88—J—3

「期待と時系列— I 」

國友直人

(東京大学)

1988年2月

東京大学経済学部

0.はじめに

ある市場を構成する経済主体に関心のある経済状態が確率過程｛y_t｝であらわされているとしましょう。ここで時間変数ｔは離散的であってy_tは実数値をとるものとします。また時点ｔにおいてこの経済主体にとって利用可能な情報をI_t＝｛y_s，ｓ≦ｔ｝としてみましょう。このとき経済主体は様々な理由から将来時点ｔ＋ｈ（ｈ≧１）における経済状態y_{t+h}の予想を行って様々な経済行動を行っていると考えられます。

例えば畜産農家にとって豚肉の将来価格の予想はこれからの生産計画を決定するに際して重要な役割を演じていると農業の経済分析では考えます。もし予想卸売価格が低ければ農家の生産拡大の意欲は低いでしょうし、予想価格が非常に高ければ資金を調達して投資を行い、生産能力を拡張しようと計画するでしょう。また株式市場では株式の売り手と買い手にとって株価の将来予想とともに将来の企業の収益見通し（期待）が経済の基礎的条件として重要な役割を演じていると考えられています。ある特定な企業が将来有望な新商品の開発に成功したのとニュースによってその企業の株価が急上昇することがよくあります。以上の２つの例は人々の多面的な経済行動なかでほんの些細な例にしかすぎません。現代の経済活動、例えば生産、消費、投資、貯蓄、金融、労働等々、あらゆる経済分野において人々は何らかの将来に関する計算（予想）をもとにして行動していると考えられます。そこで、このように将来のことを予想しながらいろいろな活動を行っている経済主体からなる経済を分析しようとする経済学においては、経済主体が将来についてどのように期待形成を行っているかが一つの重要な問題と考えられています。

この期待形成を巡る問題は単に経済の現実を説明するだけには留まらず、経済の政策問題を考える際にも重要となります。事実、この問題が期待形成を巡って経済学が議論する最大の理由といっても過言ではないでしょう。例えば来年はじめから間接税についての１年限りの増税が本年中に発表されたとしましょう。このとき、この増税の経済効果はどの様に考えたらよいでしょうか。この場合、人々が増税が”１年限り”であることを予想して行動するであろうことを考慮せずに経済分析を行い、経済政策の効果、例えば税収予想や景気に対する影響などを予測する場合には相当ミスリーディングな結論が導かれうることが想像されるでし

ょう。

本稿では計量経済分析における期待の役割と経済時系列の統計的分析を基本テーマとして、最近の計量経済分析における統計的方法とその問題点を展望したいと思います。展望ですので多くの問題は既に何等かの形で論じられているわけですが幾つかの点でこれまでの扱い方とは異なっています。ここで簡単に本稿の各節の内容を要約してみますと以下の通りです。　　まず第１節では、人々の予想形式方式についての経済学でこれまでよく用いられる３つの仮説を説明します。続いて、第２節では簡単な経済モデルを用いて期待の問題を扱います。続いて第３節では合理的期待仮説を含む経済モデルに特有なバブル解について説明します。第４節では期待変数を含む一般の計量経済モデルを説明して、経済学での幾つかの著名な経済モデルを例として解の構造を分析します。また第５節では実際の期待データの分析例を説明いたします。

1. ３つの期待形成仮説

この節では人々の予想形式方式についての経済学でこれまでよく用いられる３つの仮説を導入することにします。その為の記号として以下では経済主体による t 期までの情報をもとにした $t+h$ ($h \geqq 1$) 期における経済状態 y_{t+h} の予想値を ${}_t y^e_{t+h}$ と書くことにしましょう。

(i)外挿的期待形成仮説

時刻 t において予測期間 h ($h \geqq 1$) の予測を

$$(1.1)\qquad {}_t y^e_{t+h} = y_t + \lambda (y_t - y_{t-h})$$

とする予測方式のことを外挿的 (Extraporative) 期待形成仮説と呼びましょう。λ は既知の定数で $0 \leqq \lambda \leqq 1$ としておきます。ここで $y_t - y_{t-h}$ は過去 h 期間に観測された y_t の変化分ですから、現在の値をベンチ・マークとして過去の値を外挿して将来 λ パーセントだけ y_t は増加すると考えます。ここで λ は固定された定数ですのでしばしばもっともナイーブな期待形成方式と考えられています。

この仮説は(1.1)より

$$(1.2)\qquad {}_t y^e_{t+h} = (1+\lambda) y_t - \lambda y_{t-h}$$

となって、y_{t+h} の予測値は現在値 y_t と過去値 y_{t-h} の加重平均としてあらわせます。

図1.1と図1.2は仮想的な $\{y_t\}$ の実現系列に対してこの仮説の下で計算される予測値と予測誤差 $e_t = y_t - {}_{t-1} y^e_t$ の系列を示してあります。ただしここで簡単化の為に予測期間 $h = 1$ として与えてあります。

＜図1.1、図1.2がはいる＞

(ii)適合的期待形成仮説

外挿的期待形成仮説では期待形成の値は y_{t-h} と y_t の値がわかれば一定値をとります。この意味で固定的な期待形成方式と考えられます。それに対して新しい情報を得るときにそれまでの期待形成のやり方を徐々に変化させてゆく方式も考えらますが、次式で与えられる適合的 (Adaptive) 期待形成仮説がその代表でしょう。

(1.3)　　$_{t}y^{e}_{t+h}={}_{t-h}y^{e}_{t}+\lambda\,(y_{t}-{}_{t-h}y^{e}_{t})$

ここで通常は$0\leqq\lambda\leqq1$を仮定し、λは調整パラメターと呼ばれます。右辺第２項は時点t－hにおける予想に基づいた時点tにおける予測誤差を示しています。したがってこの方式では過去にどのような予測を行い、予測がどの方向で誤っていたかに応じて従来の予測を改訂することになります。この意味でこの期待形成方式は“内生的期待形成方式（Endogenous Expectation Formation）”と考えることができるでしょう。この適合的期待仮説は Cagan(1956) と Nerlove(1958)がそれぞれハイパー・インフレーションの分析と農産物市場の分析に導入して以来最近までしばしば経済分析に用いられていました。

ここで１期先予測$h=1$を考えてみましょう。(1.3)より

(1.4)　　$_{t}y^{e}_{t+1}=\lambda y_{t}+(1-\lambda)\,{}_{t-1}y^{e}_{t}$

と書けますが、右辺第２項に再び同式の代入を繰り返してゆけば

(1.5)　　$$_{t}y^{e}_{t+1}=\lambda y_{t}+\lambda(1-\lambda)y_{t-1}+\cdots+\lambda(1-\lambda)^{k}y_{t-k}+\lambda(1-\lambda)^{k+1}{}_{t-(k+1)}y^{e}_{t-k}$$

となります。ここで$0\leqq\lambda\leqq1$ですので例えば$E[{}_{t-(k+1)}y^{e}_{t-k}]^{2}$が有界であれば右辺最終項は$k\to\infty$につれて0に収束することがわかります。このときには時点tにおけるy_{t+1}の予想値は現在値ならびに過去値の加重平均となり、遠い過去の値の影響は相対的に小さくなります。

次の図1.3図1.4は仮想的な$\{y_{t}\}$の実現系列に対して適合的期待形成仮説の下で計算された予測値と１期先予測誤差の系列を示したものです。

<図1.3、図1.4が入る>

(iii)<u>合理的期待形成仮説</u>

前述の二つの期待仮説では確率過程$\{y_{t}\}$の将来の予想値は現在値及び過去値の固定的な加重和となっています。そこでこの２つの期待仮説はしばしば“後向き（Backward Looking）”な期待形成方式であると呼ばれます。

ところで、例えば来週ＯＰＥＣは会合を開き、石油価格を２倍に引き上げる決定を行うことがほぼ確実に現時点でわかっているものとしましょう。このとき人々は将来の輸入物価水準をどのように予想するでしょうか。前述の２つの期待形

成方式では予想物価水準は現在・過去の固定ウェイトの和ですので、実際に輸入物価が上昇するまで人々の物価水準についての期待は変化しません。それに対して現時点で将来の予想輸入物価水準を変化させるときその期待形成を“前向き（Forward Looking）”な期待形成方式であると呼ぶことにしましょう。合理的期待（Rational Expectation）形成仮説はこの種の期待形成方式の１つと考えることができます。

この仮説は

(1.6) $\quad {}_{t}y^{e}_{t+h}=E_{t}(y_{t+h})$

と表すことができます。ここで$E_{t}(\cdot)$はt時点までの情報が与えられたときの$t+h$時点におけるy_{t+h}の条件付期待値です。期待値を計算する際の分布は人々の主観分布を考えるわけですが、確率過程$\{y_{t}\}$の分布を用いることにすれば期待形成に際して人々の主観分布は同一であってしかもそれが客観分布に一致することを仮定することになります。一見して判るようにこの仮定はかなり強いものであり合理的期待仮説を用いた合理的期待均衡の分析上の有効性については理論的にも実証的にも経済学者の間でいまだその評価について意見が分かれています。統計学におけるベイズ的な考え方にしたがえばある極限的状況を考えていることに対応していると考えられましょう。

この合理的期待形成仮説は Muth (1961) が農産物市場の分析に導入した概念です。（第４節の例５を参照してください。）米国の有力な経済学者の Lucas や Sargent が１９７０年代にマクロ経済学に導入して以来近年ではマクロ経済学をはじめ経済学の各分野で最も一般的に用いられている期待形成仮説になってきました。

合理的期待形成仮説の下では(1.6)よりすぐにわかることですが一期先予測誤差

(1.7) $\quad e_{t}(1)=y_{t}-{}_{t-1}y^{e}_{t}$

の系列は互いに無相関なホワイト・ノイズ過程となります。この性質を経済学者は合理的期待仮説では人々は期待形成に際して”系統的な誤りはおかさない”ことを意味していると説明します。すなわち、たまには予想がはずれることがあっても、一度”狼が来る”予想がはずれると同じ状況では”全く同じ予想の過ち”を２度、３度と繰り返さないと云うわけです。

(iv)期待形成仮説間の特殊な関係

以上で期待形成に関する三つの異なる仮説を説明したわけですが、異なる２つの期待形成方式が偶然に一致することはないでしょうか。まず外挿的期待形成仮説と合理的期待形成仮説が一致することを考えましょう。２つの方式による１期先予測が一致するとすれば(1.1)と(1.6)より

(1.8) $$E_t(y_{t+1}) = (1+\lambda)\,y_t - \lambda\,y_{t-1}$$

が成立することになります。ここで｛y_t｝として

(1.9) $$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\,\varepsilon_{t-i}$$

となる線形確率過程を考えてみましょう。ここで｛c_i｝は定数の系列で$c_0=1$、｛ε_t｝はホワイト・ノイズ過程とします。(1.8)と(1.9)から未定係数法を用いれば

(1.10) $$c_1 = 1+\lambda,\quad c_i - (1+\lambda)\,c_{i-1} + \lambda\,c_{i-2} = 0 \quad (i \geqq 2)$$

となることがわかります。もし$|\lambda|<1$であるならば$c_i = (1-\lambda^{i+1})/(1-\lambda)$となりますので、$y_t$～ARIMA (1,1,0) となることがわかります。

次に適合的期待形成仮説と合理的期待形成仮説が一致することを考えましょう。２つの１期先予測が一致するとすれば(1.4)と(1.6)より

(1.11) $$E_t(y_{t+1}) = \lambda\,y_t + (1-\lambda)\,E_{t-1}(y_t)$$

が成立することになります。再び｛y_t｝の確率過程(1.9)を仮定して未定係数法を用いると

(1.12) $$c_1 = \lambda,\quad c_i = c_{i-1} \qquad (i \geqq 2)$$

となることがわかります。したがって$c_0=1$，$c_i=1$（$i \geqq 1$）よりy_t～ARIMA (0,1,1) となることがわかります。

最後に外挿的期待形成仮説と適合的期待形成仮説が一致する場合も考察することができます。この場合には本節で用いた方法によって２つの仮説を満足する線形確率過程(1.9)はトリビアルな場合を除いて存在しないことがわかります。

以上の結果について注目にあたいすると思われますのは、線形確率過程(1.9)を考える場合には相異なる二つの期待仮説が一致するのは考察している時系列が極めて特殊な時系列モデルに従っている場合に限られることでしょう。

(v)不均一期待形成仮説

これまでは本節では３つの有力な期待形成仮説について説明してきました。ところで以上で説明したある期待形成仮説をマクロ経済モデルに導入して用いる場合には、経済全体としてあたかも一つの期待仮説が支配している経済を想定することになります。しかしながら世の中にはいろいろな異なった意見を持つ人々が存在し、それぞれ異なった期待形成を行っていると考える方がより自然と考えられるかもしれません。例えば有名な Keynes (1936) が展開している期待に対する考え方はこの部類に属していると考えることができるかもしれません。企業や経済の将来について"強気の人"と"弱気の人"が共存して投資行動に影響を与えることが経済全体を不安定にする本質的な問題であるように Keynes は考えているようです。

