CIRJE-J-278

多次元ホークス型モデルによる
金融市場の因果性分析

明治大学政治経済学部・東京大学
国友直人

金融庁
江原斐夫

東京大学大学院経済学研究科大学院生
栗栖大輔

2016年6月; 2016年10月改訂

多次元ホークス型モデルによる金融市場の因果性分析*

国友直人†
江原斐夫‡
栗栖大輔§

2016 年 9 月

要約

経済現象、とりわけ金融市場では時々刻々と連続的に観察される変動とともに、時々ではあるが影響の大きな変動も観察される。こうした大きな変動に焦点を当てて計量的に分析する統計的方法は一般的に利用されていないが、本稿では点過程の統計モデルを導入して分析する方法を提案する。ここでは裾が厚い資産価格の変動に対して閾値を利用して統計的極値分析により大きな変動（マクロ・ジャンプと呼ぶ）を抽出し、点過程モデルとして拡張された多次元 Hawkes 型モデルを利用する統計分析を提案する。そして従来の分析では検出しにくい複数の経済・金融市場における大きな変動の連動性の統計分析、Granger 因果性の分析が可能となることを日米英の市場分析を通じて示す。

鍵言葉

マクロ・ジャンプ, 大きな経済変動, 点過程, 多次元 Hawkes 型モデル, G-非因果性, 条件付確率予測

1. はじめに

マクロ経済の変動、とりわけ株式価格、債券価格、外国為替などの金融市場では日々刻々と観察される比較的小さい変動と共に、毎日に観察されるとは限らないが時々、より大きな影響がある変動が起きることが観察されている。近年では、一日内の価格変動に内在する金融リスク評価を刻々と得られる高頻度金融 (high-frequency financial) データより分析する

*2016-9-30 版。原論文における一部の数値計算上の問題について解決してくれた粟屋直氏に感謝する。なお本研究の内容は著者の一人が所属する金融庁の業務とは関わりはない。

†明治大学政治経済学部
‡金融庁
§東京大学経済学研究科博士課程

統計的方法の開発が進み、かなり高頻度の金融データ分析が可能である。他方、観測の頻度が高い金融データから見ると低い頻度 (low frequency) でした観察されないという意味では相対的に *rare event*(稀な現象) と言える一つの金融市場における相対的に大きなその変動が、しばしばその経済全体にかなりな影響を及ぼし、さらに国境を越えて多くの国の経済や金融市場に影響を及ぼすことも見受けられる。こうした比較的大きな金融市場の変動はしばしば複数の市場、さらに国際的な連動性を持ってほぼ同時に観察されたり、連続的に伝播していくことが経験的には知られている。例えば近年での代表的な経験としては、2008 年秋に米国の金融市場で端を発したリーマンショックの発生と伝播が挙げられるが、その変動の大きな特徴は米国の金融市場で起きた大きな変動が世界の主要な金融市場の混乱やマクロ経済変動を引き起こしたことはその影響の大きさからなお記憶に新しい。

こうした必ずしも常に起きるとは限らないが大きな影響のある経済事象は古くから関心が持たれているが、近年になりその重要性がまずます増大している。そこで経済・金融市場におけるミクロ的変動とマクロ的変動をどのように整合的に理解し、統計的分析を行ったらよいであろうか？特に金融市場において日々観察しているミクロ的変動を踏まえて、国内の市場、さらには国境を越えた経済変動に付随する経済リスク、金融リスクの統計的分析の必要性は近年になり高まっていることを背景として、例えば金融リスクの統計的管理法、とりわけ国際的な金融経済活動への公的規制や各国における経済政策を検討する上で必要不可欠な事項であるといっても過言ではない。

本稿では金融市場を巡る計量分析としては新しい統計的分析の利用法を検討する。特に日次データなど較的高い頻度で観測される金融時系列の変動から大きな変動、特に短期的な大幅な下方への変動を抽出し、そうした変動がより長期的にみた時刻を確率的にとらえる。そして大きな変動を連続時間の確率過程の成分分解における jump 項 (ミクロ・ジャンプ) と区別してマクロ・ジャンプ (macro-jumps) と呼び、マクロ・ジャンプが起きる変動を強度関数 (intensity function) により拡張 Hawkes 型モデルを利用して分析する枠組みを考察する。Hawkes 型統計モデルは点過程 (point process) と呼ばれている確率過程の一つであるが、これまで主に地震現象など自然現象の統計分析において利用されてきているが、経済現象・金融市場の分析への応用はまだあまりない。本稿では多次元の拡張 Hawkes 型モデルをマクロ経済のジャンプ現象の分析に応用し、経済・金融の計量分析にも有用であることを示す。ここでの実証分析の実例として日本・米国・英国という 3 つの金融市場の連動性を統計的に分析し、これまでの分析では困難な大きなマクロ・ジャンプ変動に関する分析結果を報告する。特に大きな変動に関する因果分析は容易ではなかったが、本稿では条件付変動リスクを強度関数 (intensity function) で表現する統計モデルにより強度関数にもとずく Granger の意味での非因果性 (G 非因果性) の検定が可能であることを示す。さらに日米英の金融市場に関する実証分析を行い、国際的なマクロ金融市場の連動性について有意義な分析結果が得られたことを報告する。

本稿ではまず第二節で拡張された Hawkes 型計量モデルを導入し、第三節では線形インパクト関数を含む拡張 Hawkes 型モデルにおける定常性を議論する。次に第四節では強度関数における Granger の意味での非因果性 (G-非因果性) と因果性の分析法を議論する。さらに第五節では日米、日英の金融市場の連動性に関して Hawkes 型点過程モデルを利用した分析の結果を説明し、第六節では暫定的な結論とさらなる課題を述べる。本稿の議論に必要な基

礎的事項、連続時間の G-非因果性、点過程の尤度関数、定理や命題の証明については数理的付論にまとめて説明する。

2. 拡張 Hawkes 型ジャンプ・モデル

本稿では強度関数 (intensity function) の統計的モデリングにもとづく拡張された多次元 Hawkes 型計量モデルを考察する[1]。特に Ogata(1978) の研究に端を発する点過程 Hawkes モデルの統計分析への応用、ミクロ金融市場に関する Grothe et al. (2014) の研究などを参考して、その統計モデルをさらに拡張した Hawkes 型の点過程モデルを導入する。

連続時間の観測期間 $[0,T]$ を n 分割して各期間 $I_i=(t_{i-1}^n,t_i^n]$ $(i=1,\cdots,n)$ としよう。初期時点は $t_0^n=0$ として、例えば日次データでは I_i^n は第 i 観測日であるが、日次データよりもより細かい頻度による分析も可能であり、ここでは全体の観測期間 T に対して n が大きい場合、を想定する。観測可能な p 次元確率過程を $P_j(t)$ $(j=1,\cdots,p\,;t_{i-1}^n<t\le t_i^n,i=1,\cdots,n)$ として、連続時間で変動する確率過程より $s\in I_i$ における対数変化率を

$$Y_j^n(s)=-\log[P_j(s)/P_j(t_{i-1}^n)]\;(j=1,\cdots,p;i=1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

として $Y_j^n(s)$ $(t_{i-1}^n<s\le t_i^n)$ を考える。ここで第 j 変数についての閾値 (threshold) を u_j として $s\in I_i$ において最初に閾値を越えた停止時刻 $\tau_j^n(i,1)$ として区間 $s\in t_{i-1}^n<s\le\tau_j^n(i,1)$ に対して $X_j^n(s)=Y_j^n(s)$ とする。次に $s\in[\tau_j^n(i,1),t_i^n]$ に対して $X_j^n(s)=X_j^n(\tau_j^n(i,1))$ として任意の $s\in I_i$ に対して $X_j^n(s)$ を構成する。

次に連続時間の確率過程 $X_j^n(s)$ $(s\in(0,T]$ を用いて点過程 $N_j^n(s,u_j)$ を各時点 s までに $X_j^n(s)$ が一定値 u_j $(j=1,\cdots,p)$ を超えた回数により構成しよう。さらにこの点過程は

$$P(N_j^n(t+\Delta t,u_j)-N_j^n(t,u_j)=1|\mathcal{F}_t)=\lambda_j^n(t,u_j)\Delta t+o_p(\Delta t)\;, \tag{2.2}$$

$$P(N_j^n(t+\Delta t,u_j)-N_j^n(t,u_j)>1|\mathcal{F}_t)=o_p(\Delta t) \tag{2.3}$$

を満たすものとする。ここで $\mathcal{F}_t$ は時刻 t における情報を示す $\sigma-$ 集合族であり, 以下では点過程の強度関数 (intensity function) が

$$\lambda_j^n(t,u_j)=\lim_{\Delta t\to 0}\mathcal{E}[\frac{N_j^n(t+\Delta t,u_j)-N_j^n(t,u_j)}{\Delta t}|\mathcal{F}_t] \tag{2.4}$$

により表現されるものとし、特に条件付強度が過去に起きたジャンプに依存する self-exciting な表現

$$\lambda_j^n(t,u_j)=\lambda_{j0}^n+\int_{-\infty}^t\sum_{i=1}^p c_{ji}(X_i^n(s-))g_i(t-s)dN_i^n(s,u)\;, \tag{2.5}$$

[1] この統計モデルの研究は Hawkes (1971a, b), Ogata (1978) などの理論的研究に端を発しているが、地震統計学分野などにおいて多くの応用研究がある。

をとるものを考察する。ここで割引関数として $g_i(t-s)=e^{-\gamma_i(t-s)}$, $C(X)=(c_{ji}(x))$ をインパクト関数 (impact function) と呼ぼう。価格水準の下方への急激な変動という事象を一般化パレート分布を利用して、任意の $x>u_j$ に対して

$$
\begin{aligned}
(2.6) \qquad P(X_j^n(s)>x|X_j^n(s)>u_j,\mathcal{F}_s) &= \frac{\left[1+\frac{\xi_j}{\sigma_j^n(s)}x\right]^{-1/\xi_j}}{\left[1+\frac{\xi_j}{\sigma_j^n(s)}u_j\right]^{-1/\xi_j}} \\
&= \left[1+\frac{\xi_j}{\sigma_j^*(s)}(x-u_j)\right]^{-1/\xi_j}
\end{aligned}
$$

により表現することを考えよう。ここで条件付確率のスケールは $\sigma_j^*(s)=\xi_j u_j+\sigma_j^n(s)$ である。時刻 s におけるリターン $X_j^n(s)$ の情報 $\mathcal{F}_s^X$ とし、この情報を条件とした条件付密度関数 (極値分布) が

$$
(2.7) \qquad f_j(x,s)=\frac{1}{\sigma_j^*(s)}\left[1+\frac{\xi_j}{\sigma_j^*(s)}(x-u_j)\right]^{-1/\xi_j-1} \quad (x>u_j)
$$

で与えられることを仮定しよう。なおこの仮定を変更することはそれほど困難ではないが、近年の閾値を利用する極値統計学では裾の厚い確率分布を表現する手段として一般化パレート分布を利用することが標準的である[2]。

ここで条件付強度関数 (conditional intensity function) により過去のジャンプが次のジャンプに影響する統計モデルを考察することが可能である。特に本稿が報告する実証分析では強度関数として

$$
(2.8) \qquad \lambda_j^n(t,u_j)=\lambda_{j0}^n+\sum_{i=1}^{p}\int_0^t [A_{ji}X_i^n(s-)+B_{ji}]g_i(t-s)dN_i^n(s,u)
$$

