CIRJE-J-180

償還猶予を考慮した場合の債券価格の解析解

東京大学大学院経済学研究科博士課程
池田亮一

東京大学大学院経済学研究科
小林孝雄

2007 年 7 月

償還猶予を考慮した場合の債券価格の解析解

Closed-form Solution of Bond Prices with Postponement of Redemption

2007 年 7 月 4 日

池田　亮一
東京大学大学院経済学研究科博士課程学生
日本学術振興会 特別研究員

小林　孝雄
東京大学大学院経済学研究科教授

要約

この論文では，池田・小林（2007）における特殊ケースを考えることにより，債権者の償還猶予を考慮した場合の債券価格の解析解を得ることができることを示す．解析解の導出は Wiener-Hopf 型積分方程式を解くことに帰着されるが、このような導出は他に例がなく今後さらなる発展が期待される．

Abstract

This paper shows the analytical solution of a bond price with postponement of redemption by considering the special case of Ikeda and Kobayashi (2007). We can derive the solution by solving a Wiener-Hopf type integral equation, and such derivation does not have an example in others. Therefore the further development will be expected in various financial analyses.

１．イントロダクション

Merton(1974)の構造型アプローチは，債務としてゼロクーポン債を保有する企業の株式・債券価値および倒産確率を求めることができる信用リスク評価モデルである．Merton(1974)は資産価値を幾何ブラウン運動と外生的に与えた場合，株式価値は資産価値を原資産としたヨーロピアン・コール・オプションのブラックショールズ価格になることを示している．

我々は Merton(1974)を応用し，債券の引受け手である債権者が，満期での資産価値に応じて一定期間だけ償還を猶予するモデルを構築し，その債券価値の解析解を求めた．同様に債券の償還猶予を分析した池田・小林（2007）では，債券を短期負債と長期負債の 2 種類と仮定した．これにより，企業のガバナンス構造が信用リスクに与える影響を分析できるモデルになったが，その一方で短期・長期債券価値は数値計算によってしか求めることができなかった．この論文では，債券を一種類に仮定し，債権者の償還猶予の回数に制限をつけず時間同質的な性質を持つようにすることによって，Wiener-Hopf 型積分方程式を解くという問題に帰着されることを示す．このような導出方法は，過去に例がなく今後さらに発展が期待されるものである．

なお，モデル自体は，池田・小林（2007）で長期債の満期を無限大，かつ額面を 0 とした特殊ケースと考えることができる。従って，ここでは新たに計算結果を示すことは割愛し，数学的導出の説明に力点を置くことにする．

以下，第 2 章ではモデルの仮定，第 3 章では債券の価格式と積分方程式の導出，第 4 章では数学的解法，第 5 章では結論が述べられている．

２．モデル

企業の資産価値 A_t はリスク中立確率の下で幾何ブラウン運動に従うと仮定する．

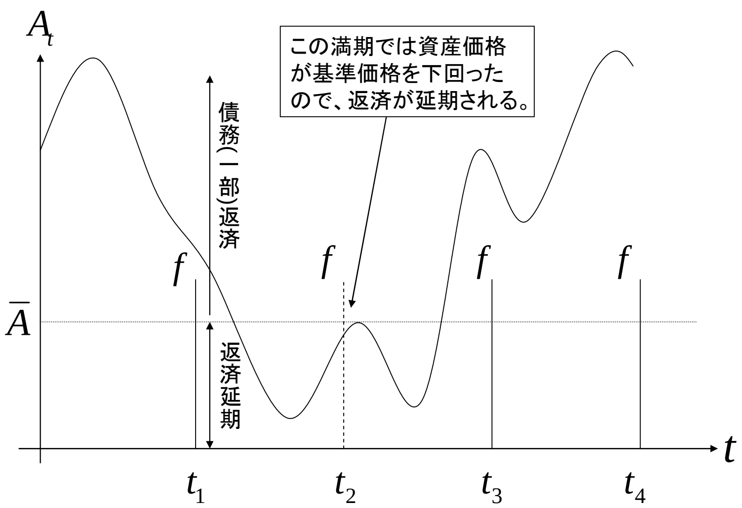
$$dA_t = A_t(rdt + \sigma dW_t) \quad W_t \text{は標準ブラウン運動} \ (t \geq 0)$$