ここで経済全体で外挿的期待形成を行っている人々のパーセントをμ_1としましょう。同様にして適合的期待形成と合理的期待形成を行っている人々のパーセントをそれぞれμ_2，μ_3としておきます。このとき経済全体の期待形成過程は

$$(1.13)\qquad {}_t y^e_{t+1} = \mu_1 \{ (1+\lambda_1) y_t - \lambda_1 y_{t-1} \} + \mu_2 \lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-\lambda_2)^i y_{t-i} + \mu_3 E_t(y_{t+1})$$

と書くことができるでしょう。ただし$\mu_1+\mu_2+\mu_3=1$，λ_1とλ_2は期待形成の調整パラメターです。このような期待形成過程の分析は大変興味があるところですが以下の分析では主として簡単化の為に (i)$\mu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=0$，(ii)$\mu_2=1$，$\mu_3=\mu_1=0$，(iii)$\mu_3=1$，$\mu_1=\mu_2=0$ の３つの極端な場合を考察対象とすることにします。しかしながら以下の分析はより一般的な期待形成(1.13)を仮定した下でも行うことができるように思われます。

ただし、以上のようなモデル分析が可能であるには、人々の入手する情報がなんらかの意味で均質であることが要請されます。人々の入手する情報が極端に異なる場合の分析は本稿のような枠組みでは困難であるように考えられます。

2.期待仮説の下でのモデル分析

本節では次の簡単な方程式を満足する１変数の確率過程 $\{y_t\}$ を考えてみましょう。

$$(2.1) \qquad y_t - \alpha_t y^e_{t+1} = \delta u_t$$

ただしαとδは定数、$\{u_t\}$ は政策変数あるいは外生変数とよばれますが、ここでこの政策変数がしたがう確率過程を政策過程と呼ぶことにして、それが線形確率過程

$$(2.2) \qquad u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

として表現されることにしましょう。また $\{\varepsilon_t\}$ はホワイト・ノイズ過程です。

本節では(2.1)でのy_{t+1}の期待形成にあたっての利用可能な情報は政策過程（あるいは外生変数）及び内生変数y_tの現在・過去のみを考えることにします。すなわち、時間的かつ空間的に全くy_tとu_tと無相関な変数（確率変数）が期待形成の情報に使われることが無いことを仮定します。このことを”太陽黒点（Sunspot）の非存在の仮定”と呼ぶことにしましょう。”太陽黒点”とは客観的に観測されていて一見すると経済の実体に無関係と思われるものの意味で、この仮定の意味を説明する為に経済学者がしばしば例にとりますが、１９世紀のイギリスにおける景気循環論で有名な Jevonsの太陽黒点説ではありません。何等かのきっかけで経済を構成する一部の人々が”太陽黒点が経済実体に影響する”と予想しはじめますと、その予想（あるいは期待）に釣られて総ての人々がその様に予想しはじめます。すると、結果として”太陽黒点”が経済の実体に影響するわけです。上の仮定はその様な状況にはないことを仮定しているわけですが、例えば以下で説明する例２．２の株式市場などの資産価格の理論の場合にはかなり厳しい仮定と考えられるでしょう。この問題については合理的期待の下でのバブル解との関連で第３節で触れることに致します。

ところで、(2.1)で表現される確率モデルを仮定するのは理論的分析の為の簡単化ですが、実際にデータにモデルをフィットするときにはいろいろな理由から右辺に確率的な攪乱項を加えるのがより一般的定式化です。以下の第２節ー４節の分析では統計モデルの推定の問題は考えませんので攪乱項を無視しています。あるいは別の解釈としては、u_tのなかにあらかじめ方程式誤差や観測誤差を含んで

いると考えれば(2.1)の分析はこれらの誤差も考慮していると考えることができるでしょう。

さて、(2.1)式であらわされる簡単な経済モデルが実際考えられているでしょうか。以下で二つの著名な経済モデルの例を挙げます。云うまでも無いことですが、本稿で挙げる例は説明の為のものであってそれで現実の経済の分析をするには他の多くの要因を捨象しているので問題があることに注意して下さい。

例２．１：時刻ｔにおける貨幣残高の対数と物価水準の対数をそれぞれm_t，p_t とします。Cagan (1956) によって定式化された貨幣需要関数では実質貨幣需要は物価上昇率の減少関数

$$(2.3)\qquad m_t^d - p_t = -\beta\ ({}_t p^e_{t+1} - p_t)$$

として表現されます。ただしここで$\beta > 0$と考えます。貨幣供給関数を$m_t^s = u_t$として、均衡状態$m_t^d = m_t^s = m_t$を考えましょう。（ここでu_tは金融政策を表現する確率過程です。）このモデルは状態変数$y_t = p_t$、政策変数$u_t = m_t$、母数（パラメター）$\alpha = \beta / (1+\beta)$、$\delta = 1 / (1+\beta)$とすれば(2.1)の特殊な場合となります。

例２．２：時刻ｔにおける株価水準と配当水準をそれぞれp_t，X_tとします。このとき株式を１期間保有するときに発生する１期間当りの収益率R_{t+1}は

$$(2.4)\qquad R_{t+1} = \frac{(p_{t+1} - p_t) + X_t}{p_t}$$

によって与えられます。ここで右辺の第１項は株式の保有にともない株価の上昇によって生じるキャピタル・ゲイン項です。ここで株式保有に関して裁定が存在しない状態を考えるならば株式の期待収益率R_tは市場利子率r_tに一致すると考えられます。ここでさらに市場利子率$r_t = r$が一定であって，人々が収益率について期待を形成して行動していると仮定すれば裁定が存在しない状況では

$${}_t R^e_{t+1} = r$$

が成立すると考えられましょう。この経済モデルを書き直せば

$$p_t = \left(\frac{1}{1+r}\right) {}_t p^e_{t+1} + \left(\frac{1}{1+r}\right) X_t$$

となります。この方程式は状態方程式(2.1)において$y_t = p_t$，$u_t = X_t$，$\alpha = \delta = (1+r)^{-1}$とした場合に対応しています。この経済モデルは土地の価格の分析に使われることもあります。その場合にはp_tとX_tはそれぞれ土地の価格と土地所有により発生する将来収益と考えることになります。

本節では様々な政策効果を考えることにします。すなわち政策変数（あるいは外生変数）u_tの確率過程が与えられた時に、人々の期待の変化を通じて経済の内生変数（あるいは状態変数）y_tにいかなる変化が生じるかを考えます。その為にまず政策変数の動き（経済システムの“政策ショック”と呼びます）を次のように分類しておくことが便利となります。説明の上では例２．１と例２．２を用いるのが便利です。例２．１では金融当局が新たに貨幣を増発する場合が考えられるでしょうし、例２．２では新たに株式配当に対する課税政策、あるいは土地保有に対する固定資産税の引き上げを考えればよいでしょう。

一時的政策ショックと恒久的政策ショック

(2.2)において$\theta_0=0$、$\theta_i = 1$（$i \geqq 1$）のとき政策過程$\{u_t\}$は“純粋に一時的政策ショック”であると云います。これは政策ショック$u_t = \varepsilon_t$が発生すると合理的期待仮説の下ではその後すぐに政策は消滅すると予測されるからです。すなわち条件付期待値を用いれば$E_t(u_{t+i})=0$（$i>0$）となります。

(2.2)において$\theta_i = 1$（$i>0$）のとき$\{u_t\}$は“恒久的政策ショック”と呼びましょう。ある時刻ｔに政策ショックが発生すると人々は将来永続的に続くものと予想する状況を考えています。すなわち、この場合には$E_t(u_{t+i}) = u_t$となります。この恒久的政策ショックをモデルとして表現すればランダム・ウォーク過程$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$となります。

次に(2.2)において$\theta_i = \rho^i$とすれば前述の二つの場合は$\rho=0$及び$\rho=1$の場合として両方含んだ政策ショックを表現することができます。ここで$0<\rho<1$であれば政策ショックu_tは将来幾何級数的に減衰してゆくと合理的期待の下では人々は予想することになります。すなわち$E_t(u_{t+i}) = \rho^i u_t$となります。この政策過程は１次自己回帰モデル$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$と表現されますが、$\rho=0$ならば一時的政策ショックに対応し$\rho=1$ならば恒久的政策ショックに対応することに

なります。

<u>予期された政策ショックと予期せざる政策ショック</u>

経済政策の効果を分析する際には“予期された”政策ショックと“予期せざる”政策ショックを区別することが重要となります。そこで以下では政策ショックの発生時刻と人々が期待形成の際に用いる情報として利用可能となる時刻との差を$\theta_i=0$とすることによって表現してみましょう。例えば一時点先の政策ショックが人々によって予想される場合$\theta_0=0$、$\theta_1=1$、$\theta_i=0$（$i\geqq 2$）とおいて$u_t=\varepsilon_{t-1}$と表現します。このとき合理的期待の下では時刻$t+1$に発生するであろう政策ショック$u_{t+1}=\varepsilon_t$は時刻tにおいて既知であり、$E_t(u_{t+1})=u_{t+1}$となって合理的期待形成の人々は完全に将来の政策ショックを予見することができます。同様にしてk期先（$k\geqq 1$）に発生する純粋に一時的政策ショックが完全予見される状況は$u_t=\varepsilon_{t-k}$と表現されることになります。さらに一般的な場合を考えればk期先の将来に政策ショックが発生し、その後徐々に減衰してゆく政策過程を考えましょう。これまでの議論から$\theta_i=0$（$i=1,\cdots,k-1$）、$\theta_i=\rho^{i-k}$（$i\geqq k$）とすればこの過程は表現されることがわかります。すなわち、条件付期待値を用いれば$E_t(u_{t+i})=u_t$（$i=1,\cdots,k-1$），$E_t(u_{t+i})=\rho^{i-k}u_t$（$i\geqq k$）となりますが、これは時間の遅れを持つ1次自己回帰モデル$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$から導くことができます。ここで$\rho=0$とすれば合理的期待の下で予期された一時的政策ショック、$\rho=1$とすれば予期された恒久的政策ショックに対応しています。

以上に述べた政策ショックは次の4つのタイプに分類することができます。

(a) $u_t=\varepsilon_t$,

(b) $u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$, $|\rho|\leqq 1$, $\rho\neq 0$,

(c) $u_t=\varepsilon_{t-k}$,

(d) $u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$, $|\rho|\leqq 1$, $\rho\neq 0$。

以下ではこれらの異なる政策ショックが発生する時、経済の状態変数y_tがどの様に影響されるかを分析することにします。分析の上からは政策過程を$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$（$|\rho|\leqq 1$, $k\geqq 0$）とおいて(a)～(d)をその特殊な場合として扱う方法が便利です。例

解の形式

経済の状態方程式(2.1)と政策過程の方程式(2.2)に加えて前節において導入した期待形成仮説を用いることによって経済の状態変数 $\{y_t\}$ についての解を求めてみましょう。本節では解は $\{c_i\}$ を適当な定数系列として線形確率過程

$$(2.5) \qquad y_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}$$

にしたがうものとして分析します。すなわち、現在の内生変数の値は現在及び過去の政策ショックの線形結合となることを仮定することにします。この解の形では時刻tに発生する1単位の政策ショック ε_t は時刻 $t+s$ $(s \geqq 0)$ における内生変数への影響は簡単に計算することができ、いわゆる"衝撃乗数"は

$$\frac{d y_{t+s}}{d \varepsilon_t} = c_s$$

で与えられます。また、経済状態変数 y_t の1期先予測誤差を

$e_t(1) = y_t - {}_{t-1}y^e_t$ によって定義することにしましょう。

ところで解(2.5)は十分一般的と云えるでしょうか。例えば y_t、u_t をそれぞれ今期のGNPと貨幣残高として今期の貨幣残高が一期前のGNPとなるような政策を行っている状況は例えば $y_{t-1} = \varepsilon_t$、$u_t = \varepsilon_t$ と表せるでしょう。ここで明らかなようにこの経済モデルは(2.1)と(2.5)で表現することは出来ません。このことを言い替えますと、もし(2.2)において $\{u_t\}$ が反転可能なら Simsの定理を用いると(2.5)は内生変数 $\{y_t\}$ から政策変数 $\{u_t\}$ にグレンジャーの意味で因果関係が無いことを意味しています。したがって、このモデルでは確率的な意味で外生的に与えられた政策の分析を行っていることになります。

