CIRJE-J-218

# 景気判断と平滑化問題

## （GDP 公表値を巡って）

統計数理研究所
佐藤整尚

東京大学大学院経済学研究科
国友直人

2010 年4月

# Measuring Business Conditions and A Smoothing Problem :
# A Case of Japanese GDP

**Abstract**

The Japanese Government reports the annualized estimates of the growth rates of GDP and its main components once in 3 months, and then revises them once in a while. There have been some critical comments on the accuracy of those numbers mainly from economists who want to evaluate the current business conditions in Japan. We suggest possible reasons why those estimates fluctuate unexpectedly in recent years and then we propose a new statistical method of estimating the annualized growth rates of GDP and its components.

# 景気判断と平滑化問題*

(GDP 公表値を巡って)

佐藤整尚†
&
国友直人‡

2010 年 4 月 1 日

**要約**

内閣府が定期的に公表している GDP 成長率の年率換算値の計算方法には誤解されやすい問題があることを指摘する。そこで現行の年率換算値に代わりうるより安定的な公表系列として「GDP 年率推定値」を構成する新しい統計的方法を提案する。シミュレーション実験及び過去のデータを利用した分析によれば、ここで提案する方法を用いることでより安定した GDP 年率推定値が得られることを指摘する。

**鍵言葉**

GDP 年率換算値, 年率推定値, 時系列の成分分解, 状態推定と統計的フィルタリング, DECOMP

---

*SK10-4-1-2. この原稿は 2009 年 12 月 22 日に東京大学日本経済国際共同研究センター (CIRGE) にて開催された政府統計に関する「応用統計ワークショップ」での報告内容に加筆・修正を加えた原稿である。山本拓氏 (日本大学) および岩田一政氏 (内閣府) のコメントに感謝する。

†統計数理研究所

‡東京大学経済学部

## 1. はじめに

近年の日本経済では多くのマクロ経済時系列は激しい変動を示している。特に2005 年頃からの景気の回復及び 2008 年-2009 年にかけての大きな落ち込みとそれからの若干の回復基調についての理解は、この間に公表されたマクロ経済指標の解釈とともに、エコノミストの間において大きく意見が分かれている。

こうした日本のマクロ経済を取り巻く経済変動を背景にして、内閣府が作成・公表している GDP 統計、特に四半期 GDP 速報値については幾つかの根強い批判がある。第一には公表される四半期データの GDP 伸び率は刻々とかなりの変動を示しており、ときにはゼロ付近においてプラスとマイナスが入れ替わるなど、GDP 速報値による景気判断を困難なものにしている。こうした問題は GDP 速報値にもとづき景気の現況を判断しているエコノミスト、あるいは経済政策を立案する政府関係者などにとり見過ごせない問題となっている。第二には GDP 速報値の数値が報道され、しばらくあとになり速報値が改訂され、さらにかなり時間が経過したのちに確報値が公表される。こうした同一期の (真の)GDP の公表値が時間と共に変化して数値が互いに異なり、しかも速報値、速報値の改訂値、さらに確報値の間の数値のギャップがしばしばかなりの大きさとなる、ことも指摘されている。特に近年での経験から、米国や欧州主要国など先進諸国と比べても GDP 統計をめぐるこうした改訂幅が相対的に大きいので、速報値の信頼性が十分でないことも指摘されている。こうしたコメントは日本政府の統計当局者にとっては公表している統計数値の信頼性の基盤を揺るがしかねないだけに、十分に検討すべき課題となっている。ここで重要な統計的問題は、エコノミストや経済学者の多くがマクロ経済指標の原系列ではなく、GDP やその構成要素の変化率・伸び率に関して議論していることである。

本稿ではこうした日本の GDP 統計をめぐる最近の問題について統計学の立場からどのように理解したらよいか、ということを考察する。そして、我々の考察より導かれる GDP 統計に関する若干の改善策について議論する。ここで、この間に内外のエコノミストなどを中心に日本の GDP 統計に関して議論されていることは、時系列データ解析に関する統計学から見ても自明でないことがとりわけ重要であろう。実は主として年率換算の GDP 成長率に関する観察事実は時系列分析における観測誤差 (measurement errors) をめぐる基本的でかつ重要な幾つかの問題と関わっている。

我々には意外なことであるが、こうした問題はこの間の議論の中であまり注意が払われていないようである。しかしながら観測誤差が無視できないので真の GDP を巡る議論が混乱するという理解に立てば、統計的時系列分析 (statistical time series analysis) と呼ばれている統計学的議論なしには問題の根本的な解決策をほどこすことは容易ではないと考えられる。そこで本稿では時系列分析に関するこの間での統計学の展開を踏まえた立場から一定の改善案を提示できることを指摘したい[1] 。

本稿の 2 節では現行の年率換算値の推定方法・公表方法にまつわる問題点を指摘し、より安定的で信頼できる推定方法を提案する。次に 3 節では本稿で提案する方法により様々な状況でも安定的な数値が得られることを指摘する。さらに 4 節ではGDP をめぐる問題と時系列分析の関係をさらに説明し、5 節では本稿の結論を述べる。附論として時系列分析で利用する統計モデルの推定について、統計的時系列分析についての非専門家を念頭に追加的な説明を与える。

## 2. 四半期データと年率推定法

### 四半期変化率の解釈

GDP 統計は日本経済の基本的動向を理解する上でもっとも重要な経済指標の一つである。特に定期的に内閣府より発表されている実質 GDP の速報値はその数値が公表される度に、その時点における人々の景気動向の理解を通じて株価など市場動向にも大きな影響を与えている。GDP 統計は四半期データであるので３ヶ月毎に公表されているが、特に前期比の動向に関心が集まる傾向にある。定期的に集計・公表される数値は３ヶ月期間のフローの集計値であるので通常は「GDP 年率換算値」として３ヶ月で得られるフローの原数値に対して季節調整を施し、季節調整系列の前期比を４倍して数値が公表されている。ここで重要な事実としては年率換算値は３ヶ月間の瞬間的 GDP 増加値の４倍であることであり、今後１年間の実現値でないことはもとより、今後１年間における GDP の変化率の推定値や予測値として理解することは困難なのである。古くからエコノミストの間では GDP をはじめとするマクロ時系列は時間と共に変動し、変化率はある種の循環的な変動が観察されている。このことから景気の局面、景気の動向に関して議論することが意味を持って