企業は 0 時点において年限 ΔT，額面 f の発行済み債券を 1 単位保有している．企業は $t_i = i\Delta T \ (i \in N)$ における資産価値 A_{t_i} が，時刻や状態に依存しない基準価値 $\underline{A}$ を上回った場合にのみ，債権者に額面を全額償還する．償還は年限 ΔT，額面 f の債券を新たに 1 単位発行し，不足分は増資をすることにより行う．全額償還が可能であるにも関わらず，戦略的にあえて償還しないということはできないとする．

一方，A_{t_i} が，$\underline{A}$ を下回った場合，債権者は償還を猶予するか，倒産し資産を流動化するか

を選択することができる．償還を猶予する場合，またΔT後に償還日が訪れると仮定し，さらにその際も株主が償還しないばあいには，債権者はさらにΔT年猶予することが可能であると仮定する．また，債務返済が延期された場合には，新たな債券は発行されないと仮定する．

このように仮定すると，このモデルでは債券発行日（または延期決定日）直後における債務の期間構造はその時刻や過去の債務の返済履歴（つまり資産価値の過去の経路）に依存しない時間同質性を持つ無限期間モデルになる[1].



３．債券・株式価格と積分方程式の導出

３．１　債券・株式価格

前章で述べたモデルの性質により，債券発行日直後における債券の価格はその日の資産価値にのみ依存して決まる．

いま，額面が全額償還される資産価値の下限$\underline{A}$，および債権者が猶予するような資産価値の上限$\overline{A}$を所与と仮定する($\overline{A} \le \underline{A}$)．ある債券発行日における資産価値を$A$，$\Delta T$後の資産価値を$\tilde{A}$とし，債券価格の関数形を$F(A)$とおくと，

$$F(A;\overline{A},\underline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[P(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}\ge\overline{A}\}} + F(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<\overline{A}\}}] \qquad (3.1)$$

と求められる．ただし$P(\tilde{A})$は債務返済が延期されなかった場合の債権者へのペイオフであ

1　このような理由から,以下では,「債券発行日直後」と表現した場合には,債券が発行されずに債務返済が延期された場合も含まれることにする．

り，

$$P(A)=\begin{cases} f & \text{if } A>\underline{A} \\ \alpha A & \text{if } \bar{A}\le A\le \underline{A} \end{cases}$$

である．さらに株式価値は以下のようになる．

$$S(A;\bar{A},\underline{A})=\exp(-r\Delta T)E[(S(\tilde{A})-(f-F(\tilde{A})))1_{\{\tilde{A}\ge\underline{A}\}}+S(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<\bar{A}\}}]$$

３．２　積分方程式の導出

さて，ここで(3.1)式の債券価格式に着目する． $\tilde{A}$ は幾何ブラウン運動の性質より，

$$\log(\tilde{A})\sim N(\log(A)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T,\sigma^2\Delta T) \tag{3.2}$$

を満たすことに注意する． $N(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数である．
いま，便宜的に

$$A=\bar{A}\exp(-x)\Leftrightarrow x=\log(\frac{\bar{A}}{A})$$

$$\tilde{A}=\bar{A}\exp(-y)\Leftrightarrow y=\log(\frac{\bar{A}}{\tilde{A}})$$

と変数変換すると(3.1)式は新たに

$$F(\bar{A}\exp(-x))=\exp(-r\Delta T)E[P(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y\le 0\}}+F(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y>0\}}],$$

(3.2)式は

$$y\sim N(x-(r-1/2\sigma^2)\Delta T,\sigma^2\Delta T)$$

と書き換えられる．
これを新たに

$$F(\bar{A}\exp(-x))=\varphi(x),$$

$$\exp(-r\Delta T)E[P(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y\le 0\}}]=f(x)$$

と置き直した上で(3.1)を積分表示すると，

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy \tag{3.3}$$

ただし，

$$k(x)=\exp(-r\Delta T)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-(r-1/2\sigma^2)\Delta T)^2}{2\sigma^2\Delta T}) \tag{3.4}$$

とした積分方程式が得られる．

３．２　Wiener-Hopf 方程式

積分方程式のうち，f を既知関数，φ を未知関数で，積分区間が 0 から正の無限大である(3.3)の形式のものを Wiener-Hopf 方程式という．この方程式は宇宙空間における光の流れに関する Milne の 1921 年の研究に端を発し, その後 Weiner-Hopf の 1931 年の仕事において上の形に一般化され研究された．