次に、(2.1)と(2.2)の定式化では線形な確率モデルを想定しています。期待仮説の中でも外挿的期待形成仮説と適合的期待形成仮説の場合には期待形成方式は線形ですので解(2.5)も比較的自然であると考えられます。しながら合理的期待仮説の場合には2つの問題があることに注目して下さい。第一にはたとえ線形確率過程の解(2.5)を仮定しても解が一意になる保証はないと云う"解の非一意性"の問題です。特にこの問題は(2.1)式において $|\alpha| > 1$ の場合に深刻な問題となり、一般に(2.1)を満足する線形確率過程は無限に存在することになります。そこで解

の選択基準をもうけることが様々に考えられていまがいまだ経済学者を満足させるような解決をみていないようです。$|\alpha|>1$となる経済モデルは例えばTaylor（1977）の提案するケインズ的マクロ経済モデル（第4節の例4．4）やAzariadis（1981）の多世代経済モデル（第3節の例3．1）で実際にも登場しますので重要な問題でしょう。この問題については本節の最後にモデル(2.1)を使って再び説明することにします。さて、第二には合理的期待の下では線形確率過程(2.5)の他に非常に多くの解が存在し得ることが知られています。その中でも特に最近注目されている一つの特殊解（バブル解）については第3節で説明します。

(i)外挿的期待

外挿的期待形成仮説(1.2)を用いると(2.1)と(2.2)より解は

(2.6) $\quad (1-a_1L)\,y_t=b_1u_t$

と書けます。ここで$a_1=-\alpha\lambda/[1-\alpha(1+\lambda)]$，$b_1=\delta/[1-\alpha(1+\lambda)]$であって$1-\alpha(1+\lambda)\neq 0$を仮定しておきます。Lは階差作用素であって$L(y_t)=y_{t-1}$と用います。係数について$|a_1|<1$が成り立つことが解の安定条件です。解が線形確率過程(2.5)で書けるとすれば係数は

(2.7) $\quad c_i=b_1\sum_{j=0}^{\infty}a_1^{\,i-j}\theta_j$

となります。

さて時刻$t-1$における予測値が${}_{t-1}y^e_t=(1+\lambda)y_{t-1}-\lambda y_{t-2}$となることに注意すると1期先予測誤差$e_t(1)$は

(2.8) $\quad e_t(1)=(1-L)(1-\lambda L)\,y_t$

と書けます。したがって(2.6)を用いれば

(2.9) $\quad (1-a_1L)\,e_t(1)=b_1(1-L)(1-\lambda L)\,u_t$

です。ここで特に政策過程$\{u_t\}$について遅れを持つ一次自己回帰過程$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$を仮定すれば、(2.6)の左から$(1-\rho L)$を乗じて

(2.10) $\quad (1-a_1L)(1-\rho L)y_t = b_1\varepsilon_{t-k}$

となります。したがってy_t～ARMA（2,k）となります。またこの場合(2.8)から1期先予測誤差の確率過程は$e_t(1)$～ARMA(2,k+2)にしたがうことがわかります。

政策効果

政策(a)の場合には$c_i = b_1 a_1{}^i$となります。したがって衝撃乗数は$a_1<0$ならば図2.1，$a_1>0$ならば図2.2のようになります。

政策(b)の場合には

$$(2.11) \qquad c_i = b_1 \sum_{j=0}^{i} \rho^j a_1{}^{i-j}$$

となります。したがって$|a_1|<1$，$|\rho / a_1|<1$，$a_1 \neq 0$ であってρとa_1が同符号であれば衝撃乗数は図2.1に類似し、ρとa_1が異符号であれば図2.2に類似していると考えられるでます。次に政策(c)と政策(d)を考えてみましょう。$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_{t-k}$とおいて衝撃乗数を求めてみると、

$$(2.12) \qquad c_i = \begin{cases} 0 & i<k \\ b_1 \sum_{j=k}^{i} \rho^{j-k} a_1{}^{i-j} & i \geqq k \end{cases}$$

となることがわかります。ここで政策(c)は$\rho=0$とおけば求まります。したがって、遅れを持つ将来の純粋に一時的政策ショックは$a_1=0$ならば図2.3、$a_1<0$ならば図2.4のような影響を与えることがわかります。図2.3と図2.4からわかるように、この場合には政策ショックは実際に発生するまで経済の実体には何の影響も及ぼさず、k期後の政策ショックの発生時刻にもっとも大きなインパクトを与え、その後徐々に影響が弱まるパターンを描いています。

＜図2.1～図2.4が入る＞

(ii)適合的期待

適合的期待形成仮説(1.3)を用いると(2.1)と(2.2)より解は

$$(2.13) \qquad y_t = \alpha\lambda \left[1-(1-\lambda)L \right]^{-1} y_t + \delta u_t$$

となります。$|\lambda|<1$を仮定してこの式を変形して

$$(2.14) \qquad (1-a_2 L) y_t = b_2 \left[1-(1-\lambda)L \right] u_t$$

と書きます。ここで定数は$|\alpha\lambda| \neq 1$を仮定して$a_2 = (1-\lambda)/(1-\alpha\lambda)$、$b_2 = \delta/(1-\alpha\lambda)$と与えています。したがって係数について$|a_1|<1$

が成り立つことが解の安定条件です。さて、解が線形確率過程(2.5)として書けるとしますと係数は

$$(2.15)\qquad c_i=\begin{cases} b_2\theta_0 & i=0 \\ b_2\theta_k+b_2 d\sum_{j=0}^{i-1} a_2^{\,i-1-j}\theta_j & i\geqq 0 \end{cases}$$

となることがわかります。ただし定数$d=\alpha\lambda(1-\lambda)/(1-\alpha\lambda)$です。

次に1期先予測誤差$e_t(1)$の性質を調べますと、(1.5)を用いれば、

$$(2.16)\qquad [1-(1-\lambda)L]\,e_t(1)=(1-L)\,y_t$$

と表現できることに注意しましょう。ここで特に政策過程$\{u_t\}$に対して$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$とすれば(2.14)の左から$(1-\rho L)$を乗じて

$$(2.17)\qquad (1-a_2L)(1-\rho L)y_t = b_2[1-(1-\lambda)L]\,\varepsilon_{t-k}$$

となります。したがって$y_t\sim$ARMA (2,k+1) となります。またこの場合(2.16)から1期先予測誤差の確率過程は$e_t(1)\sim$ARMA(2,k+1)にしたがうことがわかります。

政策効果

政策(a)の場合には$c_0=b_2$, $c_i=b_2 d a_2^k$ $(i\geqq 1)$となります。したがって, $d>0$, $b_2>0$とすれば衝撃乗数は$a_2>0$ならば図2.5, $a_2<0$ならば図2.6のようになります。ここで図2.5と図2.6は絶対値の違いを別にすればそれぞれ図2.1と図2.2に類似したパターンとなることにお気づきでしょう。

同様にして政策(b)を考えると、

$$(2.18)\qquad c_0=b_2,\quad c_i=b_2\rho^2+b_2 d\sum_{j=0}^{i-1}\rho^j a_2^{\,i-1-j}\qquad (i\geqq 1)$$

となることがわかります。したがって$|a_2|<1$, $|\rho/a_2|<1$となってa_2とρが同符号の場合には図2.5, a_2とρが異符号の場合には図2.6と類似した動学的特性を示すことになります。

次に政策(c)と政策(d)の影響を考えてみましょう。政策過程$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$とおいて(2.15)を計算すれば

$$
(2.19) \qquad c_i = \begin{cases} 0 & i \leq k \\ b_2 & i = k \\ b_2 \rho^{i-k} + b_2 d \sum_{j=k}^{i-1} \rho^{j-i} a_2^{i-1-j} & i \geqq k+1 \end{cases}
$$

となることがわかります。ここで特に$\rho=0$として政策(c)を考えれば$c_i=0$（$i<k$），$c_i=b_2$（$i=k$），$c_i=b_2 d a_2^{i-1-k}$（$i \geqq k+1$）となることがわかります。したがって、$b_2>0$，$d>0$を仮定すれば政策(c)と政策(d)の衝撃乗数はともに $0<\rho<1$，$0<a_2<1$のとき図2.7のようになると考えられるでしょう。

＜図2.5～図2.7が入る＞

以上で伝統的に使われていた二つの期待仮説について説明したわけですが、合理的期待の下での解についての議論と比較するために解の安定性についてまとめて見ましょう。証明は簡単ですので省略します。

<u>命題２．１</u>：方程式(2.1)に対する線形解(2.5)の安定性の十分条件は以下の通りです。(i)外挿的期待仮説の下では$\alpha>1$または$\alpha<1/(1+2\lambda)$。(ii)適合的期待仮説の下では$\alpha<1$又は$\alpha>2/\lambda-1$（但し$0 \leqq \lambda \leqq 1$）。

(iii)合理的期待

合理的期待形成仮説を仮定すると(2.5)より

$$(2.20)\qquad E_t(y_{t+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_{t+1-i}$$

となることに注目しましょう。この式を(2.1)と(2.2)に代入すれば

$$(2.21)\qquad \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i} = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_{t+1-i} + \delta \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

となりますので、未定係数法より係数 $\{c_i\}$ についての1次の定差方程式

$$(2.22)\qquad c_i = \alpha c_{i+1} + \delta \theta_i \qquad (i = 0, 1, \cdots)$$

が得られます。合理的期待形成仮説の下では1期先予測誤差 $e_t(1)$ は(1.7)より $e_t(1) = c_0 \varepsilon_t$ となって系列相関のないホワイト・ノイズ過程であることが容易に確認されます。この結果は合理的期待仮説下のモデルでは一般に成立するので他の２つの期待仮説（外挿的期待形成仮説と適合的期待形成仮説）から合理的期待仮説を区別する著しい特徴と言えるでしょう。さらに、より一般的にh期先予測に対する予測誤差を $e_t(h)$ とすれば、(2.5)から

$$(2.23)\qquad e_t(h) = \sum_{i=0}^{h-1} c_i \varepsilon_{t-i}$$

となり $e_t(h)$～MA（h－1）であることがわかります。本節の(i)と(ii)で導出した他の２つの期待仮説の下では予測誤差はいずれもＡＲＭＡ型の確率過程でした。したがって予測誤差の確率過程に関して合理的期待仮説の下での計量モデルはMA型という大きな特徴があることがわかりました。

政策効果

政策効果においても合理的期待下の分析は他の２つの期待仮説の下での分析から異なった様相を呈することになります。前と同様に４つの場合について考えてみましょう。

政策(a)の場合には(2.22)より $c_0 = \alpha c_1 + \delta$, $c_i = \alpha c_{i+1}$（$i \geqq 1$）となります。この差分方程式は未知数の方が多く、このままでは解の不決定問題が生じてしまいます。そこで $|\alpha| < 1$ の場合をとりあげて $\{y_t\}$ の定常性を仮定して

みましょう。このときには解は次の理由から一意に決まることがわかります。つまり定常性の条件を用いれば$c_{i+1}=(1/\alpha)\ c_i\ (i \geqq 1)$から$c_i=0$ $(i \geqq 1)$でなければならなくなり、さらに$c_0=\alpha c_1+\delta$より$c_0=\delta$となります。したがって衝撃乗数は図2.8のようになります。この図は他の期待仮説の下での政策効果とはきわだって異なっていることに注意して下さい。合理的期待の下では一時的政策ショックはショックの発生時点では経済変動をもたらしますが、そのショックを情報としており込んで期待形成を行う結果、次期以降には何の影響もなくなることを意味しています。

次により一般的に政策過程が遅れを持った1次自己回帰過程$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$にしたがう状況を想定してみましょう。このときには(2.2)より

$$(2.24)\qquad \theta_i=\begin{cases}0 & (0 \leqq i \leqq k)\\ \rho^{i-k} & (i \geqq k+1)\end{cases}$$

となります。そこで(2.22)より係数系列$\{c_i\}$は $\alpha \neq 0$ のとき

$$(2.25)\qquad c_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}c_i & (i=0,\cdots,k-1)\\ \dfrac{1}{\alpha}c_i-\dfrac{\delta}{\alpha}\rho^{i-k} & (i \geqq k)\end{cases}$$

を満足させねばならないくなります。さて系列$\{c_i\}$に関する定差方程式の斉次解と特殊解をそれぞれ$c_i(H)$, $c_i(P)$としましょう。すると(2.25)より$i \geqq k$のとき

$$(2.26)\qquad c_{i+1}(H)=\frac{1}{\alpha}c_i(H)$$

となりますが、仮定$|\alpha|<1$の下ではこの解が発散しない為に$c_i(H)=0$ $(i \geqq k)$が必要になります。次に特殊解を$c_i(P)=f g^{i-k}\ (i \geqq k)$とおき、(2.25)の第2項に代入して$f$と$g$について解きますと、$g=\rho$, $f=\delta(1-\alpha\rho)^{-1}$を得ることになります。結局、係数$\{c_i\}$の解は

$$(2.27)\qquad c_i=\begin{cases}\dfrac{\delta}{1-\alpha\rho}\alpha^{k-i} & (i<k)\\ \dfrac{\delta}{1-\alpha\rho}\rho^{i-k} & (i \geqq k)\end{cases}$$