を主に利用する。(誤解が生じなければ添え字 n,u_j を省略することがある。) ここで母数 λ_{j0}, A_{ji},B_{ji}, γ_i は定数であり、この場合には mark とも呼ばれるインパクト関数

$$
C_{ji}(x)=A_{ji}x_i+B_{ji}
$$

を表現する。特に $C_{ji}=B_{ji}$(実定数, $i,j=1,\cdots,p$) のときには多次元 Hawkes 過程に対応する。

ここで利用する確率分布は一般化パレート分布と呼ばれる確率分布のクラスであるが、統計的極値論では閾値モデルによる正当化が可能なので、確率分布の裾を表現する手段として広く用いられている。また Grothe et al. (2014) では特に

$$
(2.9) \qquad \sigma_j^*(s)=\beta_j+\alpha_j v_j^n(s,u)\ (=\xi_j u_j+\sigma_j^n(s))\ .
$$

[2]統計的極値論の基礎事項については例えば高橋・志村 (2016), Coles (2001), Resnick (2007) などを参照。

となる場合を考察しているが、ここで $v_j^n(s,u)$ は過去に依存する確率過程である。Grothe et al. (2014) ではインパクト関数 $c(x)$ としてマークの条件付分布関数 $F_j(x)$ に対しある分布関数 $H(\cdot)$ により

$$c(x) = c(F_t(x_t)) = 1 + H^{\leftarrow}(F_t(x_t)) \tag{2.10}$$

となることを仮定しているが、$H^{\leftarrow}(\cdot)$ は一般化逆関数である。この仮定からは $U = F(X)$ は一様分布 $U(0,1)$ にしたがうので $v = H^{\leftarrow}(u)$ とおけば

$$\mathcal{E}[C(F_t(X))] = \int_0^1 [1 + H^{\leftarrow}(u)]du = 1 + \int_{\mathbf{R}} v dG(v) = 1 + \delta \tag{2.11}$$

となるが、ここで母数 δ は分布関数 G の期待値を意味するので統計的分析はかなり簡単化される。すなわちこの仮定は分析の単純化の為に置かれているが、必ずしも金融時系列について実証的には支持されない仮定である。実際、我々が事前に行った若干の実証分析によれば利用の正当化は支持されなかった。そこで本稿ではこの定式化は採用せず、(すなわち $\alpha_j = 0\ (j = 1, \cdots, p)$) として拡張された多次元 Hawkes 型モデルの定式化を利用するが、より一般的な条件付強度関数の利用は興味深い研究課題である。

3. 定常点過程モデルについて

ここでまず単純な場合 $p = 1$ において一般化パレート分布のスケール関数と Hawkes 型強度関数のインパクト関数の母数（及び離散化の母数 n）を固定して

$$\sigma_1^*(s) = \beta_1\ (= \xi_1 u_1 + \sigma_1^n(s) > 0) \tag{3.1}$$

および

$$c(x) = Ax^{\delta} + B\ (0 \leq \delta \leq 1) \tag{3.2}$$

となる状況を考察しよう。特に $\delta = 0$ であれば標準的 Hawkes モデルであり、$\delta = 1$ であれば線形インパクト関数の Hawkes モデル（拡張 Hawkes モデルと呼ぶ）を意味する。また $0 \leq \delta \leq 1$ は標準的 Hawkes モデルと拡張 Hawkes モデルを含むより一般的な Hawkes 型モデルを意味している。B は定数を意味しているが、定数項 λ_{ji}^n を利用していれば、実際の推定では、一般性を失うことなく $B = 0$ としてもよい。

ここで母数を $\beta = \beta_1, \xi = \xi_1$ とおき、変換 $y = (\xi/\beta)(x - u)$ を利用して積分を求めると

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{\infty} c(x)f(x)dx \\ &= \int_u^{\infty} [Ax^{\delta} + B]\frac{1}{\beta}\left[1 + \frac{\xi}{\beta}(x-u)\right]^{-1/\xi - 1} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{A}{\xi}(u + \frac{\beta}{\xi}y)^{\delta}\right](1+y)^{-1/\xi-1}dy \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。ここで母数についての条件 $0 \leq \delta \leq 1, a, b \geq 0$ から不等式 $0 \leq (a+b)^\delta \leq a^\delta + b^\delta$ を用いると

$$
\begin{aligned}
(3.4) \qquad C &\leq \left[\frac{Au^\delta + B}{\xi}\right] \int_u^\infty (1+y)^{-1/\xi-1} dy + \frac{A}{\xi}[\frac{\sigma^*}{\xi}]^\delta \int_u^\infty y^\delta (1+y)^{-1/\xi-1} dy \\
&\leq \left[\frac{Au^\delta + B}{\xi}\right] \int_0^1 z^{\frac{1}{\xi}-1} dz + \frac{A}{\xi}(\frac{\beta}{\xi})^\delta \int_0^1 z^{\frac{1}{\xi}-\delta-1}(1-z)^\delta dz \\
&= \left[Au^\delta + B\right] + \frac{A}{\xi}(\frac{\beta}{\xi})^\delta B(\frac{1}{\xi}-\delta, \delta+1)
\end{aligned}
$$

と評価できるが、$B(p,q)$ はベータ関数を意味する。この計算を次のようにまとめておく。

補題 1： 定数 $0 \leq \delta \leq 1$ に対して

$$
(3.5) \qquad C \leq \left[Au^\delta + B\right] + \frac{A}{\xi}(\frac{\sigma^*}{\xi})^\delta \frac{\Gamma(1/\xi - 1)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1/\xi+1)}
$$

となる。

この補題より母数 $0 < \xi < 1$ なら C は有界であることが分かる。また $\xi = 0$ のときは裾確率は極限的に指数分布が対応すると見ることが可能であるので同様の議論が成立する。また特に $\delta = 1$ と置くと、補題 1 における等号が成立しているので容易に

$$
(3.6) \qquad C = A[u + \frac{\beta}{1-\xi}] + B\ .
$$

となることが分かる。

1 次元 Hawkes 型モデル $(p=1)$ において $\lambda^n(t,u) = \lambda_1^n(t,u),\ \lambda_0^n = \lambda_{10}^n$ とおいて過去の情報に依存する強度関数に関する関係を示す (2.5) の両辺の期待値をとると

$$
(3.7) \qquad \mathcal{E}[\lambda^n(t,u)] = \lambda_0^n + \int_{-\infty}^t \mathcal{E}[c(X^n(s-))g(t-s)dN^n(s)]
$$

となる。時刻 s における点過程 $\{N_j^n(s)\}$ より構成される $\sigma-$ 加法族、すなわち情報を $\mathcal{F}_s^N$ とすると、例えば $X^n(s-) \perp \mathcal{F}_{s-}^N$ のときには条件付期待値の演算は簡単化されて

$$
\begin{aligned}
(3.8) \qquad \mathcal{E}[c(X^n(s-))g(t-s)dN^n(s)] &= \mathcal{E}[\mathcal{E}(c(X^n(s-))g(t-s)dN^n(s)|\mathcal{F}_{s-}^N)] \\
&= \mathcal{E}[\mathcal{E}(c(X^n(s-)|\mathcal{F}_{s-}^N))g(t-s)\lambda^n(t,u)ds]
\end{aligned}
$$

である。定常条件とは任意の t について $v(t) = \mathcal{E}[\lambda^n(t,u)] = \bar{v}$(一定値)、すなわち $\mathcal{E}[dN(s)] = \bar{v}$ となるような実定数 $\bar{v}$ が存在する為の条件を意味する。
ここでは全体の観測期間 $[0,T]$ を固定し、離散間隔 $T/n \to 0$ となる状況を考察する。すなわち $T/n = t_i^n - t_{i-1}^n\ (i = 1, \cdots, n)$ であるから、$n \to \infty$) となる状況である。このとき連

続時間の点過程モデルの強度関数 $\lambda^n(t,u)$ の極限を $\lambda(t,u)$ とすると、その定常性について次のような主張を得る。証明は数理的付論に与えておく。

定理 1： 1 次元拡張 Hawkes 型強度モデルにおいて $X(s-)\perp\mathcal{F}_{s-}^N$ とする。離散化の母数 n について $n\to\infty$ のとき $\sigma_1^n(s)\to\sigma$ (一定値) とする。さらに $c(x)g(t-s)=[Ax+B]e^{-\gamma(t-s)}$, $\beta=\xi_1 u_1+\sigma$ (一定値) $u=u_1$,$\xi=\xi_1$ $(0\le\xi\le1)$, $\gamma=\gamma_1>0$ とすると、定常的な強度関数が存在する条件は

$$\left[B+A(u+\frac{\beta}{1-\xi})\right]<\gamma \tag{3.9}$$

により与えられる。

以上の議論を多次元拡張 Hawkes 型モデルに応用することは容易である。ここで p 次元強度関数 $\boldsymbol{\lambda}^n(t,\mathbf{u})$ および $\mathbf{N}^n(t,u)$ という表現を導入しよう。さらに幾つかの $p\times1$ 確率変数ベクトルとその期待値記号

(3.10)

$$\boldsymbol{\lambda}^n(t,\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\lambda_1^n(t,u_1)\\ \vdots\\ \lambda_p^n(t,u_p)\end{bmatrix},\mathbf{V}(t)=\mathcal{E}[\boldsymbol{\lambda}^n(t,\mathbf{u})]=\begin{bmatrix}v_1(t)\\ \vdots\\ v_p(t)\end{bmatrix},\mathbf{N}^n(t,\mathbf{u})=\begin{bmatrix}N_1^n(t,u_1)\\ \vdots\\ N_p^n(t,u_p)\end{bmatrix},$$

および $p\times p$ 行列

$$\mathbf{C}(X^n(s-))=[c_{ij}(X^n(s-))]\ ,\mathbf{G}(t-s)=[diag(g_j(t-s))] \tag{3.11}$$

と置こう。このとき過去の情報に依存する多次元強度関数 $\boldsymbol{\lambda}^n(t,\mathbf{u})$ が満たすべき鍵となる方程式は

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{\lambda}^n(t,\mathbf{u})]=\boldsymbol{\lambda}_0^n+\int_{-\infty}^t\mathcal{E}[\mathcal{E}(\mathbf{C}(X^n(s-))]\mathbf{G}(t-s)d\mathbf{N}^n(s,\mathbf{u}|\mathcal{F}_s^N)] \tag{3.12}$$

により与えられる。（ここで $\mathcal{F}_s^N$ は時刻 s における点過程から構成される $\sigma-$ 集合族 (情報) である。）このとき定理 1 の導出を一般化すると $n\to\infty$ となる状況では次のような結果が得られる。証明は数理的付論に与えておく。

定理 2： 1 次元拡張 Hawkes 型強度モデルにおいて $\mathbf{X}(s-)\perp\mathcal{F}_{s-}^{\mathbf{N}}$ とする。またインパクト関数 $C_{ij}(X^n(s-))=A_{ij}X_j^n(s-)+B_{ij},1>\xi_i\ge0$, 対角行列 $\mathbf{G}(t)=(diag(e^{-\gamma_j t})),\gamma_j>0$, $\boldsymbol{\Gamma}=(diag(\gamma_j))$ とする。離散化の母数 n について $n\to\infty$ のとき s に依存しない実定数 β_j が存在して $\sigma_j^*(s)=\xi_j u_j+\sigma_j(s)\to\beta_j$ $(j=1,\cdots,p)$ とする。