$k(x)$ が(3.4)式で表される場合の(3.3)の方程式の解は以下のように表される．

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty l(x,y) f(y)dy$$

$$l(x,y) = l_+(x-y) + l_-(x-y) + \int_0^{\min(x,y)} l_+(x-z) l_-(z-y)dz$$

$$l_+(x) = \begin{cases} i\sum_{j\in Z} \exp(-h(q_j^+) + iq_j^+ x) \prod_{k\neq j} \dfrac{1}{q_j^+ - q_k^+} & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

$$l_-(x) = \begin{cases} 0 & (x>0) \\ -i\sum_{j\in Z} \exp(iq_j^- x) \prod_{k\neq j} \dfrac{1}{q_j^- - q_k^-} & (x<0) \end{cases}$$

ただし，

$$h(\xi) = \log\left(\frac{1-K(\xi)}{\prod_{j\in Z}(\xi - q_j^+) \prod_{j\in Z}(\xi - q_j^-)} \right)$$

$$1-K(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\exp(-i\xi x)dx$$
$$= 1 - R\cdot\exp(-\frac{b^2\xi^2}{2} - ic\xi)$$
$$R = \exp(-r\Delta T)$$
$$b = \sigma\sqrt{\Delta T}$$
$$c = (r - 1/2\sigma^2)\Delta T$$

である．また q_j^+，q_j^- は $1-K(\xi)$ の零点であり，$j \in Z$ に対し，

$$q_j^+ + q_j^- = -\frac{2ic}{b^2}$$

$$q_j^+ q_j^- = -\frac{2}{b^2}(\log R + 2\pi ji)$$

で定められる．
この解法を次章から述べる．

４．積分方程式の解法

４．１ 種々の積分方程式

いま，4 種類の異なる積分方程式を比較する．ただし，$k \in L^1(R)$ [2]を所与の関数とし，$f \in L^1(R)$ を既知関数，φ を未知関数とする．

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \ (-\infty < x < \infty) \quad (4.1)$$

$$\varphi(x) - \int_{0}^{x} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \ (0 < x < \infty) \quad (4.2)$$

$$\varphi(x) - \int_{x}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \ (0 < x < \infty) \quad (4.3)$$

$$\varphi(x) - \int_{0}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \ (0 < x < \infty) \quad (4.4)$$

どれも似た構造に見えるが 4 つの積分方程式は積分区間が異なる．
（4.1）は積分区間が負の無限大から正の無限大までである．この場合は両辺をフーリエ変換するのが一般的である．関数 k ，φ，f のフーリエ変換をそれぞれ $K(\xi)$ $\Phi(\xi)$ $F(\xi)$ とすると，たたみこみ定理により，

$$(1-K(\xi))\Phi(\xi) = F(\xi) \ (\xi \in R) \quad (4.5)$$

となる．もし

$$1-K(\xi) \neq 0 \ (\xi \in R)$$

が成立するならば，(4.5)の両辺を $1-K(\xi)$ で割ってフーリエ逆変換することによって，一意な解 $\varphi(x)$ が得られる事が知られている．
（4.2)，（4.3）は積分区間がそれぞれ 0 から x > 0 までと x >0 から正の無限大までだが，これらは共に（4.1）の方法を応用して解くことができる． f ，φ を共に $x \leq 0$ では 0 と拡張し，さらに k について(4.2)では $x \leq 0$ で 0，(4.3)では $x > 0$ で 0 と拡張することによって，

---

[2] ルベーグ積分の意味で $\int_I |f(x)|dx < \infty$ となる I 上の関数 f 全体を $L^1(I)$ と書く.また, R は実数全体を表す集合である.以下. C は複素数全体, Z は整数全体の集合を表す.