であることがわかりました。この(2.27)式をもとにして計算された政策(b),(c),(d)における衝撃乗数の動きをそれぞれ図2.9，図2.10，図2.11に示しておきました。

ここで図2.9～図2.11にもとづいて政策(a)～(d)の内生変数への影響について若干のコメントを加えておきましょう。政策(b)において説明の為にパラメターの値を$\delta>1$，$0<\alpha<1$，$0<\rho<1$としておきます。このとき政策(a)に比較すると政策ショック発生時刻における最初のインパクト$c_0=\delta(1-\alpha\rho)^{-1}$はより大きくなります。政策ショック$u_t$が発生すると$u_t$は将来の政策ショック$u_{t+i}$（$i\geqq1$）と正の相関があると予想して行動するからです。しかし将来の政策ショックはε_{t+i}（$i\geqq1$）の為に完全に計算することはできませんから人々は徐々に調整せざるを得ないことになります。したがって、$|\rho|<1$であるかぎりこの過程を通じて動学乗数は減衰して0に収束することになります。ここで$\rho=1$であれば人々は政策ショックは恒久的変化であると認識し、衝撃乗数は一定値$c_0=\delta(1-\alpha)^{-1}$となります。

次に政策(c)の状況を考えましょう。現時点からk期後に政策ショックが発生すると云うニュースが人々に伝わる状態を想定すればよいでしょう。このニュースが人々に伝わった時点から人々は期待にもとづいて行動を変化させると考えられます。その影響は将来の政策ショックが発生する時刻に近づけば近づく程大きくなります。しかし、実際に政策ショックが実現しますと、それ以降は影響は全く消滅するでしょう。と云うのは、その時刻までに将来のすべての政策ショックは人々の情報の中に取り込まれてしまい、その予想の下で人々は行動しているからです。

政策(d)は前述の政策(b)と政策(c)の混合と考えることができます。現在時点においてk期後の将来から系列相関を持つ政策ショックが発生すると云うニュースが人々に伝わったとしましょう。例えば例２．２において政府が２年後から株式配当に対する課税や土地に対する固定資産税を１００パーセント引き上げることを今発表した状況を考えてみましょう。ここで配当や土地保有による将来の期待収益に変化が無いとすれば税率変化分だけ収益率が低下すると人々は予想してただちに行動を起こしはじめるでしょう。その結果、土地の価格がこのニュースの発表とともに変化しはじめます。そして実際に２年後に政策が実行される時まで

に総ての株価や土地の価格調整は終わることになります。又本節で説明した例２．１の Cagan (1956) によるマネタリスト経済モデルにおける貨幣需要の例を用いて説明しますと、中央銀行が今から３ヶ月後より貨幣数量（m_t）を５パーセント増加するとのニュースが伝えられた状況を考えればよいでしょう。この場合、恒久的政策の変更を考えることにすれば$\rho=1$となるので衝撃乗数は図2.12となると考えられます。つまり、このニュースが人々に伝えられた時点から、人々は将来の予想にもとずき貨幣需要を変化させます。そこで実際に政策が実行される時刻までに人々は調整を行い、物価が少しづつ上昇します。そして実際に政策が実行された時点から物価水準は恒久的に５パーセント上昇することになります。

＜図2.8～図2.12が入る＞

解の非一意性

ここで合理的期待仮説の下での線形過程解の非一意性について経済モデル(2.1)を用いて再び考えてみましょう。(2.20)を(2.1)に代入して整理すれば

$$(2.28)\quad \left(1-\frac{1}{\alpha}L\right)y_{t+1}=\left(c_0-\frac{\delta}{\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{i-1}L^i\right)\varepsilon_{t+1}$$

と書くことができます。ここで解$\{y_t\}$として定常過程に限定するこにしましょう。

(a)$|\alpha|<1$の場合：この時(2.28)のＡＲ項は発散的（"explosive"）です。したがって、右辺のＭＡ項の多項式を

$$(2.29)\quad f(L)=c_0\left(1-\frac{\delta}{\alpha c_0}\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{i-1}L^i\right)$$

とおけば、解$\{y_t\}$が定常過程となるためには$f(\alpha)=0$となる必要があります。この条件を解けば、

$$(2.30)\quad c_0=\frac{\delta}{\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{i-1}\alpha^i$$

となります。さらに(2.4)、及び(2.29)－(2.30)を用いれば$j\geqq 1$について

$$(2.31)\qquad c_j = c_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j - \frac{\delta}{\alpha}\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j-k}\theta_{k-1}$$

となります。したがって、一つの政策過程$\{u_t\}$にたいし解$\{y_t\}$は一意になります。実はこの解の性質をこれまで(iii)で分析していたのです。とくに政策過程について$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$とおけば

$$(2.32)\qquad c_0 = \frac{\delta}{1-\alpha\rho}\alpha^k$$

となるので(2.31)から簡単な計算によって(2.27)を導くことができます。また(2.27)から$y_{t+1}-\rho y_t$を計算すれば

$$(2.33)\qquad (1-\rho L)\, y_{t+1} = \frac{\delta}{1-\alpha\rho}\varepsilon_{t+1} + \delta\sum_{j=1}^{k}\alpha^{k-j}\varepsilon_{t+1-j}$$

となるのでこの場合、y_t～ARMA (1,k) となることがわかります。以上のように解を求める方法は前に(2.27)を求めた方法よりも簡単でかつ直接的な方法と思われます。

(b) $|\alpha|>1$の場合：この時(2.28)のＡＲ項は定常的です。したがって、任意の$\{u_t\}$にたいして実数c_0をパラメターとして定常過程解は無数に存在することになります。そこである$\{u_t\}$に対して一つの定常解を決めるためには何等かの基準が必要となります。例えばここで Taylor(1977) の提案している分散最小化基準で解を選んでみましょう。

(2.28)を書き直して

$$(2.34)\qquad y_{t+1} = \left\{c_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(c_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^i - \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1}\theta_k\right)L^i\right\}\varepsilon_{t+1}$$

としておきます。右辺の各項は互いに無相関ですから$\{y_t\}$分散を計算すれば$\{\varepsilon_t\}$の分散に

$$(2.35)\qquad c_0^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2i}\right) - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)c_0\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1}\theta_k\right)$$
$$+\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1}\theta_k\right)^2$$

を乗ずるものになります。これをc_0について最小化すると

$$(2.36)\qquad c_0^* = \frac{\delta}{\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}\theta_{i-1}\alpha^i$$

となります。ここでとくに政策過程について$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_{t-k}$とおいて(2.36)を計算すれば$\alpha \neq \rho$のとき

$$(2.37)\qquad c_0^* = \frac{\delta}{\alpha-\rho}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k+1}$$

となることがわかります。これを Taylor解と呼ぶことにしましょう。この解は(2.24)と(2.37)より

$$(2.38)\qquad (1-\rho L)(1-\frac{1}{\alpha}L)y_t = \left(c_0^* - \rho c_0^* L \frac{\cdot}{\alpha} - L^{k+1}\right)\varepsilon_t$$

と表現できるので$y_t \sim$ARMA (2,k+1) となることがわかります。

次に McCallum (1983) の提案している最小状態変数 (Minimum State Variables) 法を政策過程$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_{t-k}$を用いて説明しましょう。まず一般に係数 ($j \geqq 1$) はc_0を所与として(2.31)を計算すれば

$$(2.39)\qquad c_j = \begin{cases} c_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j & (j<k+1) \\ c_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j - \frac{\delta}{1-\alpha\rho}\left(\rho^{j-k} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j-k}\right) & (j \geqq k+1) \end{cases}$$

と書けることに注意しましょう。そこで$y_{t+1} - \rho y_t$を計算すれば確率過程は

$$(2.40)\ (1-\rho L)y_{t+1} = c_0\varepsilon_{t+1} + c_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha\rho)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{j-1}\varepsilon_{t+1-j}$$
$$+\left(c_0 - \frac{\delta\alpha^k}{1-\alpha\rho}\right)\left(\frac{1-\alpha\rho}{\alpha}\right)\sum_{j=k}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j\varepsilon_{t-j}$$

と表現できます。ここで右辺に現れる$\{\varepsilon_t\}$の項の数を最小化すれば

$$(2.41)\qquad c_0^{**} = \frac{\delta}{1-\alpha\rho}\alpha^k$$

となることがわかります。この解のことを MaCullum解と呼ぶことにしましょう。すぐにわかるように(2.40)は(2.32)と全く同一となりこの解は$\alpha < 1$の場合の定常解に一致することがわかります。つまり$y_t \sim$ARMA (1,k) となります。

さて$\alpha > 1$の場合には Chow (1983) はデータから解を選ぶべきことを提案して

います。この方法を政策過程$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$を用いて簡単に説明しましょう。確率過程(2.40)において両辺に（1-(1/α)L）を乗じれば

$$(2.42)\qquad (1-\rho L)(1-\frac{1}{\alpha}L)y_t = c_0(1-\rho L - \frac{\delta}{\alpha c_0}L^{k+1})\varepsilon_t$$

と整理できます。これはARMA（2,k+1）モデルですのでこの時系列モデルをデータにフィットして初期値c_0を決めるのが Chowの提案する方法です。(2.38)と(2.40)から容易にわかるように Taylor解や MaCullum解は(2.40)において特定のc_0に対応した特殊な場合と見なすことができます。

3.合理的期待の下でのバブル解

前節では特に経済の状態方程式の解が線形確率過程(2.5)となることを前提に政策ショックの影響を考えてみたわけです。３つの期待仮説の中で合理的期待形成仮説の下では線形解の非一意性の問題が生じることに言及しました。本節では解の非一意性の問題をもうすこし一般的に考えて非線形解との関わりで検討してみましょう。

(i)太陽黒点と自己達成的予想

経済を構成する人々の選好や生産可能性などの技術的関係は経済の基礎的条件（Fundamentals）と呼ばれています。これに対してそうした経済実体に根ざさない変数のことを外部的（"Extrinsic"）変数と呼ぶことにしましょう。更に、太陽黒点（"Sunspots"）とはそうした外部的変数であって確率的に変動する変数を意味するものとしましょう。最近になって人々の形成する期待との関係で外部的変数に注目されているようですが、そのきっかけとなったのが Azariadis（1981)や Cass=Shell（1983）などの論文のようです。例えば Azariadis（1981)は世代重複（Overlapping Generation）経済モデルを用いて自己達成的期待（Self-Fulfilling Expectation）の問題を考えています。ここでは説明の為にその主張を極めて単純化して説明します。

例３．１：y_tとc_tをそれぞれ t 時刻における生産物と消費として、人々の財に対する効用関数と財の生産関係をあらわす生産関数をそれぞれ

$$(3.1)\qquad v(c_t) = \alpha c_t - \frac{\delta u_{t-1}}{2} c_t^{-2} \quad , \; g(y_t) = y_t$$

と特定化しておきます。この世代重複経済モデルでは人々は予算制約 $c_{t+1} p_{t+1} = p_t y_t$ の下で将来の予想消費から現在の労働を引いた関数

$E_t\{(u(c_{t+1}) - g(y_t)\}$ を最大化すると考えます。（ここで生産は収穫一定を仮定しています。）解が内点にあると仮定すれば簡単な計算からその最大化条件は

$$(3.2)\qquad E_t\{V(y_{t+1})\} = G(y_t)$$

と書けることがわかります。但し$G(y_t) = y_t g'(y_t)$, $V(y_t) = y_t v'(y_t)$としました。(3.1)を用いて(3.2)を解きますと条件(3.2)は第２節で分析しました１変

数の状態方程式(2.1)となることがわかります。

さて、ここで簡単化の為に経済の状態方程式(2.1)において政策変数 $\{u_t\}$ を定数(=1)、$\{y_t\}$ が二つの値 y_1(例えば"好況")とy_2(例えば"不況")をとる特殊な場合を考えましょう。さらに外部的確率変数("太陽黒点")$\{S_{t+1}\}$を$\{y_t, y_{t+1}\}$ の推移確率 $S = (q_{ij})$とともに以下で定義しましょう。ここで $i,j = 1,2$ に対して $q_{ij} = P\{y_{t+1} = y_j \mid y_t = y_i\}$ としておきます。(2.1)が成立するには $q_{ij} = 1 - q_{ii}$ ($i \neq j$) ですから

$$y_i = \alpha \{q_{ii} y_i + (1 - q_{ii}) y_j\} + \delta$$

を満足する必要があります。この方程式を解けば

$$(3.3) \qquad q_{ii} = \frac{y_i - \alpha y_j - \delta}{\alpha (y_i - y_j)} \qquad (i \neq j)$$