[1] 広瀬 (2009) はより実務的な観点より GDP 公表値の改善方法を議論している。本稿で提案する時系列的な方法とは本質的に異なる。

いるのである。

ところが、日本経済の現状を判断する指標としての利用状況を見ると、あたかも年率換算値が１年間における GDP 変化率の推定値、あるいは予測値として理解されることが、ないとは云えない。こうした GDP 統計の理解に混乱が見られるが、ＧＤＰ統計を景気判断に使う際には、実質値の季節調整済み系列の一期前からの変化率の４倍値を見ることでは、かなり大きな誤解が生じる可能性がある。ここでの問題を統計学の立場から見ると、現在の公表値の作成方法では直近のいわばノイズと呼ばれる不規則変動の影響を強く受けてしまう、ことが指摘できる。この論点をより詳しく説明するために経済時系列の統計的成分分解モデルを利用しよう。N 期間にわたり観測される原系列を $Y_i$ $(i=1,\cdots,N)$, 原系列を変換して得られる時系列 $X_i = \log(Y_i)$ を

$$X_i = T_i + C_i + S_i + I_i \tag{2.1}$$

と分解して考える[2] 。ここで、Ｔ：トレンド成分、Ｃ：循環成分、Ｓ：季節成分、Ｉ：不規則成分、を表している。これは経済時系列の伝統的な加法型の成分分解モデルであるが、マクロ経済変動の議論では標準的な統計的分析手段の一つである。通常の経済時系列では季節成分についての議論を行うことが一般的ではあるが、ここではまず季節成分はゼロとして議論を進める。季節性の処理にかかわる問題は興味深い重要な問題ではあり、検討すべき多くの問題があるのでその詳細な議論は別の機会とする[3] 。

このとき通常の公表値作成で求められる年率換算値 $r_i^{(a)}$ は

$$r_i^{(a)} = [(T_i + C_i + I_i) - (T_{i-1} + C_{i-1} + I_{i-1})] \times 4 \tag{2.2}$$

であるから、前期の不規則変動 $I_{i-1}$ は４倍されて年率換算値に影響を与える。この年率換算値が何を意味するか実はあまりはっきりしていないことを指摘しておこう。

---

[2] 例えば伝統的な季節調整法では対数変換 $\log Y_i$ として季節調整を行うことがしばしば行われている。より一般の変換 $X_i = f(X_i)$ を利用することも考えられるが、その場合の分解された各成分の解釈はより難しくなる。また近年における日本のマクロ経済指標の分析では原系列の分析の方が妥当である可能性も高い。観測系列より時系列分解モデルの各構成成分を識別するには各成分 $T_i, C_i, I_i$ の確率的挙動についての仮定が必要である。

[3] 例えば季節調整法としての X-12-ARIMA や DECOMP についての基本的な論点は国友 (2006) を参照せよ。最近の経済変動に関わる問題については高岡・国友 (2009) が検討している。

一つの解釈は瞬間的に観測される成長率がそのまま１年間続くと仮定すると単利・複利の差を無視するとして年成長率とみなせる、ということである[4]。この解釈をトレンド・モデルに即して考察すると、原データの対数変換を施しているとしたときには時点 t において推定したい真の状態はトレンド成分についての成長率 $T_{i+3}-T_{i-1}$ であろう。ここで観察系列 $X_i$ はトレンドと呼ばれる真の状態とは異なり、真の状態は事前にも事後的にも観測できないことが一つの問題である。さらに、GDP 成長率の中に循環成分 $C_i$ も含まれるので年率換算に際して循環部分の動きも反映する、というより重要な論点もあろう。このことを考慮すると推定の対象となる真の状態は $(T_{i+3}+C_{i+3})-(T_{i-1}+C_{i-1})$ ということになるかもしれない。こうした二つの解釈ではいずれも観測できない時系列成分の将来値を推定する、という問題がある。

こうした解釈上の問題に加えて既存の年率換算値の計算方式には検討すべき幾つかの問題がある。第一には、仮に不規則変動要素 $I_i$ が互いに独立な確率変数とみると、不規則成分の分散が存在するという条件の下で、変化率について

$$Cor(I_i - I_{i-1}, I_{i-1} - I_{i-2}) = -\frac{1}{2} \tag{2.3}$$

となり、負の系列相関が生じる。このことは期待値の振動する不安定要因の原因の一つとなりうる。第二には不規則変動の影響 $I_i - I_{i-1}$ は４倍されて変化率自体に大きな影響を与える可能性が生じることがより重要である。例えばしばしば仮定されるように $I_{i-1}$ と $I_i$ が互いに独立で分散 $\sigma_I^2$ とすると、年率換算値に対する寄与度は標準偏差でみると $\sqrt{4^2\times 2}\sigma_I \sim 5.66\times\sigma_I$ となる。成長率が高い時代、すなわちトレンド成分の寄与 $T_i - T_{i-1}$ が大きいときには、相対的には循環成分の寄与 $C_i - C_{i-1}$ や $I_i - I_{i-1}$ の変動はたまたま大きいとは見なされなかったので影響はそれほど顕著ではなかった、と解釈できよう。実際、近年の中国や米国における GDP 変化率の年率換算値ではこうした不規則変動の影響はより小さいのである。これに対して近年におきて観察される日本のマクロ系列ではこうしたいわばノイズの影響が相対的に顕著となるのは自然なことであり、米国や中国の GDP 変化率よりはるかにより注意深く時系列成分の相対的変動要因の影響を検討する必要がある。

### 年率 DGP 推定値の新手法

[4] この解釈では予測的な意味を持っているが、経済統計の意味についてあまり考える機会なしに新聞やテレビ。ニュースなどでの報道を見聞きする政治家・国民の平均的理解かもしれない。

ここで整理すると現行の方法では過去に実現した不規則変動が現在の増加率を推定する際に組み入れられていることが第一の問題点である。第二に、年率換算値の計算ではある一時点の四半期データの伸び率の観測値により推定されている、ことも問題点である。一般には年率換算値とは1年間に実現する成長率の推定値、あるいは予測値、と解釈する向きがないとは言えないが、景気の転換点などの議論では現行の計算方式が混乱を増幅させている可能性がある。こうした二つの問題点を解決する手段としてここでは年率伸び率 $r_i^{(k)}$ の推定値として本稿では別の推定方法のクラスを導入しよう。具体的には

$$r_i^{(TCI,k)} = [(T_i + C_i + I_i) - T_{i-k}] \times \frac{4}{k} \tag{2.4}$$

より計算し、$k$ は正整数値をとるとして $k$ 期前のトレンドからの伸び率により年率推定値とする方法を考察する。なお、右辺において $T_{i-k}$ だけでなく $T_{i-k} + C_{i-k}$ を引くことも考えられるが、循環成分が定常的 (stationary) [5] であるとの想定より、出発点の循環成分の水準に依存しない、という意味で頑健性があると考え、あえて循環成分を非対称的に扱っているのである[6] 。

ここで提案する方法では $k$ については小さいくとるとトレンド推定の不安定性が反映し、他方で大きくとりすぎると景気判断のタイミングが遅くなるという性質がある。そこで通常であれば、1 年前 (四半期であれば $k = 4$) とするのが常識的であるが、半年前 (四半期であれば $k = 2$) や直近 ($k = 1$) などの選択も可能であろう。ここで提案する方法については、一定の仮定の下で次のような性質があることが分かるが、導出は容易なので省略する。