(4.5)の形になることが容易に分かる．さらに，もし，

$$1-K(\xi)\neq 0\ (\xi\in R)$$

の他に，(4.2)では

$$1-K(\xi)\neq 0\ (\xi\in C_-)$$

が，(4.3)では

$$1-K(\xi)\neq 0\ (\xi\in C_+)$$

が同時に成り立っているならば，$\varphi(x)$ はともに一意に決まることが知られている．

しかし(4.4)はこのように関数の単純な拡張によって他の三つの積分方程式の形に落とし込むことができない．そこで，(4.4)の左辺をうまく(4.2)，(4.3)の形を含む式に分解して解く方針で，以後説明を展開する．

４．２　Wiener-Hopf 型積分方程式の解法[3]

(4.4)式の左辺の作用素

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\varphi(x):=\varphi(x)-\int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy$$

を Wiener-Hopf（WH）作用素といい，

$$1-K(\xi):=1-\int_{-\infty}^\infty k(x)\exp(-i\xi x)dx$$

を WH 作用素 $(\mathbf{I}-\mathbf{K})$ のシンボルと呼ぶ．$L^1(R)$，$L^1(0,\infty)$ のフーリエ変換 $\Im$ による像をそれぞれ $\Re$ $\Re_+$ で表し，$\Re$ から $\Re_+$ への射影を P_+ と書く．

$$\Re:=\Im(L^1(R))=\left\{G(\xi)\,|\,G(\xi)=\int_{-\infty}^\infty g(x)\exp(-i\xi x)dx,\ g\in L^1(R)\right\}$$

$$\Re_+:=\Im(L^1(0,\infty))=\left\{G(\xi)\,|\,G(\xi)=\int_0^\infty g(x)\exp(-i\xi x)dx,\ g\in L^1(0,\infty)\right\}$$

$$P_+:\int_{-\infty}^\infty g(x)\exp(-i\xi x)dx\mapsto\int_0^\infty g(x)\exp(-i\xi x)dx$$

(4.4)の未知関数 φ と既知関数 f を $L^1(0,\infty)$ に属すものとし，それらの片側フーリエ変換を大文字で表す．

$$\Phi(\xi):=\int_0^\infty \varphi(x)\exp(-i\xi x)dx\qquad F(\xi):=\int_0^\infty f(x)\exp(-i\xi x)dx$$

はじめに，フーリエ変換の一意性とたたみこみ定理により以下に注意する．

補題 1

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\varphi=f\Leftrightarrow P_+[(1-K(\xi)\Phi(\xi)]=F(\xi)$$

---

[3] この節は上村（2001）を参考にしている．

が言える．■

一般には２つの WH 作用素$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)$，$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$の積$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$は WH 作用素にならない．ただし次が言える．

補題２

２つの WH 作用素

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_i)\varphi(x):=\varphi(x)-\int_0^\infty k_i(x-y)\varphi(y)dy \quad (i=1,2)$$

において，$k_1(x)=0\ (x>0)$，$k_2(x)=0\ (x<0)$の少なくとも一方が成立しているとする．このとき，$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$も WH 作用素になりそのシンボルは$(1-K_1(\xi))(1-K_2(\xi))$で与えられる．■

（証明は上村（2001）参照）

補題１，２を図式化すると以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
L_+^1 \arrow[r, "\mathfrak{I}"] \arrow[d, "\mathbf{I}-\mathbf{K}_2"'] & \mathfrak{R}_+ \arrow[d, "P_+(1-K_2(\xi))\cdot"] \\
L_+^1 \arrow[r, "\mathfrak{I}"] \arrow[d, "\mathbf{I}-\mathbf{K}_1"'] & \mathfrak{R}_+ \arrow[d, "P_+(1-K_1(\xi))\cdot"] \\
L_+^1 \arrow[r, "\mathfrak{I}"] & \mathfrak{R}_+
\end{tikzcd}$$

ここで（4.4）を解くための鍵となる以下の補題が成立する．

補題３

$$1-K(\xi)\neq 0\ (\xi\in R)$$

を仮定する．このとき$1-K(\xi)$は

$$1-K(\xi)=(1-K_-(\xi))\left(\frac{\xi-i}{\xi+i}\right)^{\kappa}(1-K_+(\xi))\ (\xi\in R)$$

の形に分解される．ただし，

$$\kappa := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_{\xi}\arg(1-K(\xi)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\arg(1-K(\xi)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

で定義される回転数(winding number)である．また，$1-K_{\pm}(\xi)$ は $C_{\mp} := \left\{\xi \mid \mp \mathrm{Im}\,\xi > 0\right\}$ で