(i) 行列

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}=\left((B_{ij}+A_{ij}(u_j+\frac{\beta_j}{1-\xi_j})(\delta(i,j)\gamma_i^{-1})\right) \tag{3.13}$$

のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいとき定常的な強度関数が存在する。

(ii) すべての i,j について $A_{ij}=0$ として行列 $\mathbf{F}$ を $\mathbf{F}^*$ とする。非退化条件 $|\mathbf{C}|\neq0$ を満足

し、行列 $\mathbf{C}-\mathbf{\Gamma}$ のすべての固有値の実部が負となるものとする。このとき任意の t について $t\to\infty$ のとき極限が存在して

$$\mathbf{V}(t) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{v}} = [\mathbf{I}_p - \mathbf{F}^*]^{-1}\boldsymbol{\lambda}_0 \tag{3.14}$$

に収束する。

この命題より例えば母数について $A_{ij}=0$ であれば簡単化されることが分かる。ただしこうした表現では指標関数 $\delta(i,j)=1(i=j);\delta=0(i\neq j)$, 対角行列 $\mathbf{\Gamma}=(\mathrm{diag}(\gamma_j))$ を用いたが、ここで述べた定理 1・定理 2 は幾つかの方向により精緻化が可能である。

4. 強度関数と G-因果性

Granger (1969) は Granger-Causality(G-Causality、G-因果性と略す) を多次元離散時系列が定常過程となるときに導入した。G-Causality は予測誤差の大小により因果性を定義する試みであるが、その応用は時系列計量経済学 (time series econometrics) においては基本的な概念となっている。G-非因果性 (Granger-non-causality) の検出方法は Causality Test と呼ばれるが、検定方法や Causality Measure(因果尺度) の構成法についてはこれまで様々な議論が行われている。しかしながら、統計的極値論にもとづく点過程や金融時系列の分野ではほとんど議論が無いと思われる。G-非因果性の概念は連続時間の確率過程におけるマルチンゲール性 (martingale) と関係があるので若干の注意が必要である。関連する基礎事項については数理的付論 A に言及しておく。

連続時間の G-Noncausality 条件

Granger (1969) は離散時間の定常時系列における予測誤差の観点より G-Causality の概念を提唱し、時系列計量経済学においては様々な議論がなされている。通常の時系列分析においては離散時間の (多次元) 統計的時系列モデルの利用が一般的である。その後、連続時間の時系列について Florens, J-P. and D. Fougere (1996) は４つの異なる G-Causality の概念を提唱しているが、本稿で利用する拡張された Hawkes タイプの統計モデルではこれらの概念は数理的付論 A で説明するように Co-jumps が存在しないという仮定の下では同一となる。

非因果性と強度関数

連続時間の一般的 G-Noncausality 条件を Hakes 型強度モデルに適用しよう。ここでは $p=2$, $u_j=u\ (j=1,2)$ として $N_i^n(t,u)\ (i=1,2)$ を計数過程、各要素の t における条件付強度関数を $\lambda_i^n(t)=\lambda_i^n(t,u_j)$ とする。Hawkes 型強度モデルの第 1 要素の強度関数を

$$\lambda_1(t)=\lambda_{10}+\int_{-\infty}^{t} c_{11}(X_1(s-))e^{-\gamma_1(t-s)}dN_1^n(s)+\int_{-\infty}^{t} c_{12}(X_2(s-))e^{-\beta_2(t-s)}dN_2^n(s)$$

として、$\tau_i(t)\ (i=1,2)$ を対応する計数過程 $N_i^n(t,u)$ の将来におけるジャンプ時刻 (stopping times, 停止時刻) としよう。このとき任意の $t\geq s$ に対して強度関数により

$$P(\tau_1>t|\mathcal{F}_s^N)=e^{-\int_s^t\lambda_1(u)du}\ , \tag{4.1}$$

と表現できる。ここで $\mathcal{F}_s^N$ は時刻 $s-$ において $N_i^n(v)$ $(i=1,2; v \le s)$ について利用可能な情報、$\sigma-$field である。さらに $\mathcal{F}_{is}$ を時刻 $s-$ において $N_i^n(v)$ $(v \le s)$ について (一つの i のみ) 利用可能な情報、$\sigma-$field とする。もし計数過程 $N_2^n(v); (v \le s)$ の過去の情報が計数過程 $N_1^n(t)$ $(t \ge s)$ の将来の状況に影響しなければ任意の $t \ge s$ に対して

$$P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_s^N) = P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_{1s}) = e^{-\int_s^t \lambda_1^n(v)dv} \tag{4.2}$$

である。したがってこの条件は G-非因果性条件

$$H_0 : c_{12}(X_s) = 0 \tag{4.3}$$

を意味する。実証分析ではこの条件について統計的検定を行うことで G-非因果性の分析を行う。

因果性の尺度

G-非因果性の文脈では状態変数が連続値をとる多次元離散時系列モデルに基づく因果性尺度が議論されている。これに対して二次元の拡張された Hawkes 型モデルを利用して相対的強度寄与度 (relative intensity contribution, RIC) を次のように定義することができる。

$$RIC_{11}(t-s) = \frac{P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_{1s})}{P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_s^N)} \tag{4.4}$$

および

$$RIC_{12}(t-s) = \frac{P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_s^N) - P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_{1s})}{P(\tau_1 > t | \mathcal{F}_s^N)} \ . \tag{4.5}$$

こうして寄与度を定義すると多次元に直接的に拡張可能であり条件

$$\sum_{j=1}^{p} RIC_{ij}(t-s) = 1 \ , \ 0 \le RIC_{ij}(t-s) \le 1 \tag{4.6}$$

を満たす。ただしこうして定義した寄与率の符号が正となる保証はなく、負値を取る可能性がある。負値を取る場合には若干の修正が必要である。

Bartrett スペクトル分解

また Bartlett(1963) により提案されている点過程に対して二次共分散関数から Bartret スペクトル分解を定義することが可能である。ここでは p 次元点過程 $\mathbf{N}(t) = (N_i(t))$ が方程式

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}_0 + \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{\Gamma}(t-u) d\mathbf{N}(u) \tag{4.7}$$

を持たす定常点過程を考える。($\boldsymbol{G}(u) = (\gamma_{ij}(u)) = \mathbf{O}$) for $u < 0$ とする。) このとき定常強度 $\boldsymbol{\xi}$ は上の式に $\boldsymbol{\xi} = \mathcal{E}[\boldsymbol{\lambda}(t)]$ と置けば

$$\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(0)]^{-1} \boldsymbol{\lambda}_0 \tag{4.8}$$

で与えられる。ただし

$$\mathbf{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\mathbf{\Gamma}(\tau)d\tau \tag{4.9}$$

である。このとき 2 次共分散関数

$$\boldsymbol{\mu}(\tau) = \mathcal{E}[\frac{d\mathbf{N}(t+\tau)}{dt}\frac{d\mathbf{N}^{'}(t)}{dt}] - \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{'} \quad (\tau \neq 0) \tag{4.10}$$

とおこう。時間差ゼロも考慮した共分散関数を

$$\boldsymbol{\mu}^{(c)}(\tau) = \mathbf{D}\delta(\tau) + \boldsymbol{\mu}(\tau) \tag{4.11}$$

とするが、ここで $\delta(\cdot)$ はデルタ関数, $\mathbf{D} = (\delta(i,j)d_{ii})$(ここで d_{ii} は条件付き分散) である。このとき定常性の仮定の下で Bartrett 型スペクトル密度関数は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\boldsymbol{\mu}^{(c)}(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}[\mathbf{D} + \mathbf{M}(\omega)] \end{aligned} \tag{4.12}$$

で与えられる。ただし

$$\mathbf{M}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\boldsymbol{\mu}(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

と定める。このとき Hawkes (1971b) はフーリエ変換の議論を用いてスペクトル密度は次の形になることを示している。念のために導出の概略は数理的付論に与えておく[3]。

命題 3： (4.7) で与えられる定常性を満たす多次元 Hawkes 型モデルにおいて正則条件として正実数 η, a_1, a_2 が存在して $\gamma_{ij}(u) < a_1 e^{-\eta u}$, $|\beta_{ij}(u)| < a_2 e^{-\eta}$ を満たすものとする。(ただし $\mathbf{B}(u) = (\beta_{ij})$ の定義は数理的付録 (A.26) を参照。) このときスペクトル密度関数は

$$\mathbf{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(\omega)]^{-1}\mathbf{D}[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(-\omega)]^{-1} \tag{4.14}$$

で与えられる ($\mathbf{f}(\omega) = (f_{ij}(\omega))$ とする。)

以上の議論を利用すると、多次元 Hawkes 型モデルのスペクトル密度関数より各周波数ごとに相対的スペクトル寄与度 (relative power contribution, RPC) を定義するが可能である。状態空間が $\mathbf{R}^p$ の値をとる多次元離散時間時系列についてはスペクトル密度関数による因果性分析が econometrics においてはしばしば議論されている[4]。命題 3 で与えられたスペクトル密度関数は離散時間の統計的時系列分析でよく知られた自己回帰型のスペクトル密度関数[5]に対応しているので応用上で有用である。

[3]Hawkes (1971a) は行列 $\mathbf{D}$ の対角性を仮定している。
[4]例えば山本 (1987), 細谷 (2009) を参照。
[5]例えば Anderson (1971)5 章に詳しく説明されている。

例えば $p=2$, $\mathbf{D}$ は対角行列 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(d_{11},d_{22})$ とおこう。ここで $\mathbf{G}(\omega)=(g_{ij}(\omega))$ $(i,j=1,2)$ とさらに表現すると各 ω に対して $f_{11}(\omega)$ を分解して

$$RPC_{1\to 1}(\omega)=\frac{d_{11}(1-g_{22}(\omega))(1-g_{22}(-\omega))}{d_{11}(1-g_{22}(\omega))(1-g_{22}(-\omega))+d_{22}g_{12}(\omega)g_{12}(-\omega)} \tag{4.15}$$

および

$$RPC_{2\to 1}(\omega)=\frac{d_{22}g_{12}(\omega)g_{12}(-\omega)}{d_{11}(1-g_{22}(\omega))(1-g_{22}(-\omega))+d_{22}g_{12}(\omega)g_{12}(-\omega)} \tag{4.16}$$

により各周波数に対する相対的寄与度が定義できる。こうした点過程 (point processes) における周波数領域分析は興味深い問題である。

条件付確率予測

時刻 0 から T までのデータにより最尤推定が利用できると、例えば $(T,T^{'}]$ の間に初めてジャンプが起きる条件付確率の評価可能である。例えば

$$\mathrm{P}(\tau_k\geq T|\mathcal{F}_t)=\exp(-\int_t^T\lambda_k^n(s,u|\mathcal{F}_t^N)ds)\ , \tag{4.17}$$