となりますのでy_1とy_2が異なれば(2.1)を満足する推移確率q_{ij}が定まります。この場合 $\{y_t\}$ は二つの値をジャンプしますので第2節のように $\{y_t\}$ を過去のイノベーションで表現することが出来ません。

以上の分析で $\{y_t\}$ が二つの値をとることは本質的な問題ではありません。ここでわかることは、この経済モデルにおいては合理的期待仮説の下で"太陽黒点の活動"を観察する人々の期待を通じて経済状態が変動する非線形解(経済)が存立しうることです。(2.1)において期待変数が確率1で正しい値をとる時に、この経済モデルは完全予見の場合と呼ばれますが、その場合にはも$\alpha \neq 1$ならば$y_t - \alpha y_{t+1} = \delta$, $y_t = y^*$をとけば定常解は$y^* = \delta/(1-\alpha)$となって一意的に定まることに注意して下さい。すなわち、例3.1の世代重複モデルにおける完全予見の定常解は一意的に定まっているわけです。

(ii)合理的泡(バブル)解

ここで一般に、任意の離散マルチンゲール過程を $\{Z_t\}$ としましょう。離散マルチンゲールとは$E_t(Z_{t+1}) = Z_t$を満足する確率過程のことですが例を挙げましょう。

例3.2:$\{\varepsilon_t\}$を平均0、分散σ^2の互いに無相関な確率変数列とします。この

確率変数列から作られる

(3.4) $$Z_{1t} = \sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s ,$$

(3.5) $$Z_{2t} = \prod_{s=1}^{t} (\varepsilon_s^2/\sigma^2)$$

などはいずれもマルチンゲール過程です。但し、(3.4)は線形過程、(3.5)は非線形過程であることに注意してください。

さて、任意の離散マルチンゲール過程$\{Z_t\}$に対して$y_t = \alpha^{-(t+1)} Z_t$とおけばこの確率過程は第２節の(2.1)の斉次解

(3.6) $$y_t = \alpha E_t(y_{t+1})$$

を満足します。したがって、任意のマルチンゲール過程から方程式(2.1)を満足する解の確率過程を作ることができ、線形確率過程(2.5)の他にも沢山の解が存在することがわかります。その解の中でも最近特に実際の経済分析において注目されているものが合理的確率バブル（"合理的泡"またはBubbles）と呼ばれている斉次解です。

まず経済の状態方程式(2.1)に再度注目してみましょう。合理的期待の下では

(3.7) $$y_t = \alpha E_t(y_{t+1}) + \delta u_t$$

となりますが、右辺第１項のy_{t+1}に再び同様の式を代入します。これをk回繰り返せば

(3.8) $$y_t = \delta \sum_{i=0}^{k} \alpha^i E_t(u_{t+1}) + \alpha^{k+1} E_t(y_{t+k+1})$$

と書くことができます。右辺第２項 について$\lim_{t\to\infty} |\alpha|^{2t} E(y_t^2) = 0$となることを仮定すれば、$y_t$の基本解は

(3.9) $$y_t^{(1)} = \delta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i E_t(u_{t+i})$$

で与えられます。この解を将来解（Forward Solution）と呼ぶことにしましょう。さらにここで、非線形確率過程

(3.10) $\begin{cases} y_t^{(2)} = \beta_t y_t^{(2)} + v_t \\ \beta_t = (\pi_t \alpha)^{-1} S_t \end{cases}$

を考えてみましょう。ここでS_tは外部的離散確率変数（太陽黒点）で$P(S_t=1)=\pi_t$，$P(S_t=0)=1-\pi_t$，$(0<\pi_t<1)$ ，｛v_t｝は互いに無相関なホワイト・ノイズ過程で分散をσ_t^2としています。このとき(3.7)より条件付き期待値を計算すれば

(3.11) $E_t(y_{t+1}^{(2)}) = \alpha^{-1} y_t^{(2)}$

となりますので確率過程$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)}$は状態方程式(2.1)を満足することがわかります。したがって、可変係数自己回帰過程(3.10)は(2.1)の一つの特殊解とみなすことができます。この解のことを合理的バブル解（Rational Bubbles Solution）、また$y_t^{(2)}$を合理的バブル項とそれぞれ呼ぶことにしましょう。

ここで(3.10)より逆に合理的バブル項に対応するマルチンゲール過程{Z_t}を作りますと(3.7)から

(3.12) $Z_t = \theta_t Z_{t-1} + w_t$

となります。ただし$\theta_t = \pi_t^{-1} S_t$，｛$w_t$｝は平均0、分散$\omega_t^2 = \alpha^{2(t+1)} \sigma_t^2$の互いに無相関な確率変数列です。

この合理的バブル解はもともと$\sigma_t^2 = \pi_t = 0$ の場合に対応する経済モデルを用いてFlood= Garber(1980) が第一次大戦後のドイツのインフレーションの分析に用いましたが、この場合には確定的（Deterministic）バブルと呼ばれています。経済におけるバブル現象は歴史上古くから知られています。例えば１７世紀にオランダで起きたチューリップ熱、１８世紀にイギリスで起きた南海泡沫事件などが有名です。翁(1985)はこのような歴史的事件を考察しています。また最近になって資産価格の理論や為替レートの分析に際して注目を集めています。

<u>例３．３</u>：経済モデルの例として既に説明した第２節の例２．２を再び取り上げてみましょう。この場合には合理的期待の下では$E_t(R_{t+1}) = r$となりますので(2.4)から株価{p_t}の将来解は

$$(3.13)\ p_t^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} E_t(X_{t+i})$$

となります。すなわち、（3.10）右辺は株式の将来に対する配当系列の割引き期待現在価値となります。さらに、合理的バブル項は

$$(3.14)\ \begin{cases} p_t^{(2)} = \beta_t p_{t-1}^{(2)} + v_t \\ \beta_t = \pi_t^{-1}(1+r)S_t \end{cases}$$

となります。以上の資産価格モデルで特殊解$p_t = p_t^{(1)} + p_t^{(2)}$に注目したのはBlanchard=Watson（1982）ですのでこの確率過程をブランシャード・ワトソン過程と呼ぶことができるでしょう。

ここで合理的バブル項のシミュレーションによる実現系列の例を図3.1～図3.3に与えておきます。図3.1は一次の自己回帰過程$X_t = .9X_{t-1} + v_t$から発生させた仮想的な配当系列（平均配当系列から解離）の実現系列を示しています。図3.2はバブル項の実現系列で、図3.3は配当系列とバブル項から計算したバブル解の実現系列です。また図3.4には１９８７年１１月２日の日本経済新聞が報じている最近での米国における株価の動きを示してあります。しばしば株価の時系列はランダム・ウオーク過程で説明されると主張されています。（そのシュミレーション例を図3.5に与えました。）ランダム・ウオーク過程を連続時間で考えればブラウン運動やより一般的には拡散過程（Diffusion）となるわけですが、従来の多くの資産価格理論はこのような確率過程をもとにして構成されています。しかしながら、ここで注目されるのは現実の時系列の動きを説明する上からもバブル項も無視できないように思われることでしょう。一見してわかるように１９２９年の大恐慌当時や最近の株価変動や為替レート変動のパターンに類似するものがあることがうかがえます。また、例えば翁(1985)は外国為替市場における対ドル・円レートの実証分析に際して合理的バブル項が重要な役割を果たしていることを主張しています。

＜図3.1～図3.5が入る＞

さてここで確率的バブル項を作った非線形確率過程 $y_t^{(2)}$ の性質を確率 $\pi_t=\pi$（一定）の場合に限って調べてみましょう。(3.10)より１次、２次の条件付き期待値を計算しますとそれぞれ

$$(3.15)\quad E_{t-1}(y_t) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) y_{t-1}$$

$$(3.16)\quad E_{t-1}(y_t)^2 = \left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\right) y_{t-1}^2 + \sigma^2$$

となります。したがって条件付き分散は

$$(3.17)\quad V_{t-1}(y_t) = \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 y_{t-1}^2 + \sigma^2$$

と求めることができます。この計算を繰り返し行ってゆけば次のようなs時点前での条件付き期待値を求めることができます。

$$(3.18)\quad E_{t-s}(y_t) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^s y_{t-s}$$

$$(3.19)\quad E_{t-s}(y_t)^2 = \left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\right)^s y_{t-1}^2 + \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\right)^{2i} .$$

したがって、条件付き分散は

$$(3.20)\quad V_{t-s}(y_t) = \left(\frac{1}{\pi} -1\right)^s\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2s} y_{t-s}^2 + \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1}\left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\right)^{2i}$$

と表現されます。s=tとおいて初期条件 y_0 を固定して考えれば非線形確率過程 $y_t^{(2)}$ の性質について次の命題が得られます。

命題3.1：確率 $\pi_t = \pi$（一定）で $|\pi| < 1$ を仮定しましょう。
(i) $|\alpha| < 1$ のとき $t\to\infty$ につれて確率過程 $y_t^{(2)}$ の平均と分散は発散します。
(ii) $|\alpha| > 1$ のとき $\alpha^2\pi > 1$ であれば $t\to\infty$ につれて $y_t^{(2)}$ の平均と分散はそれぞれ0と $\sigma^2(\alpha^2\pi/(1-\alpha^2\pi))$ に収束します。

次に確率変数 $T = \{t \mid y_t^{(2)} = v_t$ となる最初の時刻 $t\}$ としましょう。この変数Tは始めてバブルが崩壊する時刻を表現しています。このとき $P(T=t)=(1-\pi)\pi^{t-1}$ となりますのでTの平均と分散は

$$(3.21)\quad \begin{cases} E(T) = \dfrac{1}{1-\pi}, \\ V(T) = \dfrac{\pi}{(1-\pi)^2} \end{cases}$$

となることがわかります。これらはいずれも確率πの増加関数ですが、確率バブルの持続確率が大きければバブル崩壊まで時間がかかることを意味していて、直感的にも納得できるようにおもわれます。

4.期待を含む一般の計量経済モデル

第2節で考察した期待を含んだ計量経済モデルはきわめて簡単な経済の状態方程式(2.1)で表現されていました。第2節でのモデルは容易に一般化することができます。まず$y_t=(y_{it})$を時刻tにおけるm×1の内生変数ベクトル、$u_t=(u_{it})$を時刻tにおけるn×1の政策変数（外生変数）ベクトルとしましょう。まず期待項を含む線形計量経済モデル

$$(4.1)\qquad \sum_{i=-p}^{q} B_i E_t(y_{t+i}) = D u_t$$

を考えてみましょう。ここで$B_i=(b_{jk}(i))$ $(i=-q,\ldots,p)$はm×mの係数行列、$D=(\gamma_{ij})$はm×nの係数行列です。基準化の為に行列B_0を正則としておきましょう。本節では合理的期待形成仮説を仮定しますが、添字iが負のときには$E_t(y_{t+i})=y_{t+i}$と定義しておきます。(4.1)式よりy_tについて解けば、計量経済モデルの誘導型が導かれ、

$$(4.2)\qquad y_t - \sum_{i=1}^{p} A_{-i} y_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} A_i E_t(y_{t+i}) = \delta u_t$$

と表現できます。ここでB_0は正則ですから$A_{-i}=-B_0^{-1}B_i=(a_{jk}(-i))$ $(i=1,\ldots,p)$、$A_i=-B_0^{-1}B_i=(a_{jk}(i))$ $(i=1,\ldots,q)$、$\delta=B^{-1}D=(\delta_i)$とおいたわけです。次に経済の状態方程式(4.1)で表現される国際経済学の例に言及することにしましょう。

<u>例4．1</u>：Dornbush (1976) の小国における為替レート決定モデルは2つの方程式

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} m_t - p_t &= -\alpha\,[E_t(e_{t+1}) - e_t] \\ p_t - p_{t-1} &= \beta\,(e_t - p_t) \end{aligned}$$

からできています。ここでe_tは時刻tにおける邦貨立て為替レートの対数値、m_tとp_tはそれぞれ時刻tにおける貨幣残高と物価水準の対数値です。また母数については$\alpha>0$，$\beta>0$と考えておきます。2つの式はいずれも均衡式ですが第2式は国内の財市場と貨幣市場における均衡条件を表し、第1式は内・外の為替市場の均衡条件を表しています。このモデルは$m=2$，$y_{1t}=e_t$，$y_{2t}=p_{t-1}$，$u_{1t}=m_t$，$\delta_2=0$，

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\alpha \\ -\beta & -1-\beta \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

とすれば(4.2)の特殊な場合に対応することがわかります。

ここで、計量経済モデル(4.1)に戻り第2節の議論を一般化しましょう。(2.2)と同様に政策過程

$$(4.4)\qquad u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

を考えます。$\{\varepsilon_t\}$ はホワイト・ノイズ過程です。また(2.4)と同様にまず線形確率過程

$$(4.5)\qquad y_t = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon_{t-i}$$