正則，その閉包 $\overline{C}_{\mp}$ で連続で零点を持たず， $k_{\pm} \in L^{1}(0,\pm\infty)$ によって，

$$1-K_{+}(\xi) = 1-\int_{0}^{\infty} k_{+}(x)\exp(-i\xi x)dx \ (\xi \in R)$$

$$1-K_{-}(\xi) = 1-\int_{-\infty}^{0} k_{-}(x)\exp(-i\xi x)dx \ (\xi \in R)$$

と表される． ■

この補題 3 の証明は以下の定理 4 及び 4’がエッセンスである．

定理 4

D を複素平面 C における領域で，$0 \in D$ とする．$\phi(z)$ を D において正則な関数で $\phi(0) = 0$ を満たすものとする． $f \in L^{1}(R)$ に対し，閉曲線 $z = \Im f(\xi)$ $(-\infty \le \xi \le \infty)$ が D 内にあるならば，

$$\phi(\Im f(\xi)) = \Im g(\xi) \ (\xi \in R)$$

となる

$$g \in L^{1}(R)$$

がある． ■

定理 4’

定理 4 の仮定に加えて，さらに $f(x) = 0 (x < 0)$， $\Im f(\xi) \in D$ $(\xi \in \overline{C}_{-})$ を仮定する．このとき定理 4 で得られた $g \in L^{1}(R)$ は $g(x) = 0$ $(x < 0)$ を満たす． ■

（定理４・４’とも証明は上村（2001）参照のこと）

以降，回転数 $\kappa = 0$ の場合のみ考える．

補題 3 を証明する．

証明

定理４より，$\phi(z)=1-\exp(z)$ とおくと，

$$1-K(\xi)=\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

となる $g\in L^1(R)$ が存在する．

そこで，$K_\pm$ を

$$1-K_+(\xi):=\exp\left[\int_{0}^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

$$1-K_-(\xi):=\exp\left[\int_{-\infty}^{0} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

と定義する．

$K_+(\xi)=1-\exp\left[\int_{0}^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$ より，$\phi(z)=1-\exp(z)$，$D=C$ とおいて定理４´

を適用することにより，$k_+\in L^1(0,\infty)$ の存在がわかる．同様の議論により，$k_-\in L^1(-\infty,0)$

の存在がわかり，補題３が証明された． ■

作用素 $(\mathbf{I}-\mathbf{K})$ のシンボル $1-K(\xi)$ を補題３のように分解し得られた $k_\pm(x)$ によって WH 作用素 $(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)$ を

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)\varphi(x):=\varphi(x)-\int_0^\infty k_\pm(x-y)\varphi(y)dy$$

で定義する．このとき，

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi(x)&=\varphi(x)-\int_0^\infty k_+(x-y)\varphi(y)dy\\&=\varphi(x)-\int_0^x k_+(x-y)\varphi(y)dy\end{aligned}$$

より，積分方程式

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi(x)=f(x)$$

は(4.2)と同形，

同様に，

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)\varphi(x)&=\varphi(x)-\int_0^\infty k_-(x-y)\varphi(y)dy\\&=\varphi(x)-\int_x^\infty k_-(x-y)\varphi(y)dy\end{aligned}$$

より

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)\varphi(x)=f(x)$$

は（4.3）と同形となり，共に積分方程式を解くことができる．

いま，補題２より

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)$$

であるから，よって（4.4）の積分方程式は

$$\varphi(x)=(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)^{-1}f(x)$$

として求めることができることが分かる．

ここで，より具体的な解の形式を得るため以下の系を用いる．

系 5

定理 4´において $D=C\setminus\{1\}$，$\phi(z)=\dfrac{z}{1-z}$ とする．このとき $1-\Im f(\xi)\neq 0\ (\xi\in\bar{C}_-)$ を満たす $f\in L^1(0,\infty)$ に対し，

$$\frac{1}{1-\Im f(\xi)}=1+\Im g(\xi)\ (\xi\in R)$$

となる $g\in L^1(0,\infty)$ が存在する． ■

証明は上村（2001）参照のこと．

補題 3 における $K_\pm(\xi)$ に系 5 を適用すると，

$$\frac{1}{1-K_\pm(\xi)}=1+\int_0^{\pm\infty}l_\pm(x)\exp(-i\xi x)dx\ (\xi\in R)$$