あるいは期待値表現では

$$\mathrm{P}(\tau_k\geq T|\mathcal{F}_t^N)=E[1_{[\tau_k\geq T]}|\mathcal{F}_t] \tag{4.18}$$

となる。したがって、例えば $p=3$ の場合には $(p=3)$ $\sigma-$ 集合族について $\mathcal{F}_{t,(2,3)}\subset\mathcal{F}_{t,(1,2,3)}^N$ を考えよう。これらの $\sigma-$ 集合族では前者は N_2,N_3 の情報、後者は N_1,N_2,N_3 の情報を意味する。このとき

$$\mathrm{P}(\tau_k\geq T|\mathcal{F}_{t,(1,2,3)}^N)=\mathrm{P}(\tau_k\geq T|\mathcal{F}_{t,(2,3)}^N) \tag{4.19}$$

となる。すなわち $A_{k1}=0$ を意味するので G 非因果仮説の検定結果を利用するとより効率的な予測の可能性があることになる。

また時刻 0 から T までのデータによる最尤推定量を利用し $(T,T^{'}]$ の間に初めてジャンプが起きる条件付確率の評価可能。計数過程 N_k から構成される情報集合 $\mathcal{F}_t^N$ のもとで将来の初到達時刻 (first arrival time) τ の分布を

$$Pr(\tau\geq T^{'}|\mathcal{F}_T^N)=\exp(-\int_T^{T^{'}}\lambda_k^n(t,u|\mathcal{F}_T^N)dt) \tag{4.20}$$

により推定することが可能である。

例えば江原 (2016) は次節で説明するような日米、日英、日米英のデータを用いてリーマンショックを含め過去の様々な状況における確率予測など実用的で有用な情報を提供してくれることを示している。

5. 日・米・英の金融市場の変動分析

日本 (Tokyo)・米国 (New York)・英国 (London) において 1990 年 1 月 2 日〜2015 年 8 月 26 日に観測された代表的株価である日経平均 225, SP500, FTSE100 を利用して 2 次元（及び 3 次元）の拡張 Hawkes 型モデルによる実証分析を行った。株価データとして日次データから計算される収益率データを利用したが、３つの金融市場が活動する時間差を考慮して Tokyo 時間を基準としてデータ分析を行った。３つの金融市場の opening, closing の現地時間は重ならないので日米市場、日英市場の分析など二次元点過程における同時点での複数の jumps の可能性 (co-jumps) の可能性をこの分析では排除している。すなわち本研究では次の仮定を置いている。

NC 条件 ：多次元拡張 Hawkes モデルにおいては同時点での複数の jumps (co-jumps) は存在しない。

価格データのジャンプ・サイズは各市場における-[(始値)-(終値)]/(始値) としてジャンプ・サイズの閾値を $c = 0.02\ (u_j)(j = 1, 2, 3)$ としてこの大きさを超えた負のリターンが発生した時点でマクロ・ジャンプが発生したと見なした。したがってこの分析では各営業日の途中で閾値を超えていても、終了時点 (closing time) において観察される終値が始値 (opening time で観察される値) からの差が閾値を超えなかった場合はマクロジャンプが発生しなかったことになるので本文での説明と完全に整合的とは言えない。ここでは日本の株式市場ではこの差はわずかであるので、全体的な分析への差は無視できるものと見なした。ジャンプサイズの閾値の選択は重要であり、理論的には検討課題であるが、幾つかの数値を試行錯誤した結果、もっともマクロジャンプの情報を含んでいると考えられた値を選択した。

実証分析で利用したマーク付き点過程の尤度関数はジャンプサイズの分布として一般化パレート分布を用いて p 次元点過程の（周辺）対数尤度

$$(5.1)\qquad \sum_{i=1}^{p}\{-\int_0^T \lambda_i^n(s)ds + \log(\lambda_i^n(s))dN_i^n(s)\}$$

に対してさらに一般化パレート分布の対数密度関数を加えて

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}\log L &= \sum_{i=1}^{p}\{-\int_0^T \lambda_i^n(s)ds + \log(\lambda_i^n(s))dN_i^n(s)\} + \sum_{i=1}^{p}\{\int_0^T \log f_i(X_i^n(s-))dN_i^n(s)\}\\ &= L_1 + L_2\ ,\end{aligned}$$

とする。ただし

$$\begin{aligned}L_1 &= \sum_{i=1}^{p}\{-\int_0^T \lambda_i^n(s)ds + \log(\lambda_i^n(s))dN_i^n(s)\}\ ,\\ L_2 &= \sum_{i=1}^{p}\{\int_0^T \log f_i(X_i^n(s-))dN_i^n(s)\}\end{aligned}$$

で与えられる。ここで u_i を閾値とすると密度関数は

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_i^*}(1+\xi_i\frac{x_i-u_i}{\sigma_i^*})^{-\frac{1}{\xi_i}-1}\ (i=1,\cdots,p) \tag{5.3}$$

である。パラメータの推定は L_1 と L_2 とで別々に最尤法を用いることができるので、まず周辺尤度 L_2 に GPD(generalized Pareto distribution, 一般化パレート分布) を当てはめた。

市場	Log Likelihood	σ_i^*	ξ_i
日	-1190.72	0.00806	0.16874
標準偏差		0.00065	0.06431
市場	Log Likelihood	σ_i^*	ξ_i
米	-797.385	0.00765	0.21538
標準偏差		0.00076	0.08082
市場	Log Likelihood	σ_i^*	ξ_i
英	-775.779	0.00850	0.10799
標準偏差		0.00084	0.07717

最尤推定の結果は表で示したようであったが、日米英の 3 カ国における株価収益率の系列はいずれも正規分布などと比較すると裾が厚い分布であることが推定され、本稿のデータ分析で採用した一般化パレート分布を利用することの妥当性が確認された。

二次元の分析結果

2 次元 ($p=2$) として impact function $c(x)$ が (1) 1 , (2) x , (3) x^c $(0<c<1)$ の場合をそれぞれ考えて最尤推定を行う。 なお、以下で与えられている対数尤度や AIC は周辺分布のもの (前節の L_1) であり、全体の対数尤度としては先の節での一般化パレート分布の対数尤度を考慮すればよい。標準偏差は Fisher 情報量行列の推定により得られた値を採用した。

(1) の場合

ここでは強度関数 (intensity) として

$$\lambda_1^n(t) = \lambda_{10}^n + \int_0^t \alpha_{11}e^{-\gamma_1(t-s)}dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{12}e^{-\gamma_2(t-s)}dN_2^n(s)\ , \tag{5.4}$$

$$\lambda_2^n(t) = \lambda_{20}^n + \int_0^t \alpha_{21}e^{-\gamma_1(t-s)}dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{22}e^{-\gamma_2(t-s)}dN_2^n(s) \tag{5.5}$$

を推定した。ただし、安定した推定結果を得る為に母数の数を制約して γ_i は全て共通 γ として推定を行った。このモデルの最尤法で推定した結果は以下のとおりである。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日米	-2444.14	4902.27	1.48996e-02	4.51512e-03
標準偏差			0.002102	0.00162

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	6.28319e-09	1.79622e-02	2.34182e-02	5.83401e-03	3.90238e-03
	0.00070	0.00247	0.0030	0.00126	0.00093

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日英	-2421.02	4856.04	0.01692	0.00437
標準偏差			0.00235	0.00173

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	0.00062	0.02028	0.02729	0.00683	0.00361
	0.00073	0.00284	0.00341	0.00126	0.00087

なお、上の表において日米は日本が N_1 に米が N_2 に対応し、日英は日本が N_1 に英が N_2 に対応し、米英は米が N_1 に英が N_2 に対応している。

(2) の場合

次に強度関数 (Intensity) として

$$(5.6) \quad \lambda_1^n(t) = \lambda_{10}^n + \int_0^t \alpha_{11} e^{-\gamma_1(t-s)} X_1 dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{12} e^{-\gamma_2(t-s)} X_2 dN_2^n(s) \ ,$$

$$(5.7) \quad \lambda_2^n(t) = \lambda_{20}^n + \int_0^t \alpha_{21} e^{-\gamma_1(t-s)} X_1 dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{22} e^{-\gamma_2(t-s)} X_2 dN_2^n(s)$$

を推定した。ただし γ は全て共通として推定を行った。このモデルの最尤法で推定した結果は以下のとおりである。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日米	-2441.59	4897.19	4.83076e-01	1.31388e-01
標準偏差			0.07110	0.05232

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	3.12087e-07	5.81280e-01	2.32784e-02	6.72085e-03	4.31518e-03
	0.02584	0.08305	0.00310	0.00131	0.00095

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日英	-2418.77	4851.55	0.57164	0.13416
標準偏差			0.08127	0.05768

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	0.02901	0.68684	0.02833	0.007645	0.00388
	0.02905	0.09947	0.0037	0.00130	0.00089

なお、日米は日本が N_1 に米が N_2 に対応し、日英は日本が N_1 に英が N_2 に対応し、米英は米が N_1 に英が N_2 に対応している。

(3) の場合

次に強度関数 (Intensity) として

$$(5.8)\quad \lambda_1^n(t) = \lambda_{10}^n + \int_0^t \alpha_{11} e^{-\gamma_1(t-s)} {X_1}^{c_{11}} dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{12} e^{-\gamma_2(t-s)} {X_2}^{c_{12}} dN_2^n(s)$$

$$(5.9)\quad \lambda_2^n(t) = \lambda_{20}^n + \int_0^t \alpha_{21} e^{-\gamma_1(t-s)} {X_2}^{c_{21}} dN_1^n(s) + \int_0^t \alpha_{22} e^{-\gamma_2(t-s)} {X_2}^{c_{22}} dN_2^n(s)$$

を推定した。ただし β は全て共通として推定を行った。このモデルの最尤法で推定した結果は以下のとおりであるが、一部の推定値が不安定になるので制約条件 $c_{11} = c_{12}, c_{21} = c_{22}$ を課したところ安定した結果が得られた。。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
日米	-2440.769	4899.538	7.8918e-02	2.2758e-02	7.0117e-08	9.4980e-02
標準偏差			0.3553	0.1005	0.0053	0.1169

	γ	λ_{10}	λ_{20}	$c_{11} = c_{12}$	$c_{21} = c_{22}$
	2.3204e-02	6.1321e-03	4.0281e-03	4.7392e-01	4.7605e-01
	0.00305	0.00159	0.00096	1.28043	0.35940

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}
日英	-2417.74	4853.48	0.21233	0.05087	0.00656	0.17068
標準偏差			0.27649	0.06779	0.01023	0.17829

	γ	λ_{10}	λ_{20}	$c_{1,1}$=$c_{1,2}$	$c_{2,1}$=$c_{2,2}$
	0.02800	0.00730	0.00373	0.71330	0.59962
	0.00363	0.00133	0.00089	0.37337	0.29613

以上の結果から、モデル (1) よりもモデル (2), モデル (3) の方が優れていることが分かった。情報量基準 AIC で評価するとモデル (2) が最良となるのは興味深い。すなわち日米市場の表現としてモデル (3) はパラメータ数が多すぎることを意味している。