**定理 1**： 時系列の構成要素 $T_i, C_i, I_i$ について次のことを仮定する。
各要素は互いに無相関な確率変数列, 循環成分 $C_i$ は弱定常過程であり $Var[C_i] = \gamma_C(0)$, $Cor(C_i, C_{i-k}) = \rho_C(k)$ (k 次自己相関関数), 不規則変動 $I_i$ は互いに無相関の確率変数列であり分散は $Var[I_i] = \sigma_I^2$, とする。トレンド要素 $T_i$ については次の二つの状況を想定する。(i)$\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$ は互いに独立で分散 $Var[\Delta(T_i)] = \sigma_T^2$ となる, (ii)$\Delta^2 T_i = \Delta(T_i - T_{i-1})$ は互いに独立で分散 $Var[\Delta^2(T_i)] = \sigma_T^2$, とする。

[5] 定常性 (stationarity)、自己共分散関数、自己相関関数など経済時系列の基本的概念については例えば山本拓 (1987) を参照せよ。

[6] 政府統計においてよく知られている X-12-ARIMA 法などの場合にはトレンド成分と循環成分は区別しないが、この場合にも同様に整合的な方法を考えることができる。

[ケース1] (i) のとき1次階差系列は定常過程であって年率推定量の分散は

$$Var[r_i^{(a)}] = 16\sigma_T^2 + 32\gamma_C(0)[1-\rho_C(1)] + 32\sigma_I^2 \ , \tag{2.5}$$

および

$$Var[r_i^{(TCI,k)}] = \frac{16}{k^2}\sigma_T^2 + \frac{16}{k^2}\gamma_C(0) + \frac{16}{k^2}\sigma_I^2 \tag{2.6}$$

で与えられる。

[ケース2] (ii) のとき1次階差系列は単位根過程であって年率推定量の分散は

$$Var[r_N^{(a)}] = 16N\sigma_T^2 + 32\gamma_C(0)[1-\rho_C(1)] + 32\sigma_I^2 \ , \tag{2.7}$$

および

$$Var[r_N^{(TCI,k)}] = \frac{16}{k^2}[\frac{k(k+1)(2k+1))}{6} + k^2(N-k)]\sigma_T^2 + \frac{16}{k^2}\gamma_C(0) + \frac{16}{k^2}\sigma_I^2 \tag{2.8}$$

で与えられる。

上で与えられる分散公式より例えば

$$1 - \frac{1}{2k^2} \geq \rho_C(1) \tag{2.9}$$

ならば

$$Var[r_i^{(a)}] > Var[r_i^{(TCI,k)}] \tag{2.10}$$

となる。また $k=4$ とすると従来の方法に加えて提案する推定法では不規則変動の貢献が小さくなるだけでなく、トレンド項の貢献も標準偏差で測ると 1/2 になる。あるいはより大胆に不規則変動を取り除き

$$r_i^{(TC,k)} = [(T_i + C_i) - T_{i-k}] \times \frac{4}{k} \tag{2.11}$$

とすることも考えられる。

ここで提案する年率 GDP 推定値の構成方法では過去のトレンド推定値 $T_{i-k}$ を推定する必要が生じること (さらに $r_i^{(TC,k)}$ の場合には $T_{i-k} + C_{i-k}$ も推定する必要がある) に注意しておく[7]。与えられた時系列 $X_i$ よりトレンド成分を推定する問題は

[7] 一昔前までは時系列分析の専門家でなければ与えられた経済時系列よりトレンド成分のみの抽出は困難であったが、統計学の最適フィルタリングを利用すれば今では瞬時に実行可能である。実務的には X-12-ARIMA を用いて実行することも可能である。

統計的時系列解析で知られている最適ファイルタリングの方法を利用することで解決することができる。このとき推定誤差も生じるが、一定の仮定の下ではこうした推定誤差が小さいという統計学的正当化も可能である。ここではとりあえず時系列分解プログラム DECOMP [8] を用いて推定した結果を報告しておく。ここでのデータ分析では 2009 年 10 月に利用可能であった国民経済計算の公表データを用いたが、季節成分も DECOMP で推定していることに注意が必要である。特に図 1 および図２は公表されたＧＤＰ統計を利用し、推定値 $r_i^{(TCI,k)}, r_i^{(TC,k)}$ の計算結果をまとめたものである。

(図 1 を挿入)

図 1 では従来型の年率換算値、本稿で提案する年率推定値 $(k = 1, 2, 4)$ を比較している。特に $k = 1$ とするとあまり安定した推定値は得られないが、$k = 2, 4$ とするとかなり安定した年率推定値が得られることがわかった。$k = 4$ とすると景気変動を平滑化するが、時には平滑化しすぎて景気変動にかなり鈍感となる状況も見られるので、とりあえずの改善策としては $k = 2$ とすることが考えられよう。いずれにしても、従来の前期比を４倍する年率換算値と我々が提案する推定値を比べると、平均伸び率は非常に安定して推定でき、事後的にも景気判断の結果にかなり符合していることが分かる。

**前向き年率推定値**

ここで提案した方法は年率推定値の構成において現在・過去の値のみを用いる後ろ向き推定法 (backward estimation) と呼ぶことができる。さらに年率推定値の構成においては、より積極的に将来の予測値を組み込む前向き推定法 (forward estimation) も考えることができる。例えば任意の整数 $k, h > 0$ に対し

$$r_i^{(TC,k,h)} = [(T_{i+h} + C_{i+h}) - T_{i-k}] \times \frac{4}{k+h} \tag{2.12}$$

[8] 統計数理研究所の北川源四郎氏により開発されたプログラムであるが、Web 上で簡単に利用することができる。時系列成分を構成する確率変数にガウス分布を仮定し、カルマン・フィルターを拡張した平方根フィルターを利用して状態推定を行うが、むろん非ガウス分布・非線形モデルへの拡張は可能である。

としよう。

**系 1**： 定理 1 の仮定の下で年率推定値 $r_i^{(TC,k,h)}$ の分散は $k$ を $k+h$, $\sigma_I=0$ とおいた公式 (2.6) および (2.8) で与えられる。

例えば $h=k=1$ とすれば、現在時点を中心とする年率 DGP 推定値と見ることが出来る。こうした方式を実現する為にはさらなる統計的モデリングが必要となる。

(図 2 挿入)

図 2 では従来型の年率換算値、本稿で提案する年率推定値 $(k=1,2,4)$、さらに前向き年率推定値を比較している。特に $k=h=1$ とするとかなり安定した年率推定値が得られ、$k=2$ とした後ろ向き年率推定値と近い数値が得られることが興味深い。