となる $l_\pm\in L^1(0,\pm\infty)$ の存在が得られる．

これを用いて $(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)\varphi(x)=f(x)$ の両辺をフーリエ変換すると

$$(1-K_\pm(\xi))\Phi(\xi)=F(\xi)\ (\xi\in R)$$

である．両辺 $(1-K_\pm(\xi))\neq 0\ (\xi\in R)$ で割って

$$\begin{aligned}\Phi(\xi)&=F(\xi)\frac{1}{(1-K_\pm(\xi))}\\&=F(\xi)\left(1+\int_0^{\pm\infty}l_\pm(x)\exp(-i\xi x)dx\right)\end{aligned}$$

であるから，両辺フーリエ逆変換して

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}l_\pm(x-y)f(y)dy$$

を得る．つまりこれから

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)^{-1}f(x)=f(x)+\int_0^{\infty}l_\pm(x-y)f(y)dy\ (x\geq 0)$$

の表現が得られるので，

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)^{-1}f(x)\\ &= f(x)+\int_0^\infty l_-(x-y)f(y)dy\\ &\quad +\int_0^\infty l_+(x-y)dy\left\{f(y)+\int_0^\infty l_-(y-z)f(z)dz\right\}\\ &= f(x)+[\int_0^\infty l_-(x-y)f(y)dy+\int_0^\infty l_+(x-y)f(y)dy\\ &\qquad +\int_0^\infty\left(\int_0^\infty l_+(x-z)l_-(z-y)dz\right)f(y)dy]\end{aligned}$$

$l_\pm(\mp x)=0\ (x\geq 0)$ に注意して

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty l(x,y)f(y)dy$$

ただし

$$l(x,y):=l_+(x-y)+l_-(x-y)+\int_0^{\max(x,y)}l_+(x-z)l_-(z-y)dz$$

が得られる．

４．３　計算

では，実際に我々の積分方程式

$$\varphi(x)-\int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy=f(x)$$

$$k(x)=\exp(-r\Delta T)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-(r-1/2\sigma^2)\Delta T)^2}{2\sigma^2\Delta T})$$

を解いてみる．

計算の流れは

Step 1．フーリエ変換より WH 作用素のシンボル $1-K(\xi)$ を求める．

Step 2．補題 3 に沿って，$g(x)$ を求めることにより $1-K(\xi)=(1-K_-(\xi))(1-K_+(\xi))$ に分解する．

Step 3．$1-K_\pm(\xi)$ からフーリエ逆変換により $l_\pm(x)$ を求め，解を得る．

となる．

Step1

$$R=\exp(-r\Delta T)$$

$$b = \sigma\sqrt{\Delta T}$$
$$c = (r - 1/2\sigma^2)\Delta T$$

とおくと

$$k(x) = R\cdot\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-c)^2}{2b^2})$$

であるから，

$$\begin{aligned}
K(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\exp(-i\xi x)dx \\
&= R\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-c)^2}{2b^2})\exp(-i\xi x)dx \\
&(= R\cdot(N(c,b^2)\text{の特性関数の共役複素関数})) \\
&= R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2 - ic\xi)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$1 - K(\xi) = 1 - R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2 - ic\xi)$$

が得られる．

Step2

この$1-K(\xi)$は$\xi\in R$で$1-K(\xi)\neq 0$である．また回転数κについて，$-\infty\le\xi\le\infty$でのCにおける閉曲線$1-K(\xi)$は1を出発してC上をぐるぐる回ってまた1に戻ってくるが，その間の$1-K(\xi)$の実部がとる最小値は$\xi=0$のとき$1-R(>0)$である．よって，$-\infty\le\xi\le\infty$で$1-K(\xi)$は0の周りを1度も回らないことがわかるので，
$\kappa = 0$
が言える．

よって補題3の証明より

$$1 - K(\xi) = \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

となる$g(x)$が存在する．
フーリエ逆変換をして，

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log(1-K(\xi))\exp(i\xi x)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\log(1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2 - ic\xi))\exp(i\xi x)d\xi
\end{aligned}$$

と求められる． $g(x)$ はこれ以上簡単な形にならないが，これを用いて $1-K_{\pm}(\xi)$ を求めるのが本来の目標なので，特に問題はない．
ここで，$1-K_{\pm}(\xi)$ を求める際に $\log(1-K(\xi))$ の正則性が問題になるので，$1-K(\xi)$ の零点を $\xi \in C$ で調べる．

$$1-R\cdot\exp\left(-\frac{b^2}{2}\xi^2-ic\xi\right)=0$$

より

$$\frac{b^2}{2}\xi^2+ic\xi+\log R+i2\pi j=0\ (j\in Z)$$

に注意して

$$\begin{aligned}\xi &= i\cdot\left(-\frac{c}{b^2}\pm\sqrt{\frac{c^2}{b^4}-\frac{2}{b^2}(\log R+i2\pi j)}\right)\\ &= q_j^+, q_j^-\end{aligned}$$