G-非因果性の検定

G-非因果性の統計的検定を行う為の検定統計量として尤度比統計量を利用した。1 次元の Hawkes 型モデルにおける母数の最尤推定量は観測期間 T が長い ($T \to \infty$) とき、標準的な正則条件の下で一致性と漸近正規性を持つことをマルチンゲール (martingale) 中心極限定理を利用して Ogata (1978) が示している。ここでは同様の正則条件の下での検定統計量の漸近的性質についての結果 (Wilks-property) をまとめておく。証明の概略については数理的付論 C に述べておく。

命題 4： 定常性を満たす多次元 Hawkes 型モデルにおいて **NC 条件**を仮定する。対数尤度関数を $L_T(\theta)$, 真の母数 θ_0 の下での対数尤度関数 $L_T(\theta_0)$, 最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の下での対数尤度関数 $L_T(\hat{\theta}_{ML})$ とすると、$T \to \infty$ のとき

$$2\{L_T(\hat{\theta}_{ML}) - L_T(\theta_0)\} \xrightarrow{d} \chi(d) \tag{5.10}$$

となる。ただし d は $\theta = (\theta_k)$ の次元であり、$\chi(d)$ は自由度 d のカイ 2 乗分布を表す。

ここで impact function を $c(x) = x$ とする多次元 Hawkes 型モデルを用いて、日米および日英間の非因果性の検定 $\alpha_{ij} = 0$ の検定を尤度比検定を行った結果を報告しておく。まず $H_0 : \alpha_{21} = 0$ の場合については、帰無仮説のもとでの推定結果は以下の通りであった。検定統計量は $2 \times (-2441.594 + 2441.594) \sim 0$ となり帰無仮説は棄却されない。(自由度 1 のカイ 2 乗分布の上側 95 パーセント点は 3.481)。つまり日本市場の動きは米国市場へ影響がない、ということが示唆された。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日米	-2441.59	4895.19	0.48299	0.13130
標準偏差			0.06967	0.05249

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	null	0.58119	0.02327	0.00672	0.00432
	null	0.08278	0.00302	0.00131	0.00084

次に $H_0 : \alpha_{12} = 0$ の場合については、帰無仮説のもとでの推定結果は以下の通りとなった。検定統計量は $2 \times (-2441.594 + 2446.297) = 9.406$ となり帰無仮説は棄却される。つまり米国市場の動きは日本市場へ影響がある、ということが示唆された。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日米	-2446.30	4904.59	4.77938e-01	null
標準偏差			0.06887	null

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	9.51571e-07	5.36629e-01	2.12087e-02	8.16127e-03	4.14042e-03
	0.02415	0.07646	0.00279	0.00129	0.00095

同様に日英データにより $H_0 : \alpha_{21} = 0$ の場合については、帰無仮説のもとでの推定結果は以下の通りであった。検定統計量は $2 \times (-2418.773 + 2419.359) = 1.172$ となり帰無仮説は棄却されない。(自由度 1 のカイ 2 乗分布の上側 95 パーセント点は 3.481)。つまり日本市場の動きは英国市場へ影響がない、ということが示唆された。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日英	-2419.36	4850.72	0.56271	0.13039
標準偏差			0.07960	0.05631

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	null	0.68456	0.02774	0.00759	0.00442
	null	0.09854	0.00356	0.00130	0.00079

次に $H_0 : \alpha_{12} = 0$ の場合には、帰無仮説のもとでの推定結果は以下の通りであった。検定統計量は $2 \times (-2418.773 + 2422.848) = 8.15$ となり帰無仮説は棄却される。つまり英国市場の動きは日本市場へ影響がある、ということが示唆された。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}
日英	-2422.85	4857.70	0.57022	null
標準偏差			0.08093	null

	α_{21}	α_{22}	γ	λ_{10}	λ_{20}
	0.02494	0.64452	0.02626	0.00874	0.00380
	0.02690	0.09437	0.00346	0.00130	0.00090

以上の分析をまとめると、の主な実証結果としては日本の株式変動から米国・英国の株式変動の影響は小さいが、米国の株式市場の日本への影響は顕著に観察されるというものであった。また推定された強度関数より将来における大きな変動の起きる確率予測の方法を考察することにより興味深い観察事実が得られた。

6. 結論的覚書

この研究では経済や金融市場で時々観察される大きな変動に焦点を当てて計量的に分析する新たな統計モデルを考察した。株価など資産価格では一般に裾が厚いことに着目し、資産価格の日々の変動が下方にある閾値を上回るとき統計的極値理論 (SEVT) でよく知られている一般化パレート分布を用いてモデル化する。そうした下方への大きな変動をマクロジャンプ、大きな変動（マクロ・ジャンプ）ととらえてその確率的変動を点過程の確率過程モデルである拡張された多次元 Hawkes タイプの統計モデルをあてはめる。こうした多次元点過程モデルにおける Granger の意味での因果性・非因果性を展開すると、従来の分析では検出しにくい、金融市場における統計分析の方法、とりわけ因果性分析の方法が開発できる。

経済の多次元時系列分析ではこれまでしばしば Granger の意味での因果性（G-Causality）が議論されている。多くの場合には多次元離散時間時系列モデルが用いられているが、イノベーションの確率分布が非ガウス分布な場合、小さな変動と大きな変動を区別することが困難なことが少なくない。これに対して本稿のように強度関数に基づく多次元点過程モデルを用いると、自然に G-因果性分析が点過程にも拡張可能である。例えば連続時間の多次元の確率過程、点過程・離散時系列の統計モデルを利用することにより、(i) 異なる周波数を含む計量モデルの作成、(ii) Causality Analysis(G-因果分析)、(iii) 将来のジャンプの条件付き確率予測などが可能である。

なお本稿では主として一般化パレート分布に基づく点過程として多次元 Hawkes 型モデルを利用したが点過程モデルとしては共ジャンプ (co-jumps) の可能性を含めて様々な定式化の可能性がある[6]。マーク付き点過程モデルにおける統計的推測、とりわけ漸近理論の展開なども重要であるので、目下検討中である。また Hawkes 型モデルを含む点過程モデルを用いた経済・金融現象の分析では閾値の選択問題などなお未開拓な統計的問題が少なくない。今後の展開が期待されよう。

References

[1] 江原斐夫 (2016), 点過程を用いた金融危機時における株価指数変動メカニズムのモデル化とその統計的推測, 東京大学経済学研究科, 修士論文 (未公刊).

[2] 細谷雄三 (2009) “スペクトル正準分解と因果諸測度の構成,” 日本統計学会誌, Vol.38-2, 251-279.

[3] 高橋倫也・志村隆影 (2016) 極値統計学, 近代科学社.

[4] 山本拓 (1987) 経済の時系列分析, 創文社.

[5] Anderson, T.W. (1971), *Statistical Analysis of Time Series*, Wiley.

[6] Bartret, M.S. (1963) “The Spectral Analysis of Point Processes,” *Journal of Royal Statistical Society (B)*, Vol.25-2, 264-296.

[6]例えば Solo (2007) などが参考になる。

[7] Coles, S. G. (2001), *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme*, Springer.

[8] Daley, D.J. and D. Vere-Jones (2003), *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Volume I, 2nd Edition, Springer.

[9] Delacherie, C. and P.A. Meyer (1960), *Probabilite and Potentials*, Paris.

[10] Florens, J-P. and D. Fougere (1996) "Noncausality in Continuous Time," *Econometrica*, 64, 1195-1212.

[11] Granger, C.W. (1969) "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods," *Econometrica*, 37, 161-194.

[12] Grothe, O., V. Korniichuk and H. Mannera (2014) "Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes," *Journal of Econometrics*, 182, 269-289.

[13] Hawkes, A. G. (1971a) "Point Spectra of Some Mutually Exciting Point Processes," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 33-3, 438-443.

[14] Hawkes, A. G. (1971b) "Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes," *Biometrika*, 58-1, 83-90.

[15] Hirsch W. and S, Smale (1974) *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra*, Academic Press.

[16] Ogata, Y. (1978) "The Asymptotic Behavior of Maximum Likelihood Estimators of Stationary Point Processes," *Annal of Institute of Statistical Mathematics*, 30, 243-261.

[17] Resnick, S. (2007), *Heavy-Tail Phenomena*, Springer.

[18] Solo, V. (2007) "Likelihood Functions for Multivariate Point Processes with Coincidences," *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decicon and Control*, 4245-4250.

数理的付論

この付論では本論では利用したが、点過程に関する標準的仮定の下での日本語の文献では利用可能ではないと思われる基礎事項、連続時間の Granger(G-) 非果性および点過程の尤度関数、について説明する。合わせて定理と命題の証明の概略も付け加えた。

付論 A：連続時間の G-非因果性

離散時間の経済時系列分析においては Granger(1969) により非因果性が導入され (本稿では G-因果性と呼ぶ)、Granger の意味での非因果性 (G-非因果性)、G-因果性の概念は広範に利用されている。G 非因果性の概念は連続時間の確率過程にも拡張可能であるが、連続時間の確率過程の一般論に関係するので自明ではない幾つかの議論が必要となる。この問題については Florens=Fougere(1996) の結果が基本的であるのでここでは本稿での議論に必要な範囲内で数学的証明は省略して言及しておく。

連続時間の多次元確率過程 (z_t, w_t, y_t) を生成するフィルター付き確率空間 $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t)$ を考える。ここで $0 \leq s \leq t$ に対して $\sigma-$ 集合体 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ であり、完備性とフィルターの右連続性

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

を仮定し、さらに sub-σ 集合体 $\mathcal{L}_t \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ とする。$\mathcal{L}_t$ は確率過程 z_t より生成され、$\mathcal{G}_t$ は確率過程 (z_t, w_t) より生成され、$\mathcal{F}_t$ は確率過程 y_t より生成されるとする。(本稿ではおおよそ $\mathcal{L}_t = \mathcal{G}_t$ の場合を考える。) G-非因果性は次のように定義される。

定義 A-1 : (弱 G 非因果性) 任意の s, t に対し $\mathcal{E}[z_t|\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}[z_t|\mathcal{G}_s]$ のとき $\mathcal{G}_t$ を所与として $\mathcal{F}_t$ は弱い意味 (weakly) で大域的意味 (globally) で z_t の原因ではない (cause しない) と云う。

定義 A-2 : (強 G 非因果性) 任意の s, t に対し $\mathcal{L}_t \perp \mathcal{F}_s | \mathcal{G}_s$ のとき $\mathcal{G}_t$ を所与として $\mathcal{F}_t$ は強い意味 (strongly) で大域的 (globally) に z_t の原因ではない (cause しない) と云う。

ここで $\mathcal{L}_t \perp \mathcal{F}_s | \mathcal{G}_s$ は条件付独立 (conditional independence) を意味する。(Dellacherie=Meyer (1980), Florens=Fougere(1996) を参照。) 連続時間の G-非因果性は確率過程論におけるフィルタレーションの拡大とマルチンゲール性が関係するが次の主張が基本的である。

定理 A-1 : (i) もし $\mathcal{G}_t$ を所与として $\mathcal{F}_t$ が強い意味 (strongly) で大域的 (globally) に z_t を cause しなければ、任意の $\mathcal{L}_t$ 適合的なマルチンゲール過程は $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールである。
(ii) 任意の任意の $\mathcal{L}_t-$ 適合的なマルチンゲール過程が $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールであれば、$\mathcal{F}_t$ は強い意味 (strongly) で大域的 (globally) に z_t を cause しない。