を解として考えることにしましょう。以上の定式化のもとでは解の係数行列 $\{C_i\}$ は$m\times n$変数の $(p+q)$ 次定差方程式

$$(4.6)\qquad C_j - \sum_{i=1}^{p} A_{-i} C_{j-i} - \sum_{i=1}^{q} A_i C_{j+i} = \delta\theta_j \quad (j \geqq p)$$

を満足する必要があります。さらにもし行列A_qの正則性を仮定できるならばこの定差方程式は

$$(4.7)\qquad C_{j+q} = -A_q^{-1}A_{q-1}C_{j+q-1} - \cdots - A_q^{-1}A_1 C_{j+1} + A_q^{-1}C_j - A_q^{-1}A_{-1}C_{j-1} - \cdots - A_q^{-1}A_{-p}C_{j-p} - A_q^{-1}\delta\theta_j$$

と表現することができるでしょう。したがって定差方程式の解は一般に(4.7)の右辺最終項を無視した斉次方程式の解である斉次解$C_j(H)$と(4.7)の特殊解$C_j(P)$の和となります。

さて、方程式

$$(4.8)\qquad |\lambda^{p+q}A_q + \cdots + \lambda^{p+1}A_1 - \lambda^p I_m + \lambda^{p-1}A_{-1} + \cdots + A_{-p}| = 0$$

の根をλ_i $(i=1,\ldots,(p+q)m)$ としましょう。ここでもし総ての根の絶対値が1より大きい状況を考えましょう。このとき解が発散しないためには

$$C_j(H) = 0 \quad (j \geqq p)$$

となる必要があります。この条件は2節の条件$|\alpha|<1$の一般化ですので、この条件を満足する定常過程解は一意となることがわかります。ところが一般には

この条件を満足しない経済モデルは多数存在すると思われます。この問題について例４．１を用いて説明しましょう。

<u>例４．１の解</u>：この為替レート決定モデルでは(4.2)において$y_{1t}=e_t$、$y_{2t}=p_{t-1}$、$u_t=m_t$とおけば$m=2$，$n=1$，$p=0$，$q=0$，

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -1/\alpha \\ -\beta & 1+\beta+\beta/\alpha\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}1/\alpha \\ -\beta/\alpha\end{pmatrix}$$

となります。ここで$\alpha>0$，$\beta>0$であれば行列A_1の固有値は $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ となりますので条件は満たさないことになります。ところでA_1の固有値は相異なりますので固有ベクトルを用いて2x2の行列$P=(p_{ij})$を作り対角行列$\Lambda=(\lambda_{ii})$を用いて

$$A_1 = P^{-1}\Lambda P$$

とすることができます。したがって、(4.7)の斉次解について

$$(4.9)\qquad PC_{i+1}(H)=\begin{pmatrix}1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2\end{pmatrix}PC_i(H) = \begin{pmatrix}1/\lambda_1{}^i & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2{}^i\end{pmatrix}PC_1(H)$$

が成り立ちます。この解が発散しないためには$(1/\lambda_1{}^i)$の係数$C_i=(c_{ij})$に関して

$$(4.10)\qquad p_{11}c_{j1}+p_{12}c_{j2}=0 \quad (j\geqq 1)$$

とならねばなりません。さらに(4.10)の第２式を整理すれば斉次解について

$$(4.11)\qquad c_{j+1,2}(H)=\frac{1}{\lambda_2}c_{j,2}(H),\quad c_{j,1}(H)=-\frac{p_{12}}{p_{11}}c_{j,2}(H)$$

が成り立ちます。ところで初期条件

$$(4.12)\qquad C_0 = AC_1 + \delta\theta_0$$

を考慮すれば$C_0'=(c_{01},c_{02})$，$C_1'=(c_{11},c_{12})$について３つの方程式があり、解の不定問題が存在するようにみえます。ところがこの例の場合には偶然にも$y_{2t}=p_{t-1}$とおいたため、$\theta_0=1$より$c_{02}=0$でなければなりません。したがって未知数は３個となるので、結局

$$(4.13)\qquad c_{01}=\delta_1+\frac{p_{12}}{p_{11}}\delta_2,\quad c_{11}=-\frac{p_{12}}{p_{11}}c_{12},\quad c_{12}=-\lambda_2\delta_2$$

と解くことができます。この例では不安定根は１個あるにもかかわらずたまたま

経済モデルの構造から線形定常過程となる解は一意となることがわかりました。以上で用いた解の分析方法は一般には複雑になります。より簡単な方法については命題４．１のあとで説明します。

さてこの例において予期せざる政策ショックの影響（$\theta_j = \rho^j$，$j \geqq 0$）を考えましょう。特殊解を$C_j(P) = h b^j$とおいて解けば$b = \rho$，$(I - \rho A_1)h = \delta$となりますので

(4.14) $\qquad C_j(P) = (I_2 - \rho A_1)^{-1} \delta \rho^j$

と書くことができます。以上の考察よりこの確率モデルにおける予期せざる恒久的政策ショック（$\rho = 1$）に対して解の動学的挙動を図4.1と図4.2に図示してみました。この経済モデルでは例えば貨幣供給の恒久的増加の結果、為替レートe_tは当初プラスの方向で大きく変化し、その後マイナスの方向に動きながら収束してゆきます。他方、物価水準p_tは均衡水準に向かって少しずつ変化して収束することがわかります。このモデルはマネタリスト的ですので長期的には価格水準や為替レートは１単位増加することになっています。また、この経済モデルはしばしばオーバー・シュウーティング・モデルと呼ばれていますがそれは内生変数の為替レートが当初政策ショックにたいして均衡水準以上大幅に変化することに起因しています。

＜図4.1と図4.2が入る＞

以上の例が示す様に、期待を含む計量経済モデルにおける内生変数の動学的挙動は複雑になります。特に安定根と不安定根が同時に存在する場合には定常過程の解の分析も多少複雑になります。また第２節の最後で説明しました解の一意性の分析も複雑になります。解の非一意性についてより深刻な例は例４．４で説明します。

ところで期待を含む経済モデルのなかには(4.1)では表現できないものが幾つか存在します。そこで(4.1)をより一般化して次のような線形計量経済モデルを考えましょう。

$$(4.15)\qquad \sum_{i=-p}^{r} B_i y_{t+i} + \sum_{i=1}^{q} B_i^* E_t(y_{t+i}) + \Gamma z_{t+r} = D u_{t+r}$$

ここで z_t は $n_1 x1$ の非確率的な外生変数（確定的な歴史変数）、u_t は $n_2 x1$ の（確率的）外生変数、$B_i = (b_{jk}(i))$ $(i=-q,...,r)$ 及び $B_i^* = (b_{jk}(i)^*)$ $(i=1,...,q)$ は $m x m$ の係数行列、$\Gamma = (\gamma_{ij})$ は $m x n_1$ の係数行列、$D = (d_{ij})$ は $m x n_2$ の係数行列です。

このモデルの分析は原理的には(4.1)の分析を拡張すればできます。これまでに挙げた経済モデルはいずれもこの計量経済モデルで表現できますが、ここではその他に経済学における幾つか例に言及することしましょう。

例４．２：合理的期待仮説を経済分析に導入した Muth (1961)は農産物市場におけるクモの巣モデルを考えました。需要関数と供給関数をそれぞれ

$$(4.16)\quad \begin{cases} Q_t^d = -\beta p_t \\ Q_t^s = \gamma\, {}_{t-1}p_t^e + u_t \end{cases}$$

とします。Q_t と p_t をそれぞれ時刻 t における数量と価格として均衡条件 $Q_t^d = Q_t^s = Q_t$ を考え、$m=2, n_1=0, n_2=1, p=-1, q=r=1, y_t=(Q_t, p_t)'$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix},\ B_1^* = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Gamma = 0$$

とおけば(4.15)になります。u_t は天候等供給側に発生する攪乱要因を意味しています。

例４．３：Lucas (1973)のマクロ経済モデルでは総供給曲線と総需要曲線がそれぞれ

$$(4.17)\quad \begin{cases} Q_t = Q_{nt} + \theta\gamma(p_t - {}_{t-1}p_t^e) + \lambda(Q_{t-1} - Q_{nt-1}) \\ Q_t + p_t = X_t \end{cases}$$

と表現されています。ここで Q_t は実質産出量、p_t は物価水準、X_t は名目産出量でいずれも対数で測っています。Q_{nt} は自然産出量でトレンド $\alpha + \beta t$ であらわされています。この経済モデルは $p=0$, $q=r=1$, $y_t=(Q_t, p_t)'$, $z_t=(1, Q_t)'$, $u_t = X_t$,

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & -\theta\gamma\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B_1^*=\begin{pmatrix}0 & \theta\gamma\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \Gamma=\begin{pmatrix}-\lambda\beta & -1+\lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},$$

とすれば(4.15)になります。

以上の二つの経済モデルでは期待変数はいずれも時刻 $t-1$ の情報に基づいて形成されていることに注目してください。後で説明するようにこの様な計量経済モデルでは線形定常解は一意になります。

<u>例４．４</u>：Taylor (1977) のマクロ経済モデルは３つの方程式

$$(4.18)\quad \begin{cases} x_t=-r_1\{i_t-E_t(p_{t+1}-p_t)\}+r_2(m_t-p_t)+\varepsilon_{1t}\\ x_t=\phi_0+\phi_1(m_t-p_t)+\varepsilon_{2t}\\ m_t-p_t=x_t-\alpha_1 i_t+\alpha_2(m_t-p_t)+\varepsilon_{3t}\end{cases}$$

からできています。ここで x_t, p_t, i_t, m_t はそれぞれ実質生産、物価水準、名目利子率、貨幣残高でいずれも対数値で測っているとします。第１式は総需要関数、第２式は総供給関数、第３式は貨幣需要関数をそれぞれ表現しています。このモデルは $m=3$, $n_1=2$, $n_2=0$, $p=0$, $q=1$, 内生変数 $y_t=(p_t, x_t, i_t)'$, 確定的外生変数 $z_t=(1, m_t)'$, 確率的外生変数 $u_t=(u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})'$,

$$B_1=\begin{pmatrix}r_1+r_2 & 1 & r_1\\ \phi_1 & 1 & 0\\ \alpha_1-1 & -1 & \alpha_1\end{pmatrix},\ B_1^*=\begin{pmatrix}r_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ B_2^*=\begin{pmatrix}-r_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma=\begin{pmatrix}0 & -r_2\\ -\phi_0 & \phi_1\\ 0 & 1-\alpha_2\end{pmatrix}$$

とおくことにより(4.15)の特殊な場合となります。

さて例４．４のモデルを用いて再び解の一意性について考えてみましょう。この経済モデルにおいて B_0 が正則となることを仮定して方程式

$$(4.19)\qquad |B_2^*\lambda+(B_1+B_1^*)|=0$$

の３つの固有値を求めますと $\lambda_1=0$（重根）及び

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_1 r_1}{|B_0|}$$

となります。（方程式(4.21)は(2.9)の類推と考えて下さい。正確な議論をするには命題４．１が必要です。）そこで、本節の例４．１での解の一意性に関する説明から、この経済モデルではλ_2の絶対値が１より大きければ一般には線形定常確率過程となる解の一意性はないことがわかります。以上で求めた条件$|\lambda_2|>1$は Taylor (1977) の導いた条件 $-2<\delta_1<0$ に対応しています。この経済モデルは例４．１と同様に分析できますが、実は次元が退化しているので簡単な価格方程式が導かれることになります。

例４．５：Taylor (1979) のマクロ経済モデルは次に挙げる二つの総需要関数と価格方程式

$$(4.20)\quad \begin{cases} X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3(m_t - p_t) + \beta_4(m_{t-1} - p_{t-1}) \\ \qquad\quad + \beta_{5\,t-1}\pi_t^e + \beta_6 t + \beta_0 + v_t \\ \pi_t = \pi_{t-1} + \gamma_{1\,t-1}X_t^e + \gamma_0 + w_t \end{cases}$$

からなっています。ここでy_tは実質生産，p_tは平均価格水準，m_tは貨幣残高，をそれぞれ対数表示で示しています。その他 t はトレンド，$\pi_t = p_t - p_{t-1}$はインフレ率，v_tとw_tは方程式誤差をそれぞれ表現しています。ここで Taylor (1979) は価格水準p_tは t -1時刻で決まっていると考えていますので以下では変数$q_{t-1} = p_t$を定義して考えます。この経済モデルは$m=2$，$p=q=r=1$，$y_t = (X_t, q_t)'$，$z_t = (1, t, m_t, m_{t-1})'$，$u_t = (v_t, w_t)'$，

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_3+\beta_5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B_{-1} = \begin{pmatrix} -\beta_2 & \beta_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1^* = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_5 \\ -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\beta_0 & -\beta_6 & -\beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば(4.15)の形になります。