と表される．ただし，

$$q_j^+ + q_j^- = -\frac{2ic}{b^2}$$

$$q_j^+ q_j^- = -\frac{2}{b^2}(\log R+2\pi ji)$$

で，$\pm\mathrm{Im}(q_j^{\pm})>0$ である．

いま $1-K(\xi)$ の零点 $q_j^{\pm}\ (j\in Z)$ を用いると，

$$h(\xi) := \log\left(\frac{1-K(\xi)}{\prod_j(\xi-q_j^+)\prod_j(\xi-q_j^-)}\right)$$

は C 上で正則な関数になる．このとき，

$$\log(1-K(\xi)) = h(\xi)+\sum_j\log(\xi-q_j^+)+\sum_j\log(\xi-q_j^-)$$

なので，$\log(1-K(\xi))$ は C 上で正則な関数 $h(\xi)$，$C_{\mp}$ でのみ正則な関数 $\sum_j(\xi-q_j^{\pm})$ の 3 つの関数の和に分解される．
これを $g(x)$ の式に代入すると

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(h(\xi)+\sum_j\log(\xi-q_j^+)+\sum_j\log(\xi-q_j^-)\right)\exp(i\xi x)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)\exp(i\xi x)d\xi$$
$$+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi-q_j^+)\exp(i\xi x)d\xi+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi-q_j^-)\exp(i\xi x)d\xi)$$

であるが， $\forall j\in Z$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi-q_j^{\pm})\exp(i\xi x)d\xi=0\ (\mp x>0)$$

であるから，

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)\exp(i\xi x)d\xi+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi-q_j^+)\exp(i\xi x)d\xi) & (x>0)\\ \frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)\exp(i\xi x)d\xi+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi-q_j^-)\exp(i\xi x)d\xi) & (x<0)\end{cases}$$

である．

これに注意して $1-K_{\pm}(\xi)$ を求める．

$$\log(1-K_+(\xi))=\int_0^{\infty}g(x)\exp(-i\xi x)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi')\exp(i\xi' x)d\xi'+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi'-q_j^+)\exp(i\xi' x)d\xi')\exp(-i\xi x)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi')d\xi'\int_0^{\infty}\exp(-i(\xi-\xi')x)dx$$
$$+\sum_j\int_{-\infty}^{\infty}\log(\xi'-q_j^+)d\xi'\int_0^{\infty}\exp(-i(\xi-\xi')x)dx)$$

である．

ここで， $\int_0^{\infty}\exp(-i\xi x)dx$ は単位階段関数

$$u(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

のフーリエ変換である．その結果はデルタ関数を用いて

$$\Im u(t)=\pi\delta(\xi)+\frac{1}{i\xi}$$

となることが知られていることから，

$$\log(1-K_+(\xi)) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi')\left(\pi\delta(\xi-\xi')+\frac{1}{i(\xi-\xi')}\right)d\xi' \right.$$
$$\left. +\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \log(\xi'-q_j^+)\left(\pi\delta(\xi-\xi')+\frac{1}{i(\xi-\xi')}\right)d\xi'\right)$$

である．デルタ関数の性質を用いながら，標準的な複素積分の計算することにより，

$$\log(1-K_+(\xi)) = h(\xi)+\sum_j \log(\xi-q_j^+)$$

ゆえに

$$1-K_+(\xi) = \exp(h(\xi))\prod_j (\xi-q_j^+)$$

が得られる．
同様の計算により

$$1-K_-(\xi) = \prod_j (\xi-q_j^-)$$

が得られる．また，解の形式から $1-K_\pm(\xi)$ は明らかに $C_\mp$ で正則で，その閉包 $\bar{C}_\mp$ で連続で零点持たないことが分かり，補題 3 の条件を満たしていることが確かめられる．