離散時間においては G-非因果性と瞬間的 G-非因果性の区別は直観的な議論から容易に可能である。これに対して連続時間の確率過程では瞬時的 G-非因果性はセミ・マルチンゲール性と局所 (local) マルチンゲール性に関連することが重要となる。連続時間の確率過程 z_t を (special) セミマルチンゲール

$$z_t = z_0 + H_t + M_t \tag{A.1}$$

としよう。ここで H_t は predictable(可予測) 過程, M_t は local(局所) マルチンゲールである。このとき瞬時的弱 G-非因果性は次のように定義される。

定義 A-3 : (瞬時的弱 G-非因果性) 任意の t に対し z_t が $\mathcal{F}_t$ についてセミマルチンゲールで同一の分解をもつとき、$\mathcal{G}_t$ を所与として $\mathcal{F}_t$ が弱い意味 (weakly) で瞬時的 (instantaneous) に z_t を cause しないと云う。

定義 A-4 : (瞬時的強 G-非因果性) 任意の $\mathcal{L}_t$ 適合的な $\mathcal{G}_t$(special) セミマルチンゲールが $\mathcal{F}_t$ についてセミマルチンゲールで同一の分解をもつとき、$\mathcal{F}_t$ は強い意味 (strongly) で瞬時的 (instantaneous) に z_t を cause しないと云う。

定理 A-2 : (Florens=Fougere(1996)) (i) 強い意味 (strongly) で大域的 (globally)G-非因果性は強い意味で瞬間的 $G-$ 非因果性を意味する。
$(ii)\mathcal{L}_t = \mathcal{G}_t$ のとき、適合的なマルチンゲール過程が $\mathcal{F}_t$ マルチンゲールであれば、強い意味で瞬間的 G-非因果性は $\mathcal{F}_t$ は強い意味 (strongly) で大域的 (globally)G-非因果性を意味する。

連続時間の確率過程では G-非因果性の概念は様々に考えられるが、Co-jump が存在しない点過程の標準的仮定の下では多次元の計数過程については簡単化される。ここでは結果のみを述べておく。

定理 A-3 : (Florens=Fougere(1996)) $N_t = (N_t^1, N_t^2)$ を二次元計数過程であり $N_t^1 = \sum_{n>0} 1_{\{\tau_n^1 \le t\}}$, $N_t^2 = \sum_{n>0} 1_{\{\tau_n^2 \le t\}}$ であり τ_n^1, τ_n^2 を正値をとる確率変数の増加列であり N_t^1, N_t^2 のジャンプ時刻、$\mathcal{L}_t = \mathcal{G}_t$ は N_t^1 を生成するフィルターレーション、$\mathcal{F}_t$ は N_t^2 を生成するフィルターレーションとする。**NC 条件**の仮定の下では四つの G-非因果性は同等となる。

付論 B：点過程の尤度関数について

本稿中で扱った Hawkes 型の点過程やより一般の点過程に対する尤度関数の表現は自明ではない。ここでは必要な範囲で正則な点過程のクラスに対する尤度関数の導出について説明するが、より詳しい議論は例えば Daley=Vere-Jones(2003) を参照。

点過程 N と有界 Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, 確率変数 $N(A)$ の法則を記述するため, 以下で定義される局所 Janossy 測度 (密度) を導入しよう。点過程の尤度関数の導出には局所 Janossy 測度 (密度) が重要な役割を果たす。

定義 B-1 局所 Janossy 測度 (密度) の定義 ： 任意の有界な Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, A を与えたときの局所 Janossy 測度 $J_n(\cdot|A)$, $n = 1, 2, \ldots$ を以下で定義する。

$$J_n(dx_1 \times \cdots \times dx_n|A) = P\left(\left\{\begin{array}{c} N(A) = n \text{ かつ } n \text{ 個の点が } A \text{ に含まれる} \\ \text{微小領域 } dx_1, \ldots, dx_n \text{ に位置する} \end{array}\right\}\right). \tag{A.2}$$

さらに局所 Janossy 測度が $\mathbb{R}^{nd}$ 上の Lebesgue 測度に対して絶対連続なとき, その Radon-Nikodym 導関数を局所 Janossy 密度 $j_n(\cdot|A)$ と定義する。

定義 B-2 正則点過程の定義 ： 有界な Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の点過程 N が A 上で正則であるとは, 任意の正の整数 k に対して局所 Janossy 測度 $J_n(dx_1 \times \cdots \times dx_k|A)$ が局所 Janossy 密度 $j_n(\cdot|A)$ をもつことである。

正則点過程の尤度関数は局所 Janossy 密度を用いて定義する。

定義 B-3 正則点過程の尤度関数の定義 ： 有界な Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 上での正則点過程 N の実現 $x_1, \cdots, x_n$ の尤度関数を以下で定義する。

(A.3)
$$L_A(x_1, \cdots, x_n) = j_n(x_1, \cdots, x_n|A).$$

上記の定義は抽象的な定義である. 良く知られているように, 斉時 Poisson 過程は強度 $\lambda > 0$ によりその法則が特徴づけられる。以下ではより一般の正則点過程に対して, 局所 Janossy 密度から正則点過程の生存関数が一意に定まることを述べる. さらに生存関数から強度関数を構成し, 強度関数による正則点過程の尤度関数の表現を与える. 以下簡単のため, 点過程 N は $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上で定義されているとし, 有界 Borel 集合 A は $A = [0, T]$ として考えよう。まずいくつか記号を導入する。

- $\{t_1, \cdots, t_{N(T)}\}$： 区間 $(0, T)$ 上の $N(T)$ 個の点の発生時刻.
- $\{\tau_i = t_i - t_{i-1}\}$： 次の点が発生するまでの待ち時間. ただし $t_0 = 0$.
- $S_k(u|t_1, \cdots, t_{k-1}) = P(\tau_k > u|t_1, \cdots, t_{k-1})$： 条件付き生存関数.
- $p_1(t)$, $p_2(t|t_1), \ldots$： $S_1(u)$, $S_2(u|t_1), \ldots$ に対応する確率密度：
  $S_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1}) = 1 - \int_{t_{n-1}}^t p_n(u|t_1, \cdots, t_{n-1})du$

定理 B-1： 以下の関係式が成立する。ただし以下では $j_n(t_1, \cdots, t_n|T) = j_n(t_1, \cdots, t_n|[0, T])$ とする。

$$\begin{aligned}
J_0(T) &= S_1(T). \\
j_1(t_1|T) &= S_2(T|t_1)p_1(t_1). \\
j_2(t_1, t_2|T) &= S_3(T|t_1, t_2)p_2(t_2|t_1). \\
&\vdots \\
j_n(t_1, \cdots, t_n|T) &= S_{n+1}(T|t_1, \cdots, t_n)p_n(t_n|t_1, \cdots, t_{n-1}) \cdots p_2(t_2|t_1)p_1(t_1).
\end{aligned}$$

(証明) まず $[0, t]$ で点が発生しない事象を考えよう。この事象は $\{T$ までに点が発生しない $\} \cup$ $\{t$ 以降に点が発生 $\}$ であるから,

(A.4)
$$J_0(t) = J_0(T) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_t^T \cdots \int_t^T j_k(u_1, \ldots, u_k|T)du_1 \cdots du_k.$$

また $p_1(t)$ は時刻 t で 1 つ目の点が発生する確率であるから,

(A.5) $$p_1(t) = j_1(t|T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T \cdots \int_t^T j_k(t, u_2, \ldots, u_k|T) du_2 \cdots du_k.$$

さらに $p_1(t_1)S_2(t|t_1)$ は時刻 t_1 で 1 つ目の点が発生し, 時刻 t まで 2 つ目の点が発生しない確率であるから,

$$\begin{aligned} p_1(t_1)S_2(t|t_1) &= j_1(t_1|T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T \cdots \int_t^T j_k(t_1, u_2, \ldots, u_k|T) du_2 \cdots du_k \\ &= j_1(t_1|t). \end{aligned}$$

同様に考えると以下の関係を得る。

(A.6)
$$p_1(t_1)p_2(t|t_1) = j_2(t_1, t|T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T \cdots \int_t^T j_k(t_1, t, u_3, \ldots, u_k|T) du_3 \cdots du_k.$$

一般の場合も同様にして帰納的に導くことが出来る。(証明終)

正則点過程の生存関数が与えられると, それを用いて点過程の強度関数が定義でき, 最終的に正則点過程の尤度関数が強度関数を用いて与えられる。

定理 B-2 正則点過程の尤度関数 : 正則点過程 N の区間 [0,T] 上での尤度関数は以下の式で与えられる。ただし以下で $t_1, \cdots, t_n$ は N の区間 $[0, T]$ 上での実現値 (点の発生時刻) である。

$$L = \left(\prod_{i=1}^{N(T)} \lambda^*(t_i) \right) \exp\left(- \int_0^T \lambda^*(u) du \right),$$

ここで $\lambda^*(t)$ は以下で与えられる関数

(A.7) $$\lambda^*(t) = \begin{cases} h_1(t), & 0 < t \le t_1, \\ h_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1}), & t_{n-1} < t \le t_n, 2 \le n. \end{cases}$$

ただし, $h_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1})$ はハザード関数

$$h_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1}) = \frac{p_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1})}{S_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1})}.$$

(証明) 生存関数とハザード関数の関係から,

(A.8) $$p_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1}) = h_n(t|t_1, \cdots, t_{n-1}) \exp\left(- \int_{t_{n-1}}^t h_n(u|t_1, \cdots, t_{n-1}) du \right),$$

が成り立つ. 定理 B-1 の関係式を用いると,

$$\begin{aligned}
L &= \left[\prod_{j=1}^{N(t)} p_j(t_j|t_1,\ldots,t_{j-1})\right] S_{N(t)}(t|t_1,\ldots,t_{N(t)}) \\
&= \left[\prod_{j=1}^{N(t)} h_j(t_j|t_1,\ldots,t_{j-1}) \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h_j(u|t_1,\ldots,t_{j-1})du\right)\right] \\
&\times \exp\left(-\int_{t_{N(t)}}^{t} h_{N(t)}(u|t_1,\ldots,t_{N(t)})du\right) \\
&= \left[\prod_{j=1}^{N(t)} \lambda^*(t_j) \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda^*(u)du\right)\right] \exp\left(-\int_{t_{N(t)}}^{t} \lambda^*(u)du\right) \quad (\lambda^*(\cdot)\text{ の定義}) \\
&= \left[\prod_{i=1}^{N(t)} \lambda^*(t_i)\right] \exp\left(-\int_0^T \lambda^*(u)du\right).
\end{aligned}$$

(証明終)

以下ではマーク付き点過程の尤度関数の導出について説明しよう。実際にはこれまでの議論とほぼ同様にしてマーク付き点過程の尤度関数を導出することができる。マークがない場合との違いは尤度関数に新たにマークの確率密度が現れる点である。まず Janossy 測度の定義をマーク付き点過程の場合に拡張する。

定義 B-4 マーク付き点過程の定義 : $E, \mathcal{K}$ をそれぞれ完備可分距離空間とする。点過程 N がロケーション E とマーク $\mathcal{K}$ をもつマーク付き点過程であるとは, N が $E \times \mathcal{K}$ 上の点過程で, なおかつ任意の有界な Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(E)$ に対して $N_g(A) = N(A \times \mathcal{K}) < \infty$ a.s. を満たす点過程となることである。ここで $N_g(\cdot)$ は点過程 N の基底過程[7]と呼ばれる。