なお、例えば観測される時系列より推定したい状態が $T_{i+3}-T_{i-1}$ であると明確化されていれば $k=1, h=3$ などとする年率推定値の構成法もあり得よう。ただし、統計的問題では予測期間を長くとると（この場合には 3 期先予測が必要となる）当然の事ながら、予測の精度が落ちるので、実際の推定値の構成に当たっては慎重に選択する必要がある。また年率推定値を観測時点 i の前後に対称にとろうとすると $T_{i+1.5}-T_{i-2.5}$ ということになるので、さらに一般化された推定値を導入することも可能であるが、する一種の中心化のような議論が必要となり、問題がより複雑化する。そこで本稿では現状の方法を若干でも改善できる推定方法にデータ分析の焦点を当てていることを注意しておく。

## 3. 歴史的シミュレーション例

我々は様々な状況を想定してシミュレーション実験、特に過去の GDP データを利用して若干の数値的実験も行ってみた。ここでは 68SNA データを利用し、二つの推定値 (k=4 および k=h=1) を計算した結果を図 3 として示しておく。さらに仮想的に図 3 で利用したデータからトレンド成分、循環成分、季節性成分、ノイズ成分と

いう各時系列成分を推定し、その中のノイズ成分のみを直近のデータの（推定された）ノイズ成分に置き換えて行ったシミュレーションの結果を図 3-2 に示しておく。このシミュレーション分析の主たる目的はノイズ成分の影響をより深く理解する試みである。興味深いことに図 3 と図 3-2 の結果は同様であった。

(図 3・図 3 – 2 を挿入)

これらの図からも図 1・図 2 と同様の結果を見ることができる。ここで我々が行った数値実験をまとめると本稿で提案している年率換算値の新しい推定方法は現実的な状況に置いては旧来の推定方法と比較して安定した結果が得られ、信頼できると結論づけられる。

## 4.　トレンド・階差の解釈と時系列モデル

ここで GDP の年率推定値の構成において将来の予測値を組み込む前向き推定法 (forward estimation) を利用する場合には時系列のモデル化が必要となる。また推定の信頼性を信頼区間などで表現しようとする時にも有用である。

### 変化点とトレンド

マクロ経済時系列 $X_i$($X_i = \log Y_i$ とすると、原系列 $Y_i$ の変化率は $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$ となる) の加法モデル

$$X_i = T_i + C_i + I_i \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{4.1}$$

をより詳しく考察する。ここで $T_i$ はトレンド成分、$C_i$ は循環成分、$I_i$ は不規則成分を表しているが、季節成分をゼロと仮定し、トレンド成分、循環成分、不規則成分、についての統計モデルよりまず変化率の定常過程モデルを考察しよう。

観測期間 $[0, T]$ 上に $q$ 個の変化点 $0 < n_1 < \cdots < n_q < T$ を想定する。現実には変化点はランダムに生じると思われるがここでは統計的モデル化を行わずに、一次

近似として q が大きいことを想定する。変数 $DT_j^{(1)}(t), DU_j(t), j = 1, \cdots, q$ を

$$DT_j^{(1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t < n_j \\ t - n_j & \text{if } n_j < t \le T \ , \end{cases}$$

$$DU_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t < n_j \\ 1 & \text{if } n_j \le t \le T \end{cases}$$

により定義する。ここで導入した 2 種類の変数 $DT_j^{(1)}(t)$ と $DU_j(t)$ を用いることによりトレンド関数として $q$ 個の変化点 $n_j$ をもつ折線関数が考えられる。トレンド変化点・モデルとして

$$T_{cp}(t) = \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{1j} DU_j(t) + \alpha_{02} t + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{2j} DT_j^{(1)}(t) \tag{4.2}$$

を考察する。階差をとると

$$T_{cp}(t_i) - T_{cp}(t_{i-1}) = \alpha_{02} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{2j} [DT_j^{(1)}(t_i) - DT_j^{(1)}(t_{i-1})] + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{1j} [DU_j(t_i) - DU_j(t_{i-1})]$$

である。ここでトレンド関数のイノベーションを

$$v_i^{(T)} = [T_{cp}(t_i) - T_{cp}(t_{i-1})] - \mu^{(T)} \tag{4.3}$$

により定義する。ここで線形トレンドの切片と傾きがランダムに変化する、あるいは変化点の個数 q がランダムと見ると、折れ線トレンドの変化の期待値は

$$\mu^{(T)} = \mathbf{E}\left[\alpha_{02} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{2j} [DT_j^{(1)}(t_i) - DT_j^{(1)}(t_{i-1})] + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{1j} [DU_j(t_i) - DU_j(t_{i-1})]\right] \tag{4.4}$$

となる。こうした議論より

$$\Delta T_i = T_i - T_{i-1} = \mu^{(T)} + v_i^{(T)} \tag{4.5}$$

というトレンドに対する単位根 (ランダムオーク) モデルを当てはめる合理化が可能である。ただし $v_i^{(T)}$ はトレンド・モデルのイノベーションである。ここでの変化点には二種類あり、(簡単に識別できる) 大きなジャンプと識別が困難な小さなジャンプを含んでいる。データ上では事後的にはたとえば q が大きいときには、トレンド

変化点・モデルとランダム・ウオーク・モデルを区別する意味はあまりないと思われる。

### 高次の階差モデル

同様な議論により二次階差が定常過程にしたがう統計モデルの合理化も可能である。任意の正整数 k に対し変数 $DT_j^{(k)}(t), j = 1, \cdots, q$ を

$$DT_j^{(k)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t < n_j \\ (t - n_j)^k & \text{if } n_j < t \le T \ , \end{cases}$$

により定義しよう。このとき二次階差モデルのトレンド関数の期待値は $\alpha_{kj}$ $(k = 1, 2, 3; j = 1, \cdots, q)$ を未知母数として

$$\mu^{(T)} = \mathbf{E}\left[\alpha_{02} + \sum_{k=2}^{3}\sum_{j=1}^{q}\alpha_{kj}[DT_j^{(k)}(t_i) - DT_j^{(k)}(t_{i-1})] + \sum_{j=1}^{q}\alpha_{1j}[DU_j(t_i) - DU_j(t_{i-1})]\right] \tag{4.6}$$

と表現できる。

### 変化率の時系列モデル

ここで一次階差定常モデルにおいて、循環成分 $C_i$ が $AR(p_C)$ モデルにしたがい、不規則成分 $I_i$ が互いに独立な確率変数 $v_i^I$ にしたがうとすると階差モデル

$$\Delta X_i = \mu^{(T)} + v_i^{(T)} + (C_i - C_{i-1}) + (I_i - I_{i-1}) \tag{4.7}$$

が得られる。ここで $\mu^{(T)}$ は大きな変化点があればその場所でシフトさせることが合理的であろう。ここで MA 単位根 (あるいは overdifferencing 過剰階差問題と呼ばれる) は $C_i - C_{i-1}, I_i - I_{i-1}$ に生じる[9] 。循環成分を無視すると $\Delta X_i$ は MA(1) モデルにしたがい、負の自己相関 ($v_i^{(T)}$ と $v_i^{(I)}$ の分散に依存) を示す。