Step3

系 5 より $l_\pm(x)$ を求める．
$x>0$ で

$$l_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-K_+(\xi)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp(-h(\xi))\frac{1}{\prod_j(\xi-q_j^+)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$
$$= i\cdot\sum_j \mathop{\mathrm{Res}}_{q_j^+}\left(\exp(-h(\xi))\frac{1}{\prod_j(\xi-q_j^+)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

三つ目の式変形では留数定理を用いた．
いま，

$$\operatorname*{Res}_{q_j^+}\left(\exp(-h(\xi))\frac{1}{\prod_k(\xi-q_k^+)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

$$=\lim_{\xi\to q_j^+}\left(\exp(-h(\xi))\frac{1}{\prod_{k\neq j}(\xi-q_k^+)}-(\xi-q_j^+)\right)\exp(i\xi x)$$

$$=\frac{\exp(-h(\xi)+iq_j^+x)}{\prod_{k\neq j}(q_j^+-q_k^+)}$$

より,

$$l_+(x)=i\cdot\sum_j\frac{\exp(-h(q_k^+)+iq_j^+x)}{\prod_{k\neq j}(\xi-q_k^+)}\ (j\in Z)$$

$x<0$ では 0 である.

同様に,

$$l_-(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-K_-(\xi)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\prod_j(\xi-q_j^-)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

$$=-i\cdot\sum_j\operatorname*{Res}_{q_j^-}\left(\frac{1}{\prod_j(\xi-q_j^-)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

である.

$$\operatorname*{Res}_{q_j^-}\left(\frac{1}{\prod_k(\xi-q_k^-)}-1\right)\exp(i\xi x)d\xi$$

$$=\lim_{\xi\to q_j^-}\left(\frac{1}{\prod_{k\neq j}(\xi-q_k^-)}-(\xi-q_j^-)\right)\exp(i\xi x)$$

$$=\frac{\exp(iq_j^-x)}{\prod_{k\neq j}(q_j^--q_k^-)}$$

より,

$$l_{-}(x) = -i \cdot \sum_{j} \frac{\exp(iq_{j}^{-}x)}{\prod_{k \neq j}(q_{j}^{-} - q_{k}^{-})} \quad (j \in Z)$$

$x > 0$ では 0 である．

これらを

$$l(x, y) = l_{+}(x - y) + l_{-}(x - y) + \int_{0}^{\max(x,y)} l_{+}(x - z) l_{-}(z - y) dz$$

に代入し

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{0}^{\infty} l(x, y) f(y) dy$$

で３．２節の解が得られる．

５．結論

この論文では，構造型アプローチを用いて償還猶予がある場合の債券価格の解析解を導出した．解析解の導出には変形して得られた積分方程式を，フーリエ変換を用いて解くという数学的に高度な技術を用いたが，得られた解の形式は複雑であり経済学的解釈ができないものである．さらに株式価値については解析解の導出を達成することができなかった．今後は，今回できなかった株式価値の解析解の導出や，債券価値の解析解を解釈できるような形に書き換えられるかについての数学的な研究を行う必要がある．さらに，池田・小林（2007）で行った，満期が異なる 2 種類の債券をインプットしたモデルへの適用も課題としたい．

参考文献

Black， F.， and J. C. Cox， 1976， “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions，” Journal of Finance

Black， F.， and M. Scholes， 1973， “The Pricing of Options and Corporate Liabilities，” Journal of Finance

Delianedis， G. and R. Geske， 1998， Credit Risk and Risk Beutral Default Probabilities: Information about Rating Migrations and Defaults，” UCLA， Anderson Working Paper

Geske， R. 1977， “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options，” Journal of Financial and Quantitatives Analysis

Leland， H.， 1994， “Corporate Debt Value， Bond Covenants， and Optimal Capital

Structure，” Journal of Finance
Leland， H. and Toft， K， 1996， “Optimal Capital Structure， Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads，” Journal of Finance
Merton， R.， 1974， “On the Pricing of Corporate Debt: the risk structure of interest rates，” Journal of Finance
上村豊，2001,「積分方程式―逆問題の視点から―」，共立出版
池田亮一， 小林孝雄，高橋明彦，2005,「負債の期間構造と信用リスク評価」， 東京大学 CIRJE ディスカッションペーパー， CIRJE-J-131
池田亮一，小林孝雄，2007,「非経路依存型バランスシートアプローチ」，東京大学 CARF ディスカッションペーパー，CARF-J-038