例えば多次元点過程 $N = (N_1, \ldots, N_m)'$ はマークの空間が $\mathcal{K} = \{1, \cdots, m\}$ であるマーク付き点過程として見ることが出来る。このとき基底過程として $N_g(\cdot) = N(\cdot \times \{1, \cdots, m\}) = \sum_{i=1}^m N(\cdot \times \{i\}) = \sum_{i=1}^m N_i(\cdot)$ とすることができる。

マークが定義される可測空間 $(\mathcal{K}, \mathscr{B}(\mathcal{K}))$ 上の測度 $l_{\mathcal{K}}(\cdot)$ を参照測度[8]と呼ぼう。参照測度が与えられると正則点過程の概念をマーク付き点過程に対して拡張することが出来る。以下簡単のため $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$ 上のマーク付き点過程 N について考えよう。また $l(\cdot)$ を $\mathbb{R}_+$ 上の Lebesgue 測度とする。

定義 B-5 正則マーク付き点過程の定義 : $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$ 上のマーク付き点過程 N が有界 Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上で正則であるとは, 任意の $n \geq 1$ に対して局所 Janossy 測度 $J_n(\cdot|A \times \mathcal{K})$ が測度 $l \times l_{\mathcal{K}}$ の n 個の直積測度に対して絶対連続になることである。

[7] ground process
[8] reference measure

正則マーク付き点過程に対する局所 Janossy 密度を以下で定義する。

定義 B-6 マーク付き点過程に対する局所 Janossy 密度の定義 ： マーク付き点過程が有界な Borel 集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ 上で正則であるとき、以下のようにして局所 Janossy 密度が定義する。

$$
\begin{aligned}
& j_n(x_1,\cdots,x_n,\kappa_1,\cdots,\kappa_n|A\times\mathcal{K})dx_1\cdots dx_n l_{\mathcal{K}}(d\kappa_1)\cdots l_{\mathcal{K}}(d\kappa_n) \\
&\quad = P\left(\left\{\begin{array}{c} N_g(A)=n \text{ かつ } n \text{ 個の点が } A \text{ の微小領域 } dx_1,\ldots,dx_n \\ \text{に位置し, 各点が } \mathcal{K} \text{ の微小領域 } d\kappa_1,\ldots,d\kappa_n \text{ にマークをもつ} \end{array}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

マークがない場合と同様に以下の関係式が成立する。

$$
\begin{aligned}
J_0(T) &= S_1(T). \\
j_1(t_1,\kappa_1|T) &= p_1(t_1,\kappa_1) = p_1(t_1)f_1(\kappa_1|t_1). \\
j_2(t_1,t_2,\kappa_1,\kappa_2|T) &= p_1(t_1)f_1(\kappa_1|t_1)p_2(t_2|(t_1,\kappa_1))f_2(\kappa_2|(t_1,\kappa_1),t_2). \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

ただし $f_n(\kappa|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}),t)$ は $(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}),t$ を与えたときのマークの条件付き密度である。したがってマークがない場合と同様にして正則マーク付き点過程に対する強度関数が以下のように定義できる。

(A.9)

$$
\lambda^*(t,\kappa) = \begin{cases} h_1(t), & 0 < t \le t_1, \\ h_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}))f_n(\kappa|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}),t), & t_{n-1} < t \le t_n, 2 \le n. \end{cases}
$$

ただし $h_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}))$ はハザード関数

$$
h_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1})) = \frac{p_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}))}{S_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}))} \tag{A.10}
$$

である。ここで $\lambda^*(t,\kappa)$ の定義で用いた h_n, f_n をそれぞれ

$$
\lambda^*(t_n) = h_n(t|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1})) \tag{A.11}
$$

$$
f^*(\kappa_n|t_n) = f_n(\kappa|(t_1,\kappa_1),\cdots,(t_{n-1},\kappa_{n-1}),t_n) \tag{A.12}
$$

とすると、正則なマーク付き点過程の尤度関数は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
L &= \left(\prod_{i=1}^{N_g(T)} \lambda^*(t_i,\kappa_i)\right)\exp\left(-\int_0^T\int_{\mathcal{K}}\lambda^*(u,\kappa)dud\kappa\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{N_g(T)} \lambda_g^*(t_i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N_g(T)} f^*(\kappa_i|t_i)\right)\exp\left(-\int_0^T\int_{\mathcal{K}}\lambda^*(u,\kappa)dud\kappa\right).
\end{aligned} \tag{A.13}
$$

マーク付き点過程の尤度関数の例 (多次元 Hawkes 過程)： p 次元の点過程 $N=(N_1,\ldots,N_p)$ を考え, それぞれの点過程の強度 $\lambda_m(t)$ が

$$\lambda_m(t)=\lambda_m+\sum_{j=1}^{p}\int_0^t \alpha_{m,j}e^{-\beta(t-s)}dN_j(s), \tag{A.14}$$

と表される場合を考えよう。この場合のマークは $m=1,2,\cdots,p$ であり, p 個の点過程の和を取り, 基底過程 N_g を考えると強度は次のように表現される。

$$N_g^*(t)=\sum_{m=1}^{p}N_m(t),\quad \lambda_g^*(t)=\sum_{m=1}^{p}\lambda_m(t).$$

$m=1,2,\cdots,p$ に対して N_m の区間 $[0,T]$ 上での実現が $\{t_{1,m},\cdots,t_{n_m,m}\}$ であるとする。このとき N_g^* の実現は $\{t_{1,m},\cdots,t_{N_m(T),m}\}$ を m について足し上げ, 小さい順に並べ直したものであり $\{t_1^*,\cdots,t^*_{N_g^*(T)}\}$ と書き直すことができる。したがってマーク付き点過程 N の実現は $\{(t_1^*,m_1)\cdots,(t^*_{N_g^*(T)},m_{N_g^*(T)})\}$ となる。ここで m_1 などは $1,2,\cdots,p$ のいずれかの整数である。また

$$\lambda^*(t_i^*,m_i)=\lambda_{m_i}(t_i^*), \tag{A.15}$$

であるから, p 次元の点過程の対数尤度は以下のように表現される。

$$\log L(T|t_1^*,\cdots,t^*_{N_g^*(T)})=\sum_{m=1}^{p}\left(-\int_0^T\lambda_m(t)dt+\int_0^T\log(\lambda_m(t))dN_m(t)\right).$$

マーク付き点過程の尤度関数の例 (マーク付き多次元 Hawkes 過程)： 上記の多次元 Hawkes 過程をさらに拡張しよう。具体的には第 m 成分の強度が新たな確率過程 $X(t)=(X_1(t),\ldots,X_p(t))$ に依存する場合に拡張して、$X_m(t)$ の密度関数を $f_m(x|t)$, $m=1,\cdots,p$ とする。p 次元の点過程 $N=(N_1,\ldots N_p)$ を考え, N_m の強度 $\lambda_m(t)$ が

$$\lambda_m(t)=\lambda_m+\sum_{j=1}^{p}\int_0^t \alpha_{m,j}e^{-\beta(t-s)}C(X_j(s-))dN_j(s), \tag{A.16}$$

と表される場合を考える。ここで $C(\cdot)$ はインパクト関数と呼ばれる関数である。さらに p 個の点過程の和を取り新しい点過程 N_g^* を考えて対応する強度を書くと以下のようになる。

$$N_g^*(t)=\sum_{m=1}^{p}N_m(t),\quad \lambda_g^*(t)=\sum_{m=1}^{p}\lambda_m(t).$$

$m=1,2,\cdots,p$ に対して N_m の $[0,T]$ 上での実現が $\{(t_{1,m},X_m(t_{1,m})),\cdots,(t_{n_m,m},X_m(t_{n_m,m}))\}$ であるとする。このとき, N_g^* の $[0,T]$ 上での実現は $\{t_{1,m},\cdots,t_{N_m(T),m}\}$ を m について足

し上げ, 小さい順に並べ直したものであり,$\{t_1^*, \cdots, t_{N_g^*(T)}^*\}$ と書き直せる。したがって N の実現は $\{(t_1^*, m_1, X_{m_1}(t_1^*)) \cdots, (t_{N_g^*(T)}^*, m_{N_g^*(T)}, X_{m_{N_g^*(T)}}(t_{N_g^*(T)}^*))\}$ となる。ここで m_1 などは $1, 2, \cdots, p$ のいずれかの整数である。以上のもとで, t を与えたときのマーク $\{m, X_m(t)\}$ の条件付き密度関数が

$$f^*(m, X_m(t)|t) = f_m(X_m(t)|t). \tag{A.17}$$

であるから, マーク付き多次元 Hawkes 過程に対して以下の対数尤度の表現が得られる。

$$\begin{aligned}&\log L(T|\{(t_1^*, m_1, X_{m_1}(t_1^*)) \cdots, (t_{N_g^*(T)}^*, m_{N_g^*(T)}, X_{m_{N_g^*(T)}}(t_{N_g^*(T)}^*))\})\\ &= \sum_{m=1}^{p}\left(-\int_0^T \lambda_m(t)dt + \int_0^T \log(\lambda_m(t))dN_m(t)\right) + \sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{N_m(T)} \log f_m(X_m(t_{k,m})|t_{k,m}) \,.\end{aligned}$$

付論 C：定理・命題の証明の概略

C-1:定理 1・定理 2 の証明の概要：

(i) 定理 1 は定理 2 において $p=1$ とすれば得られる。$\boldsymbol{\lambda}(t)$ が定常過程であるときその極限を $\boldsymbol{\lambda}^n$ とすると、

$$\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{\lambda}_0^n + \int_{-\infty}^{t} \mathcal{E}[\mathcal{E}(\mathbf{C}(X^n(s-))\mathbf{G}(t-s)|\mathcal{F}_s^N)d\mathbf{N}^n(s)] \tag{A.18}$$

を満足する。ここで仮定の下では $n \to \infty$ のとき $\mathcal{E}(\mathbf{C}(X^n(s-))|\mathcal{F}_s^N)] \to \mathbf{C}$ である。さらに例えば一次元の時には $\gamma > 0$ に対して $\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}ds = 1/\gamma$ であることに注意しよう。各要素について計算すると p 次元では $\boldsymbol{\Gamma} = (diag\ (\gamma_j))$ より仮定から $n \to \infty$ のとき $p \times p$ 行列 $\mathbf{C}$ が存在して

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \mathbf{C}\int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t-s)\boldsymbol{\lambda}ds \tag{A.19}$$

である。したがって、条件を満たせば定常解が存在する。例えば $p=1$ であれば $c^n(s) = \mathcal{E}[C(X^n(s-))]$ として

$$\lambda[1 - \int_{-\infty}^{t} [\lim_{n\to\infty} c^n(s)]e^{-\gamma(t-s)}ds] = \lambda_0 \tag{A.20}$$

となる λ が存在する。

(ii) ここで正実数 $\gamma > 0$ に対して $p=1$ のとき方程式 $v(t) = \lambda_0 + c\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}v(s)ds$ の両辺を微分すると

$$\frac{dv(t)}{dt} = [c-\gamma]v(t) + \gamma\lambda_0 \tag{A.21}$$

が得られる。
同様に $p>1$ のとき $\mathbf{C}$ は非退化の行列なので $\mathbf{V}(t)=\mathcal{E}[\boldsymbol{\lambda}(t)]$ は

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}=\mathbf{C}\left[-\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma_1(t-s)}v_1(s)ds\\ \vdots\\ \int_{-\infty}^{t}e^{-\gamma_p(t-s)}v_p(s)ds\end{pmatrix}+\mathbf{V}(t)\right] \tag{A.22}$$

を満足する。$|\mathbf{C}|\neq 0$ ならば連立微分方程式

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}=\mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\lambda}_0+\mathbf{C}\left[\mathbf{I}_p-\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{C}^{-1}\right]\mathbf{V}(t) \tag{A.23}$$

を満足する。したがってこの連立方程式の安定性は固有方程式

$$|(\mathbf{C}-\mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{C}^{-1})-x\mathbf{I}_p|=0 \tag{A.24}$$

の解の挙動に依存する。左から $\mathbf{C}^{-1}$, 右から $\mathbf{C}$ を乗じると固有方程式は次式に帰着される。連立微分方程式の解の挙動についてはよく知られているように、固有方程式

$$|(\mathbf{C}-\boldsymbol{\Gamma})-x\mathbf{I}_p|=0 \tag{A.25}$$

の解であるすべての固有値の実部が負であることが $t\longrightarrow\infty$ のとき微分方程式の解が収束する為の十分条件である。(例えば Hirsch and Smale (1974) を参照。) したがって結果を得る。
Q.E.D.