循環成分が定常過程にしたがい、統計的分析を簡単化するためにトレンド項、循環項、不規則変動項は互いに独立な場合を想定しよう。$\sigma_T^2$, $\sigma_I^2$ をそれぞれトレンド項と不規則変動項のノイズ分散、$C_i$ の $s$ 次自己共分散関数を $\gamma_C(s)$ とすると、観察される時系列については変化率の自己相関関数は次のようになる。

$$\mathrm{Var}[\Delta X_i] \;=\; \sigma_T^2 + 2\left[\gamma_C(0) - \gamma_C(1)\right] + 2\sigma_I^2 \ , \tag{4.8}$$

[9] 通常の単位根 (unit root) 問題と異なり、MA 単位根問題では定常性は $C_i, I_i$ および $\Delta C_i = C_i - C_{i-1}, \Delta I_i = I_i - I_{i-1}$ の双方で成り立つ。

$$(4.9)\quad \mathrm{Cov}[\Delta X_i, \Delta X_{i-1}] = -\sigma_I^2 + [-\gamma_C(0) + 2\gamma_C(1) - \gamma_C(2)] \quad ,$$

$$(4.10)\quad \mathrm{Cov}[\Delta X_i, \Delta X_{i-s}] = -\gamma_C(s-1) + 2\gamma_C(s) - \gamma_C(s+1) \quad (s \geq 2)\ .$$

したがって変化率系列の自己相関関数は

$$(4.11)\ \mathrm{Cor}[\Delta X_i, \Delta X_{i-1}] = \frac{-\sigma_I^2 + [-\gamma_C(0) + 2\gamma_C(1) - \gamma_C(2)]}{\sigma_T^2 + 2\left[\gamma_C(0) - \gamma_C(1)\right] + 2\sigma_I^2} \quad ,$$

$$(4.12)\ \mathrm{Cor}[\Delta X_i, \Delta X_{i-s}] = \frac{-\gamma_C(s-1) + 2\gamma_C(s) - \gamma_C(s+1)}{\sigma_T^2 + 2\left[\gamma_C(0) - \gamma_C(1)\right] + 2\sigma_I^2} \quad (s \geq 2)$$

となる。ここでトレンド成分・循環成分の分散が小さければ、MA(1) の単位根より負の１次自己相関が生じる。他方、不規則変動の分散が相対的に小さければ正の自己相関も生じうる。

特に循環項が定常 $AR(p_C)$ モデルにしたがうとすると、変化率 $\Delta X_i \sim ARMA(p_C, p_C + 1)$ という表現が得られる。実用的にはたとえば $p_C = 2$ と設定することなどが考えられよう。この場合には

$$(4.13)\quad \gamma_C(0) = \sigma_C^2 + \phi_1\gamma_C(1) + \phi_2\gamma_C(2)\ ,$$

$$(4.14)\quad \gamma_C(s) = \phi_1\gamma_C(s-1) + \phi_2\gamma_C(s-2) \quad (s \geq 1)$$

を $\sigma_C^2, \phi_1, \phi_2$ について解けばよい。

こうして作成した階差モデルは多くのマクロ時系列から計算される階差 (伸び率) 系列の循環変動をかなり説明できると思われる。したがって、ここで議論している論点についてより詳しい統計的性質の解析と推定が必要である。循環成分として AR モデルを仮定する場合には、推定すべき母数は $\boldsymbol{\theta}' = (\sigma_T^2, \sigma_I^2, \gamma_C(0), \gamma_C(s), s \geq 1)$ となる。

ここでは説明の便宜上で１次階差定常モデルを説明したが、２次階差定常モデルもほぼ同様に議論することができる。こうしたパラメトリック時系列モデルを利用する主要な利点は成長率の成分分解が可能であるのでその相対的寄与について有意味な情報が得られることである。特に時系列成分の分散成分の推定が可能となるので各成分毎の誤差率や信頼区間を求めることができるのである。

## 5. 結論

本稿では日本経済の動向を理解する上で基本的で重要な GDP 統計の速報値の公表の仕方についての問題を指摘した。特に新聞やテレビ・ニュースなどマス・メディ

アを通じて報じられる年率換算成長率が一体何を意味するのかが明確でないことが重要な論点であろう。瞬間的成長率ではなく何らかの意味で実現する１年間の成長率との理解の下では、現在の年率換算値の推定法を改善する方法として、過去の不規則変動の影響を推定の際に取り除き、より安定的でより信頼のおける推定方法を示した。過去の日本の GDP 統計に実現系列を用いて推定した結果は本稿での統計学的な理論と整合的であり、しかも簡単に実行可能であることを指摘した。

実際の日本の GDP 推定作業では GDP の主要構成項目を個別的に推定し、それを積み上げるという方式をとっている。したがって、本稿の議論を実際に利用する場合には幾つかの実務的問題はあるが、そうした細部の議論は他の機会に譲りここでは本質的にもっとも重要と考えられる問題に絞って議論したのである。実務的に推定方法を改善する方法としては比較的単純な統計的時系列モデルを組み込むことによりより精度を高められる可能性が高いことを強調したい。

なお、最後に残された重要な問題として次の二点のみに言及しておこう。第一に、本質的に不確定な量を推定する場合には得られた数値の不確実性は信頼区間で表現することが統計的方法としては標準的である。日本を含めて政府統計という場面ではこれまでこうした統計的評価法を重視していないが、重要な検討課題であろう。本来的に確定的に推定できない量をあたかも確定値として処理しようとすると、ある状況下では問題が生じてしまうのは古くから統計学が教えるところである。第二には本稿では議論を省略したが、原系列より前期比を推計したり、トレンド成分や循環成分を推定するには季節調整法の利用が不可欠である。X-12-ARIMA など現在用いられている方法は移動平均を利用して一種の平滑化 (smoothing) の方法であることが知られているが、こうした方法では例えば大きな変動が観察されると、その影響がかなり長い期間に続くことが知られている。したがって、近年の日本のマクロ時系列の変動を考慮した季節調整をどの様に展開するかという問題も重要であろう。