例４．６：Taylor (1980)が展開した時差賃金契約 (Staggered Contract) モデルは次の５つの方程式から成り立っています。

$$
(4.21)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{s=1}^{n}(-b_s)\,{}_{t-1}w_{t+s}^{e} + w_t + \sum_{s=1}^{n}(-b_s)\,w_{t-i} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle - \left(\frac{h}{N}\right)\sum_{s=0}^{n}{}_{t-1}e_{t+s}^{e} = \varepsilon_t \\
y_t + p_t = m_t + v_t \\
\displaystyle p_t = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n} w_{t-i} \\
e_t = g_2 X_t \\
m_t = g_3 p_t
\end{cases}
$$

ここでw_tは t 時刻での賃金契約，e_tは労働市場での超過需要，X_tは完全雇用水準からの実質生産の解離額，m_tは貨幣残高をそれぞれ対数表示で表しています。またv_tはランダムな流通速度，p_tは平均物価水準，ε_tは方程式残差，$N = n+1$は契約期間をそれぞれ表現しています。この経済モデルは$m=5$，$n_1=0$，$n_2=2$，$p=n-1$，$q=n+1$，$r=1$，$y_t=(w_t, X_t, e_t, p_t, m_t)'$，$D=(1,0,0,0,0)'$，$u_t=\varepsilon_t$，

$$
B_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad
B_{-s} = \begin{bmatrix} -b_{s+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad (s=1,\ldots n-1)
$$

$$
B_{n+1}^* = \begin{bmatrix} -b_n & 0 & -h/N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1/N & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_3 & 1 \end{bmatrix},
\quad
B_s^* = \begin{bmatrix} -b_{s-1} & 0 & -h/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
(s \geqq 2)
$$

とおけば(4.15)の形になります。

一般のバブル解

第３節の議論を一般化すれば期待を含む計量経済モデル(4.1)におけるバブル解はどの様に考えられるでしょうか。$m_1 \times m$の選択行列（$m_1 \leqq m$）を$J' = (I_{m_1}, 0)$として方程式

$$(4.22)\quad \begin{cases} J'\{B_q y_t^{(2)} + B_{t,q-1} y_{t-1}^{(2)} + \ldots + B_{t,q-p} y_{t-q-p}^{(2)}\} = v_t \\ B_{t,q-1} = \pi_t^{-1} S_t \end{cases}$$

を満足する確率過程を考えましょう。但しS_tは外部的離散確率変数で$P(S_t=1) = \pi_t$，$P(S_t=0)=1-\pi_t$とします。すぐに分かるように(4.22)は混合確率過程(3.4)の一般化になります。と云いますのは条件付確率の計算よりこの確率過程は

$$(4.23)\qquad \sum_{i=-p}^{q} B_i E_t(y_{t+i}^{(2)}) = 0$$

を満足しています。この方程式は計量経済モデル(4.1)の斉次部分ですのでこの$y_t^{(2)}$は斉次解となっている事がわかります。ところで、このバブル項にもとづく解はマルチンゲールから作り出される解の一例にしかすぎません。より複雑な非線形解も考えられるように思われます。また以上の分析は一般の線形計量経済モデル(4.15)についても同様に考えることができるでしょう。

期待を含む計量経済モデルと多変量ＡＲＭＡＸモデル

一般の計量経済モデル(4.15)の解の構造をもうすこし調べてみましょう。合理的期待の下では第３節より予測誤差は（$i \geqq 0$）

$$(4.24)\qquad y_{t+i} - E_t(y_{t+i}) = \sum_{j=0}^{i-1} C_j \varepsilon_{t+i-j}$$

と表現されます。この式を(4.1)に代入しては整理しますと

$$(4.25)\qquad B(L) y_{t+q} + \Gamma z_{t+r} = v_{t+q}$$

となります。ここで

$$(4.26)\qquad v_{t+q} = D u_t + C(L) \varepsilon_{t+q}\ ,$$

$$(4.27)\qquad B(L) = \sum_{i=-p}^{q} (B_i + B_i^*) L^{q-i}\ ,\ C(L) = \sum_{j=1}^{q} B_i^* \sum_{i=1}^{j} C_{j-i} L^{q-i}$$

とおきましたが、便宜上$B_i = 0$（$q \geqq i > r$），$B_i^* = 0$（$i \leqq 0$）としました。(4.25)からここで考察している確率モデルは（確定）外生変数付きの多変量ＡＲ

ＭＡモデルとなる事がわかります。この確率モデルはしばしばＡＲＭＡＸモデルと呼ばれています。さて以上のことから一般の線形計量経済モデル(4.15)の解の構造について次の二つの命題が成立します。

命題４．１：線形計量経済モデル（4.15）の解の一意性について次のことが成立します。(i) $1 \leqq q \leqq r$ かつ $|B_r| \neq 0$ のとき線型解は一意となります。(ii) $q > r$ かつ $|B_r| \neq 0$，$|B_q^*| \neq 0$，$\Gamma = 0$ のとき方程式

$$
(4.28) \qquad \left| \sum_{i=0}^{p+q} \lambda^{p+q-i} \left(B_{q-i} + B_{q-i}^{*} \right) \right| = 0
$$

が（$q-r$）個の相異なる発散根を持てば線形定常解は一意となります。

この命題４．１の結果は解の一意性についての第２節での $|\alpha| < 1$ の場合の議論を一般化したものです。この命題は本節の例4.1～例4.6の分析に直接的に用いることができます。

命題４．２：線形計量経済モデル（4.15）において確率的政策変数 u_t が n_2 変数ＡＲＭＡ（P_u，Q_u）にしたがうとします。このとき内生変数 y_t は m 変数ＡＲＭＡＸ（P_y，Q_y）、y_t の第 i 要素はＡＲＭＡＸ（P，Q）となります。ここでＡＲ項とＭＡ項の次数についてはそれぞれ次の関係が成立します。
$P \leqq mP_y$，$Q \leqq (m-1)P_y + Q_y$ であって、
(i) $m \geqq n_2$ のとき

$$
(4.29) \qquad P_y \leqq p+q+P_u, \quad Q_y \leqq \max\{q+Q_u, (q-1)P_u\},
$$

(ii) $m \leqq n_2$ のとき

$$
(4.30) \qquad \begin{aligned} P_y &\leqq p+q+(n_2-m+1)P_u, \\ Q_y &\leqq \max\{q+(n_2-m)P_u+Q_u, (q-1)(n_2-m+1)P_u\} \end{aligned}
$$

です。

期待を含む計量経済モデルにおいてはしばしば確率的政策変数（外生変数）に多変量ＡＲＭＡモデルを仮定します。命題４．２からわかることは、第一にその仮定の下では個々の変数も１変数ＡＲＭＡＸモデルになることです。またさらに

非確率的外生変数が存在しなければ個々の変数は１変数ＡＲＭＡモデルになります。第二には命題４．２の導出から実は自己回帰部分は計量経済モデルにあらわれる内生変数総てに共通となることがわかります。このような二つの結論は伝統的な期待変数を含まない線形計量経済モデルについては既によく知られていますので、命題４．２はある意味でそれを拡張したことになります。

例４．１の解（別解）：この為替レートモデルにおいて$y_{t+1}-E_t(y_{t+1})=C_0\varepsilon_{t+1}$を方程式$y_{t+1}=A_1E_t(y_{t+1})+\delta u_{t+1}$に代入すれば

(4.32) $$(I - A_1^{-1}L)y_{t+1} = C_0c\varepsilon_{t+1} - A_1^{-1}\delta u_t$$

となります。ここで（4.10）に注目して、この方程式の左から余因子行列

(4.33) $$(I-A_1^{-1}L) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{1+\beta} & \dfrac{1}{1+\beta}\dfrac{1}{\alpha}L \\ \dfrac{\beta}{1+\beta} & 1-\dfrac{1+\beta+\beta/\alpha}{1+\beta}L \end{pmatrix}$$

を乗じれば

(4.34) $$|I-A_1^{-1}L|\,y_{t+1} = (I-A_1^{-1}L)^{*}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}[c_{01}\varepsilon_{t+1}-\frac{1}{\alpha}u_t]$$

となります。（$A(L)^{*}$は$A(L)$の余因子行列です。）また$C_0=(c_{01},\ 0)'$となることを用いています。政策過程として　$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_{t-k}$　とおけば(4.32)の左から$(1-\rho L)$を乗じることによってy_{t+1}の第１要素は

(4.35) $$(1-\rho L)[1-\frac{2+\beta+\beta/\alpha}{1+\beta}L+\frac{1}{1+\beta}L^2]e_{t+1}$$
$$= c_{01}[1-\frac{1}{1+\beta}L][1-\rho L-\frac{1}{\alpha c_0}L^{k+1}]\varepsilon_{t+1}$$

と書けることに注意してください。

ここで例えば$k=0$，$\alpha=\beta=1$と特定の値を与えてみましょう。

このとき為替レートe_{t+1}についての方程式は

(4.36) $$(1-\rho L)(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)e_{t+1}$$
$$= c_{01}(1-\frac{1}{2}L)[1-(\rho+\frac{1}{c_{01}})L]\varepsilon_{t+1}$$

となってARMA(3,2)となります。ここでλ_1とλ_2は方程式$\lambda^2-2L+1/2=0$の根で$\lambda_1=1+\sqrt{2}/2$, $\lambda_2=1-\sqrt{2}/2$とおきました。$|\lambda_2|>1$ですのでこの確率過程が発散しない為には

$$(4.37) \qquad 1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\rho+\frac{1}{c_{01}}$$

となる必要があります。このことから初期値は

$$(4.38) \qquad c_{01}=\frac{2}{2+\sqrt{2}-2\rho}$$

と求まることになりました。したがって共通根を消却すると

$$(4.39) \qquad (1-\rho L)(1-\lambda_2 L)e_{t+1}=c_{01}(1-\frac{1}{2}L)\varepsilon_{t+1}$$

と書けますので最終的にはe_t～ARMA（2,1）となります。また同様にして物価p_tの確率過程を求めてやりますと

$$(4.40) \qquad (1-\rho L)(1-\lambda_2 L)p_t=\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_t$$

となります。(4.39)と(4.40)より明らかなように$\{e_t\}$と$\{p_t\}$のAR項の係数は共通となります。実は図4.1と図4.2は以上で得られた$\{e_{t+1}\}$と$\{p_t\}$の確率過程において$\rho=1$とおいてさらにその移動平均表現を計算して求めたものなのです。

例４．２の解： Muth (1961) のモデルの解をここで考えた方法によって分析してみましょう。

$$(4.41) \qquad y_{t+1}=E_t(y_{t+1})+C_0\varepsilon_{t+1}$$

を方程式$B_1y_{t+1}+B_1^*E_t(y_{t+1})=Du_{t+1}$に代入すれば

$$(4.42) \qquad (B_1+B_1^*)E_t(y_{t+1})-DE_t(u_{t+1}) = B_1C_0\varepsilon_{t+1}+D[u_{t+1}-E_t(u_{t+1})]$$

と書くことができます。左辺はｔ時刻までの情報に含まれ、左辺はｔ＋１時刻におけるショックで左辺とは無相関ですのでゼロに等しくなります。したがって$|B_1|\neq 0$から

$$(4.43) \qquad C_0\varepsilon_{t+1}=B_1^{-1}D[u_{t+1}-E_t(u_{t+1})]$$

が成立することになります。これを用いて再び（4.17）に$E_t(y_{t+1})=y_{t+1}-C_0\varepsilon_{t+1}$を代入しますと整理すれば

(4.44) $$(B_1+B_1^*)\,y_{t+1} = B_1^*B_1^{-1}D\,[u_{t+1}-E_t(u_{t+1})] + D\,u_{t+1}$$

となります。ところでこの場合$|B_1+B_1^*|\neq 0$となっていますので解は

(4.45) $$y_{t+1} = B_1^{-1}D\,[u_{t+1}-E_t(u_{t+1})] + (B_1+B_1^*)\,D\,E_t(u_{t+1})$$

と一意的に表現できることがわかります。例4.2の母数を代入して価格方程式を求めますと

(4.46) $$p_{t+1}=-\frac{1}{\beta}\,[u_{t+1}-E_t(u_{t+1})]-\frac{1}{\beta+r}E_t(u_{t+1})$$

となります。これが外生変数$\{u_t\}$の確率過程を与えたときに一意的に定まる価格の確率過程です。

以上２つの経済モデルを例にとって解を分析してみました。例４．３と例４．５は全く同様に分析を行うことができますので省略することにします。例４．４と例４．６は期待を含む計量経済モデルにおける従来の解の非一意性の扱いを見る上で教育的と思われますので以下でとりあげてみましょう。

