Journal of Finance

池田亮一，小林孝雄，高橋明彦, 2005,「負債の期間構造と信用リスク評価」，東京大学 CIRJE ディスカッションペーパー, CIRJE-J-131

---

[1] 短期債債権者が長期債・株式の全てを保有している場合、倒産コストの仮定から短期債の各満期で倒産することは明らかに合理的ではない。従って分析対象からはずしている。
[2] S ケースで資産価値がある値より小さい場合には必ず猶予した方が良いことは、数学的な証明が得られなかった。筆者はいくつかの数値実験をして反例がなかったため、これは一般に成立するものと考えられる。
[3] 注 2 で証明されなかった事実が正しければ、SE ケースで資産価値がある値より大きい場合には必ず猶予した方が良いことが得られる。
[4] L モデルの結果のうち、求められた倒産閾値がすでに資産価値を上回る場合は、解なしとして空欄にしてある。