## 参考文献

Hayashi, F. (2000),*Econometrics*, Princeton University Press。

北川源四郎 (2005)「時系列解析入門」, 岩波書店。

国友直人「季節調整法 X-12-ARIMA と日本の官庁統計」2006, CIRJE-R-5, 東京大学日本経済国際共同研究センター。

高岡慎・国友直人 (2009)「最近のマクロ経済変動と季節調整」, 未定稿。

広瀬哲樹「安定的な SNA 四半期系列について」2009, 内閣府経済社会総合研究所。

山本拓 (1987), 「経済時系列分析」, 創文社。

## 付論：時系列モデルの推定方法について

本稿で議論した階差定常過程という時系列モデルを利用するにはその母数を推定する必要がある。この付論では比較的簡便に実現できるセミパラメトリック推定としてGMM法を利用することができることを指摘しておく。ここでは一次階差定常モデルを仮定するが、任意の高次階差定常モデルに適用することが可能である。ここでは簡単な例示にとどめる。重要な点はあらかじめ定常確率過程に変換しておかないとパラメトリック部分を含む統計モデルとして時系列モデルの推定問題が統計的に非正則問題 (non-regular problem) になることであり、議論が複雑化することである。近年の時系列解析では例えば単位根問題 (unit roots problem) としてこうした非正則問題も展開されているが、政府統計にそのまま応用しようとすると様々な注意点が必要である。

時系列モデルにおける母数ベクトルをまとめてk次元ベクトル $\boldsymbol{\theta} = (\theta_j)$ とする。例えば $p_c = 2$ のとき推定関数

$$g_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} (\Delta X_i - \bar{\Delta} X)^2 - \mathrm{Var}(\Delta X_i) \\ (\Delta X_i - \bar{\Delta} X)(\Delta X_{i-1} - \bar{\Delta} X) - \mathrm{Cov}(\Delta X_i, \Delta X_{i-1}) \\ (\Delta X_i - \bar{\Delta} X)(\Delta X_{i-2} - \bar{\Delta} X) - \mathrm{Cov}(\Delta X_i, \Delta X_{i-2}) \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

とおこう。ここで $\bar{\Delta} X = (1/N) \sum_{i=1}^{N} \Delta X_i$, $N$ は標本数である。評価関数とすると

$$L_N(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} g_i(\boldsymbol{\theta})' \mathbf{W}_N \sum_{j=1}^{N} g_j(\boldsymbol{\theta}) \tag{A.2}$$

これを最小化すればよい。($\mathbf{W}_N$ はウエイト関数で $\mathbf{W}_N \to \mathbf{W} > 0$(正定符号) となる必要があるが、実用的には安定的な推定結果を得られることがより重視して $\mathbf{I}_G$ でよいと思われる。) このとき $n$ が大きいとき推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{GM}$ は漸近的に

$$\sqrt{N} \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{GM} - \boldsymbol{\theta} \right] \xrightarrow{p} N_G(\mathbf{0}, \mathbf{A}) \tag{A.3}$$

となる。ただし

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{E}(\partial g_i') \mathbf{W} \mathbf{E}(\partial g_i) \right]^{-1} \left[ \mathbf{E}(\partial g_i') \mathbf{W} \mathbf{E}(g_i' g_i) \mathbf{W} \mathbf{E}(\partial g_i') \right] \left[ \mathbf{E}(\partial g_i') \mathbf{W} \mathbf{E}(\partial g_i) \right]^{-1}$$

で与えられる。この種の時系列分析についての基本的な事項については例えば山本 (1987), Hayashi (2000) を参照すればよい。むろん正規分布を仮定できればより効率

的な最尤推定も可能である。本稿で利用した Decomp における計算はこの種の統計計算を自動的に実行しているとも理解できる。なお、一般的には推定の効率性と推定結果の頑健性についてのトレードオフがあることを認識する必要があるが、多くの統計学の既存の教科書では推定の効率性をより重視する傾向にあることに実際家は注意する必要があろう。