C-2:命題 3 の証明の概要：(4.7) および (4.10) より変数変換 $u^{'}=u-t$ および (4.11) を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}(\tau)&=\mathcal{E}\{[\boldsymbol{\lambda}_0+\int_{-\infty}^{t+\tau}\boldsymbol{\Gamma}(t+\tau-u)d\mathbf{N}(u)]\frac{d\mathbf{N}^{'}(t)}{dt}]\}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{'}\quad(\tau\neq 0)\\&=\int_{-\infty}^{\tau}\boldsymbol{\Gamma}(\tau-u^{'})\boldsymbol{\mu}^{(c)}(u^{'})du^{'}\ .\end{aligned} \tag{A.26}$$

となる。したがって関係

$$\boldsymbol{\mu}(\tau)=\boldsymbol{\Gamma}(\tau)\mathbf{D}+\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Gamma}(\tau-u)\boldsymbol{\mu}(u)du\ \ ,\tau>0 \tag{A.27}$$

が成り立つが、ここで (4.11) より制約条件 $\boldsymbol{\mu}(-\tau)=\boldsymbol{\mu}^{'}(\tau)$ を満足する解を求める必要がある。そこで

$$\mathbf{B}(\tau)=\mathbf{G}(\tau)\mathbf{D}+\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Gamma}(\tau-u)\boldsymbol{\mu}(u)du-\boldsymbol{\mu}(\tau)\ \ ,-\infty<\tau<\infty \tag{A.28}$$

と置こう。(このとき定義より $\mathbf{B}(\tau)=\mathbf{O}$ $(\tau<0)$ である。) この等式の両辺のフーリエ変換をとると、それぞれの項のフーリエ変換 $\mathbf{B}(\omega),\mathbf{G}(\omega),\mathbf{M}(\omega)$ の間には関係

$$\mathbf{B}(\omega)=\mathbf{G}(\omega)\mathbf{D}+\mathbf{G}(\omega)\mathbf{M}(\omega)-\mathbf{M}(\omega) \tag{A.29}$$

が成り立つ。したがって

$$\mathbf{M}(\omega) = [\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(\omega)]^{-1}[\mathbf{G}(\omega)\mathbf{D} - \mathbf{B}(\omega)] \tag{A.30}$$

となる。また制約条件として (4.13) より $\mathbf{M}(-\omega) = \mathbf{M}^{'}(\omega)$ となることを用いると

$$[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(-\omega)][\mathbf{G}(-\omega)\mathbf{D} - \mathbf{B}(-\omega)] = [\mathbf{G}^{'}(\omega)\mathbf{D} - \mathbf{B}^{'}(\omega)][\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(\omega)] \tag{A.31}$$

と云う関係が成立する。したがって、設けた仮定を利用するとフーリエ変換の議論 (正則条件の下で次の関数 $\mathbf{H}(\omega)$ の正則性の議論を利用する[9]) より

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(-\omega)]\mathbf{B}^{'}(\omega) + \mathbf{G}(-\omega)\mathbf{D} = \mathbf{B}(-\omega)[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(\omega)] + \mathbf{D}\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{O} \tag{A.32}$$

である。したがってこの関係を解くと

$$\mathbf{B}^{'}(\omega) = [\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(-\omega)]^{-1}[-\mathbf{G}(-\omega)\mathbf{D}] \tag{A.33}$$

が得られる。この関係をさらに $\mathbf{M}(\omega)$ に代入すると

$$\mathbf{M}(\omega) = [\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(\omega)]^{-1}[\mathbf{G}(\omega)\mathbf{D}(\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(-\omega)) + \mathbf{D}\mathbf{G}^{'}(-\omega)][\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(-\omega)]^{-1}$$

となるので、$\mathbf{D} + \mathbf{M}(\omega)$ を整理すると 3 項が消えて $[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}(\omega)]^{-1}\mathbf{D}[\mathbf{I}_p - \mathbf{G}^{'}(-\omega)]^{-1}$ が残るので、命題 3 の表現を得る。
Q.E.D.

C-3:命題 4 の証明の概要:ここでの議論の大部分は漸近理論における標準的議論であり Ogata (1978) が説明している。そこで通常の正則条件に関連することをここでは省略し、重要なポイントに絞って述べる。
(i) テーラー展開により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial L_T(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 L_T(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'}\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \\ &+ \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0)^{'}\{-\frac{\alpha}{T}\int_0^T H(t,\omega)dt + -\frac{\beta}{T}\int_0^T G(t,\omega)dN_t\}(\hat{\theta} - \theta_0) \end{aligned}$$

となる。ただし α は $|\alpha_{i,j}| \leq \frac{d^2}{2}$ β は $|\beta_{i,j}| \leq \frac{d^2}{2}$ を満たす確率変数からなる $d \times d$ 行列である。Ogata(1978) と同様の議論より右辺第 3 項は 0 に確率収束する。また右辺第 2 項は Ogata(1978) と同様に martingale(マルチンゲール) 中心極限定理を用いることにより $N(0, E[\Delta(0,1)\Delta(0,1)^{'}])$ に分布収束することが分かる。ただし

$$\Delta(0,1) \equiv -\sum_{m=1}^{p}\int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta}dt + \sum_{m=1}^{p}\int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta}\frac{1}{\lambda_m(t)}dN_{m,t}$$

[9]詳しくは Hawkes (1971b) を参照。

である。

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 L_T(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'} \xrightarrow{p} E[\frac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial\theta'}]$$

であるから $A = E[\Delta(0,1)\Delta(0,1)^{'}]$, $B = E[\frac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial\theta'}]$ とおけば、

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0) \ \xrightarrow{d}\ N(0, B^{-1}AB^{-1})$$

となることが分かる。

(ii) 記号の煩雑さを避けて議論の一般性を失うことなく $p=2$ とする。スコア関数を求めると

$$\frac{\partial L_T}{\partial\theta_i} = -\int_0^T (\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_i}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_i})dt + \int_0^T (\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_i}\frac{dN_{1,t}}{\lambda_1}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_i}\frac{dN_{2,t}}{\lambda_2})$$

であるから

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial L_T}{\partial\theta_i}\tfrac{\partial L_T}{\partial\theta_j} \quad &= [\int_0^T (\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_i}(dt-\frac{dN_{1,t}}{\lambda_1(t)})+(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_i}(dt-\frac{dN_{2,t}}{\lambda_2(t)})] \\
&\times[\int_0^T (\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_j}(ds-\frac{dN_{1,s}}{\lambda_1(s)})+(\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_j}(dt-\frac{dN_{2,s}}{\lambda_2(s)})] \\
= \qquad & \int_0^T \frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_j}(dtds - dt\frac{dN_{1,s}}{\lambda_{1,s}} - ds\frac{dN_{1,t}}{\lambda_{1,t}} + \frac{dN_{1,s}}{\lambda_{1,s}}\frac{dN_{1,t}}{\lambda_{1,t}}) \\
&+\int_0^T \frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_j}(dtds - dt\frac{dN_{2,s}}{\lambda_{2,s}} - ds\frac{dN_{2,t}}{\lambda_{2,t}} + \frac{dN_{2,s}}{\lambda_{2,s}}\frac{dN_{2,t}}{\lambda_{2,t}}) \\
&+\int_0^T \frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_j}(dtds - dt\frac{dN_{2,s}}{\lambda_{2,s}} - ds\frac{dN_{1,t}}{\lambda_{1,t}} + \frac{dN_{2,s}}{\lambda_{2,s}}\frac{dN_{1,t}}{\lambda_{1,t}}) \\
&+\int_0^T \frac{\partial\lambda_2}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\theta_j}(dtds - dt\frac{dN_{1,s}}{\lambda_{1,s}} - ds\frac{dN_{2,t}}{\lambda_{2,t}} + \frac{dN_{1,s}}{\lambda_{1,s}}\frac{dN_{2,t}}{\lambda_{2,t}})
\end{aligned}$$

となる。この式の両辺の期待値をとると第1項と第2項の和の条件付き期待値はOgata(1978)より $\sum_{k=1}^2 \int_0^T \frac{\partial\lambda_k}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_k}{\partial\theta_j}\frac{1}{(\lambda_k)}dt$ となる。
次に第3項と第4項について考える。Ogata (1978) にならって (a) $s\le t$ (b) $t\le s(c)$ $s=t$ の場合を考える。第3項と第4項ともに (a), (b) の場合について $E[dN_k(t)|H_t] = \lambda_k(t)dt$ の性質より 0 になる。さらに Hawkes 型モデルでは条件付共分散に関する条件

$$Cov[(N_i(t+h)-N_i(t)),(N_j(t+h)-N_j(t))|\mathcal{F}_t] = o(h^2) \ \ (i\ne j; i,j=1,\cdots,p)$$

が成立するので (c) も無視できる。したがって、定常性より

$$\frac{1}{T}\sum_{k=1}^2\int_0^T \frac{\partial\lambda_k}{\partial\theta_i}\frac{\partial\lambda_k}{\partial\theta_j}\frac{1}{\lambda_k}dt \xrightarrow{p} E[\Delta(0,1)\Delta(0,1)^{'}]$$

となるので仮定の下で $A = B$ となることが分かる。再びテーラー展開を用いると

$$2\{L_T(\hat{\theta}) - L_T(\theta_0)\} = 2\frac{\partial L_T(\hat{\theta})}{\partial \theta'}(\hat{\theta} - \theta_0) + (\hat{\theta} - \theta_0)'\frac{\partial^2 L_T(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'}(\hat{\theta} - \theta_0) + o_p(1)$$

である。ここで右辺第 1 項は 0 に確率収束し、さらに $A = B$ より $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, A^{-1})$ となることより命題 4 の結果が得られる。
Q.E.D.