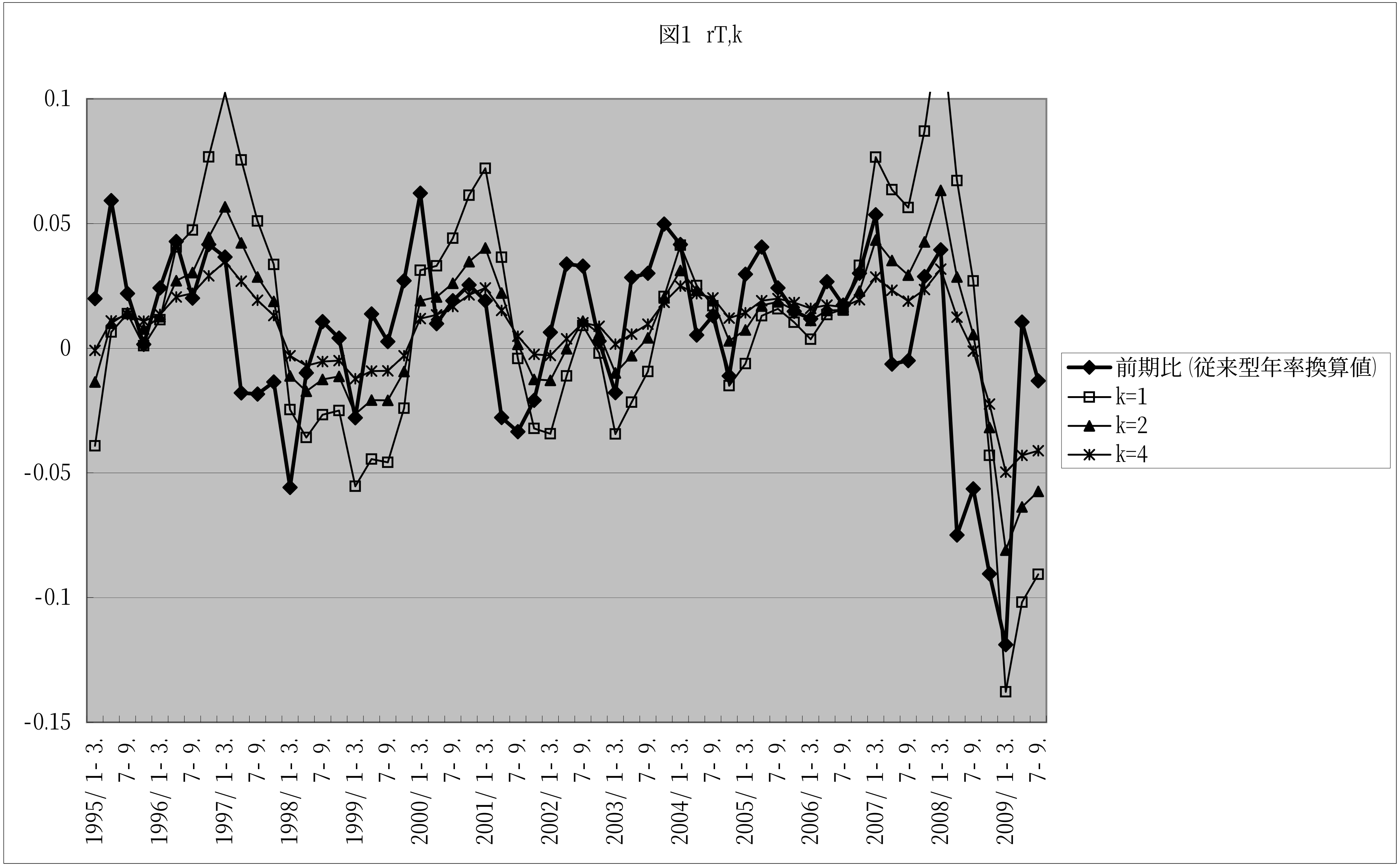
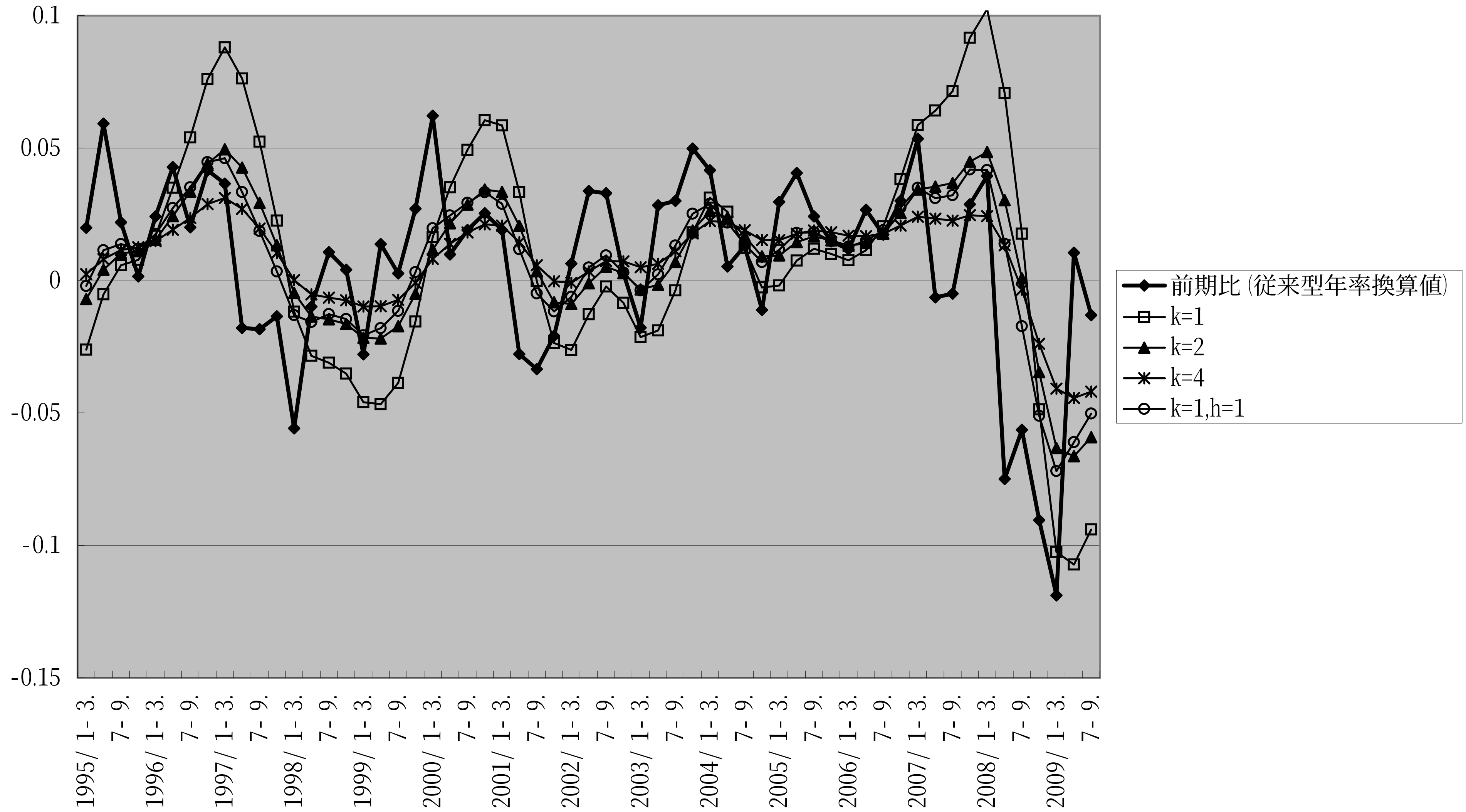


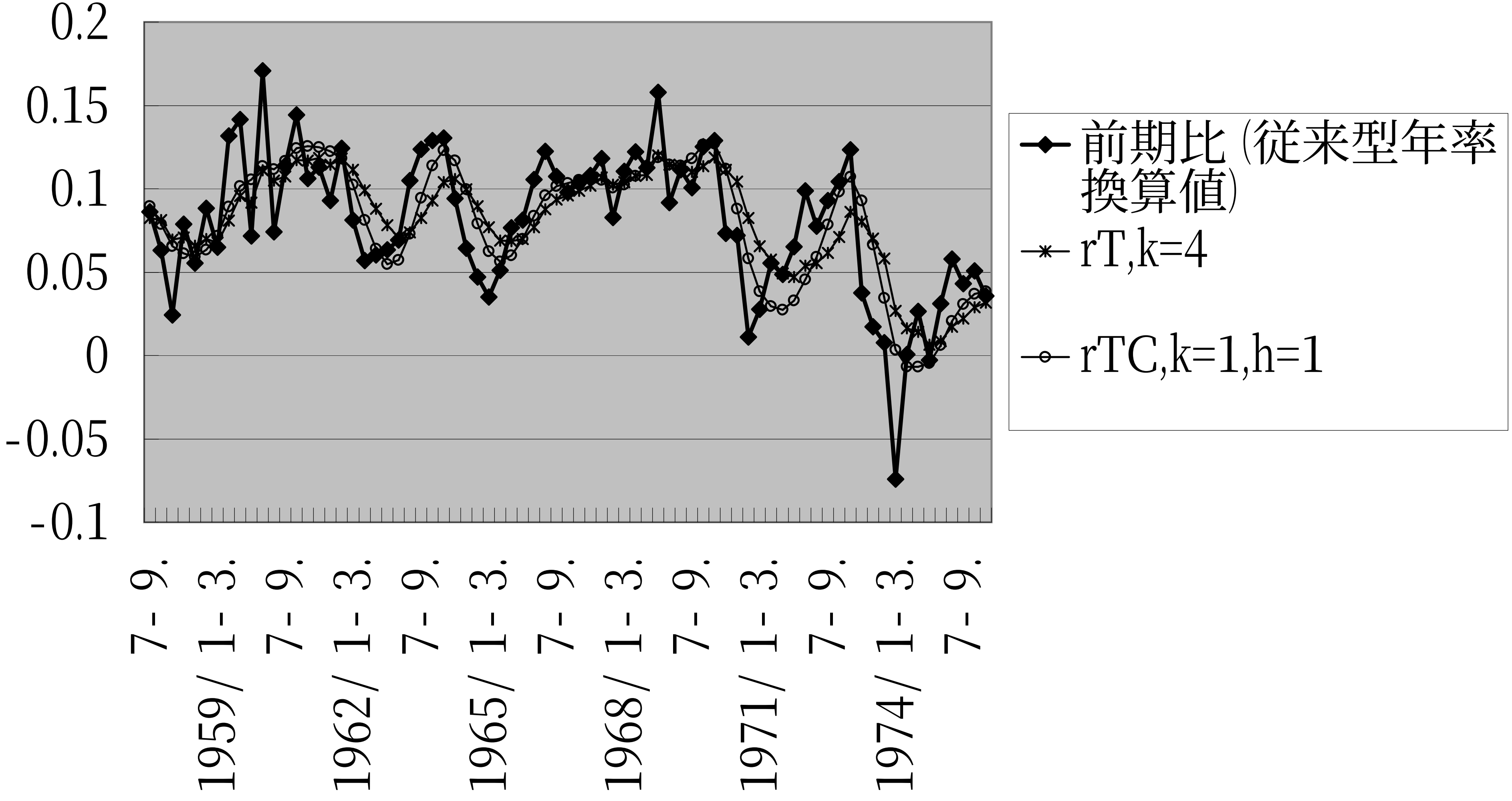
図1　rT,k
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
前期比（従来型年率換算値）
k=1
k=2
k=4
1995/ 1- 3.
7- 9.
1996/ 1- 3.
1997/ 1- 3.
1998/ 1- 3.
1999/ 1- 3.
2000/ 1- 3.
2001/ 1- 3.
2002/ 1- 3.
2003/ 1- 3.
2004/ 1- 3.
2005/ 1- 3.
2006/ 1- 3.
2007/ 1- 3.
2008/ 1- 3.
2009/ 1- 3.

図2　rTC,k



0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
前期比 (従来型年率換算値)
k=1
k=2
k=4
k=1,h=1
1995/ 1 - 3.
7 - 9.
1996/ 1 - 3.
7 - 9.
1997/ 1 - 3.
7 - 9.
1998/ 1 - 3.
7 - 9.
1999/ 1 - 3.
7 - 9.
2000/ 1 - 3.
7 - 9.
2001/ 1 - 3.
7 - 9.
2002/ 1 - 3.
7 - 9.
2003/ 1 - 3.
7 - 9.
2004/ 1 - 3.
7 - 9.
2005/ 1 - 3.
7 - 9.
2006/ 1 - 3.
7 - 9.
2007/ 1 - 3.
7 - 9.
2008/ 1 - 3.
7 - 9.
2009/ 1 - 3.
7 - 9.

図3　旧68SNAデータでの適用例



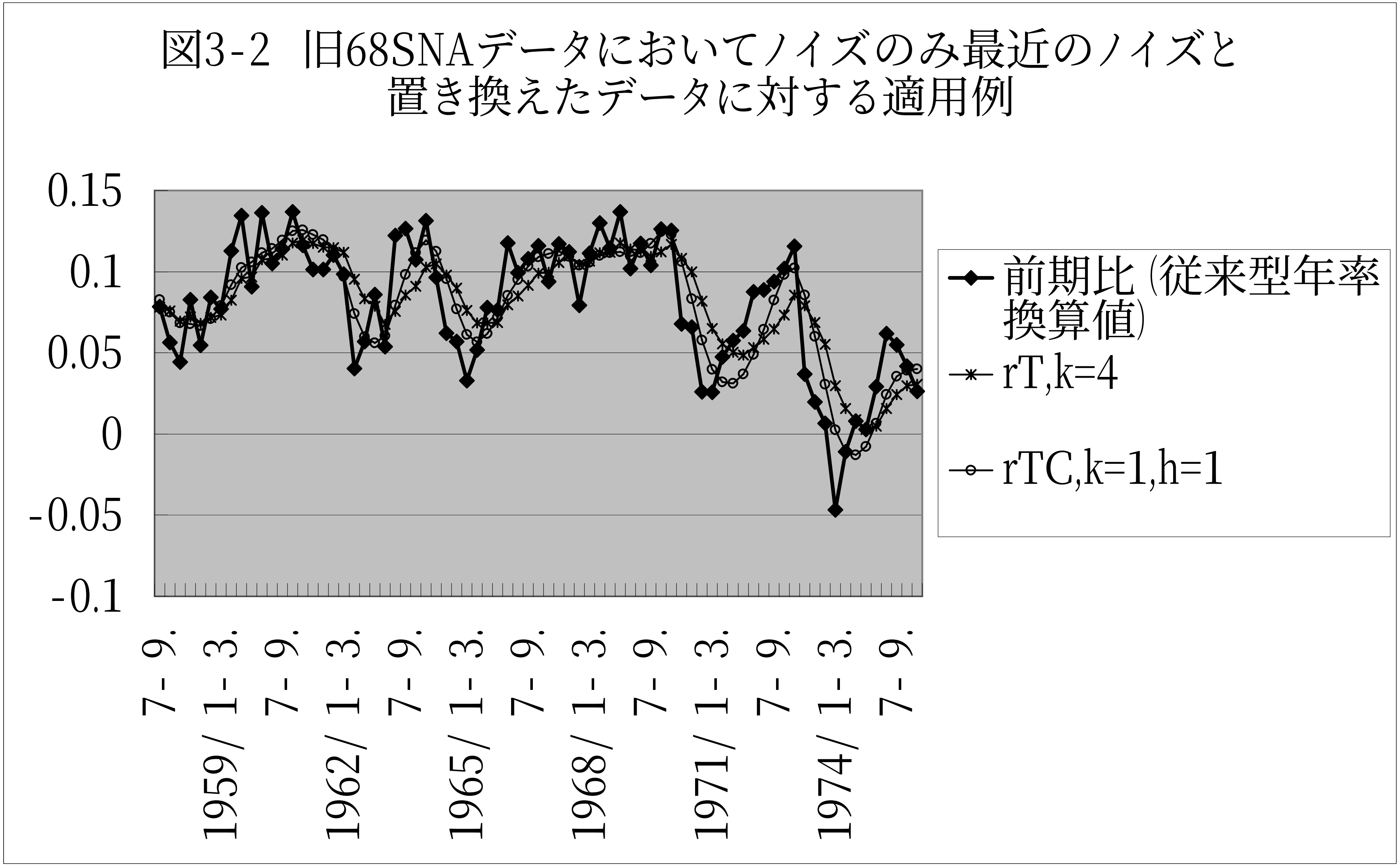


図3-2 旧68SNAデータにおいてノイズのみ最近のノイズと
置き換えたデータに対する適用例
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
前期比(従来型年率換算値)
rT,k=4
rTC,k=1,h=1
7-9.
1959/1-3.
7-9.
1962/1-3.
7-9.
1965/1-3.
7-9.
1968/1-3.
7-9.
1971/1-3.
7-9.
1974/1-3.
7-9.