例４．４の解：$s=1,2$ に対して

(4.47) $$y_{t+s} = E_t(y_{t+s}) + \sum_{i=0}^{s-1}C_i\,\varepsilon_{t+s-i}$$

を方程式

(4.48) $$B_1y_{t+1}+B_1^*E_t(y_{t+1})+B_2^*E_t(y_{t+2})+\Gamma z_{t+1}=u_{t+1}$$

に代入すると

(4.49) $$B(L)y_{t+2} + \Gamma z_{t+1} = A(L)\varepsilon_{t+2}$$

と書くことができます。ただし行列多項式は

(4.50) $$B(L)=B_2^*+(B_1+B_1^*)\,L$$

(4.51) $$A(L)=B_2^*C_0+(I+B_1^*C_0+B_2^*C_1)\,L$$

で与えられます。ここで時刻 $t+1$ における(4.15)の両辺に注目すると $u_{t+1}=\varepsilon_{t+1}$ ですので $C_0{}^*=I_3$ となることがわかります。$C_1{}^*=C_1B_1=(c_{ij})$ とおきます。(A.26)に対して左から $B(L)^*$ を乗じて第１番目の方程式を求めてみます。若干の計算の結果

(4.52) $$\{1-(1+\delta_1)L\}p_t+\delta_0 = -\delta_1{}^{-1}\{1-(1+\delta_1)L\}\varepsilon_{1t} - \delta_1{}^{-1}\{c_{11}\varepsilon_{1t-1}+c_{12}\varepsilon_{2t-1}+c_{13}\varepsilon_{3t-1}\}$$

となることがわかります。ここで $\delta_1=|B_1|/\alpha_1 r_1$, $\delta_0=\phi_0(\alpha_1{}^{-1}+r_1{}^{-1})+\delta_1 m_{t-1}$ とおきました。ここで Taylor (1979) は暗黙の内に $c_{12}=c_{13}=0$ を仮定します。$\pi_1=c_{11}\delta_1{}^{-1}$ とおけば価格方程式は

(4.53) $$p_t=(1+\delta_1)p_{t-1}+\delta_0 -\delta_1{}^{-1}\varepsilon_{1t}-\delta_1{}^{-1}\{\pi_1-(1+\delta_1)\}\varepsilon_{1t-1}$$

と書き直すことができます。これが Taylor の得た解になります。ここで π_1 は自由に動ける初期値であることに注意して下さい。ここでもし $1<|1+\delta_1|$ であれば解が発散しない為には第２節の議論を用いると $\pi_1=0$ となる必要があります。この時には定常過程解は

(4.54) $$p_t=-\delta_1{}^{-1}\delta_0-\delta_1{}^{-1}\varepsilon_{1t}$$

と一意に定まります。ところが $1>|1+\delta_1|$ のときには π_1 を母数として定常過程解は無数に存在することになります。ここで $-\delta_1{}^{-1}p_t{}^*=p_t+\delta_1{}^{-1}\delta_0$, $\lambda_1=1+\delta_1$, $\lambda_2=\pi_1-1-\delta_1$ とおいて確率過程ARMA(1,1)にしたがう $p_t{}^*$ の分散を計算すれば

(4.55) $$\mathrm{Var}(p_t{}^*) = \{1+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{1-\lambda_1{}^2}\}\mathrm{Var}(\varepsilon_{1t})$$

となります。これを最小化するように π_1 を定めれば $\lambda_1+\lambda_2=\pi_1=0$ となって Taylor の求めを分散最小解が得られます。$\pi_1=0$ ですからこの解が(4.54)に一致することは明らかでしょう。

例４．６の解：　行列多項式Ｂ(Ｌ)を

(4.56) $$B(L) = \sum_{s=0}^{n} B_{n+1-s}{}^* L^s + \sum_{s=-(n-1)}^{0} B_s L^{n+s}$$

とおいて方程式$B(L)E_t(y_{t+n})=D\varepsilon_t$の左から$B(L)^*$を乗じた第１要素を考察しましょう。計算から$B^{**}(L)_{11}=-1$および

$$(4.57)\qquad |B(L)| = (1-\frac{n}{N}\lambda\beta)\{\sum_{s=1}^{n} b_s L^{n-s} - cL^n + \sum_{s=1}^{n} b_s L^{n+s}\}$$

となることがわかります。ただし$c=(1+\gamma\beta/N)/(1-\gamma\beta n/N)$でとおきました。したがって

$$(4.58)\qquad W_t = \sum_{s=1}^{n} b_s^* E_{t-1}(W_{t+s}) + \sum_{s=1}^{n} b_s^* W_{t-s} + \varepsilon_t^*$$

となります。ただし$b_s^*=cb_s$, $\varepsilon_t^*=\varepsilon_t/(1+\gamma\beta/N)$とおきました。次に$s=1,\cdots,n$について

$$(4.59)\qquad E_{t-1}(W_{t+s}) = W_{t+s}-\sum_{i=0}^{s} c_i\varepsilon_{t+s-i}$$

を代入して整理すれば

$$(4.60)\qquad \{\sum_{s=1}^{n} b_s^* L^{n-s} - L^n + \sum_{s=1}^{n} b_s L^{n+s}\} W_t = \{\sum_{s=0}^{n} d_s L^s\}\ \varepsilon_t$$

と表現されます。これはＡＲＭＡ(2n,n)となっています。ただしここで$\{d_s\}$は$\{c_s,\ s=0,\cdots,n\}$によって定まる定数です。左辺のＡＲ項に注目すると対称な多項式になっていることがわかります。したがってその多項式はその根が相異なるとすれば、

$$(4.61)\qquad b_n^*\prod_{s=1}^{n}(1-\lambda_i L)(1-\frac{1}{\lambda_i}L)$$

と表現することができます。一般性を失わずに$|\lambda_i|<1$とすればｎ個の発散根をとり除くように定数系列$\{d_s\}$を定めることができます。Taylor (1980) はこうして得た定常過程解である$W_t\sim AR(n)$

$$(4.62)\qquad \prod_{s=1}^{s}(1-\lambda_i L)W_t = \varepsilon_t$$

を実証分析で用いています。この経済モデルではモデルの構造から定常過程解は一意に決っています。

<u>期待を含む計量経済モデルと確率的非定常性</u>

これまで計量経済モデルでは非定常性は確定的外生変数の中でとり扱ってきました。その典型的な例は例４．３の確定的外生変数の中にみられた定数項や自然率仮説を表す時間の線形関数でしょう。他方、計量経済分析では非定常過程性を確率的トレンドと見なす考え方があります。そこで次に一般の線形計量経済モデル(4.15)の解と時系列の確率的非定常性の関連を考えてみましょう。議論の単純化の為に以下では外生変数の存在を無視して$\Gamma=0$，$\delta=0$の場合を考ましょう。このとき計量経済モデル(4.15)は

$$(4.64)\qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n_i-1} b_{ij}(k)E_t(y_{i+k}) \ = \ 0 \quad (i=1,\cdots,m)$$

と表現することができるでしょう。ただしここで$b_{ij}(k)$は定数、n_iはiに依存する整数、kは負もゆるすことにしますがその場合には以前の同様に$E_t(y_{it+k})=y_{it+k}$（$k<0$）としておきます。この形の経済モデルとしては次のような例を挙げることができます。

<u>例４．７</u>：金融市場において２種類の市場利子率を考えることにしましょう。時刻tにおける２つの利子率の中で満期が長期間（例えば10年物国債）であるものを長期利子率R_t、満期が短期間（例えば１ヶ月現先レート）のものを短期利子率r_tと呼びます。長期債の満期をnとすれば、金融論における利子率の期間構造に関する期待仮説とは

$$(4.65)\qquad R_t=\frac{1}{n}E_t\{r_t+r_{t+1}+\cdots+r_{t+n-1}\}$$

によって表現することができます。この仮説は$m=2$において$y_{1t}=R_t$，$y_{2t}=r_t$，$\delta_1=0$とおけば(4.64)の特殊な場合と考えることができます。

<u>例４．８</u>：為替レートの決定モデルにおいてしばしば先物レートf_tと直物レートs_tの間に次の関係を考えます。

$$(4.66)\qquad f_t=E_t(s_{t+h})$$

但しhは予測期間を表しています。この仮説は$m=2$、$\delta_1=1$、$y_{1t}=f_t$，$y_{2t}=s_t$とおけば(4.64)の特殊な場合となります。

例４．９：消費関数の一つの有力な理論である恒常所得仮説はもともとFriedman によって1950年代に導入されました。Friedman(1957) では適合的期待形成仮説を用いましたが最近では合理的期待の下で議論が展開されています。時刻tにおける消費C_tと恒常所得Y_{pt}の間には線形関係

(4.67)　$C_t = \beta Y_{pt} + v_t$

が成立するとしましょう。ここで $\{v_t\}$ は一時的消費と呼ばれる部分ですが、簡単化の為にホワイト・ノイズ過程としておきます。また時刻tにおける恒常所得とは現在から将来の予想される所得の系列Y_{t+i}（$i \geq 0$）の割引き現在価値

(4.68)　$Y_{pt} = (1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i E_t(Y_{t+i})$

によって与えられます。このモデルは$m=2$，$y_{1t}=c_t$，$y_{2t}=Y_t$，$\delta_1=1$，$u_{1t}=v_t$とすれば(4.64)の特殊な場合と考えることができるでしょう。恒常所得仮説に関する最近の実証分析についての詳しい発展は山本(1987)第14章を参照してください。

さて、経済時系列は非定常的なトレンドや季節性が見られますのでしばしば線形フィルターを用います。例えば階差フェルターや移動平均フィルターが実証分析に用いられることはよく知られています。また新聞等で公表される四半期や月次の経済時系列は大部分季節調整済みの系列です。この線形フィルターは一般に

(4.69)　$\Delta = D_0 F^r - D_1 F^{r-1} - \cdots - D_r - D_{r+1} L - \cdots - D_{r+s} L^s$

と表現することができます。ここで系列$D_k = \mathrm{diag}\,(d_{ii}(k))$　($k=0, \cdots, r+s$) は定数からなる対角行列、Fは前向きのシフト作用素（Forward Filter）で$F(y_t) = y_{t+1}$です。

そこで通常はこの線形フィルターで処理を行った経済時系列に多変量ＡＲＭＡモデル

(4.70)　$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$

をフィットして分析を行います。ここで母数$\alpha_1, \cdots, \alpha_p$及び$\beta_1, \cdots, \beta_q$は共に$m \times m$の定数行列です。このとき Kunitomo=Yamamoto (1986) は次の結果を得ています。

命題４．３：MA項の方程式

(4.71) $$|\lambda^q I - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{q-i}| = 0$$

の根の最大絶対値をρとします。さらに

(4.72) $$\sum_{k=0}^{n_i-1} b_{ij}(k)\lambda^k \neq 0$$

を満たす方程式

(4.73) $$d_{0i}\lambda_j^{r+s} - d_{1,j}\lambda_j^{r+s-1} - \dots - d_{r+s,j} = 0$$

の正根λが存在して$\lambda > \rho$かつ$\rho < 1$とします。以上の条件の下では多変量ARMAモデル(4.70)は計量経済モデル(4.64)の解とはなりえません。

系４．１：$\Delta = (1-L)^d$として階差データ$\{\Delta y_t\}$を多変量ARMAモデルにフィットします。このとき合理的仮説の下では確率過程$\{y_t\}$は仮説(4.65)と(4.66)を満足出来ません。

さて以上の結果をどの様に解釈したら良いでしょうか。計量経済モデルの場合には命題４．２に示されたように内生変数は互いに密接に関連して変動します。ところが通常の時系列分析で用いられる多変量ARIMAモデルは変数同士、時間と共に相当別々に変動することまでも許しているのです。例えば図４．３と図４．４には２変数のARMA(1,0)の実現系列を示しています。考察している時系列モデルは

(4.73) $$\begin{cases} y_{1t} + \beta y_{2t} = u_{1t} \\ y_{1t} + \alpha y_{2t} = u_{2t} \end{cases}, \begin{cases} u_{1t} = \rho_1 u_{1t-1} + \varepsilon_{1t} \\ u_{2t} = \rho_2 u_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

ですが、母数$\alpha = -.6$, $\beta = 0.0$, 初期値$y_{10} = 0.0$, $y_{20} = 0.5$と固定しました。図４．２はAR項に単位根が二つある場合（$\rho_1 = \rho_2 = 1$）、すなわちARIMA$_2$(0,1,0)より発生した系列を与え、図４．４はAR項に単位根が一つある場合（$\rho_1 = 1$, $\rho_2 = .8$）のARMA$_2$(1,0)より発生した系列を与えてています。一見して明らかように図４．４の方が互いに密接に関連しながら時間とともに変動

する経済時系列の分析に適しているように思われます。このようにＡＲ項の変数よりも少ない単位根がある場合（図４．４は１個）時系列は共和分過程（Co-Integrated Process）に従うと呼ばれます。この種の確率過程は最近 Granger=Engle（1987）が提案して以来関心がもたれています。

<図4.3と図4.4が入る>

5.期待為替レートの分析例

これまで４節にわたって期待を含む計量経済分析で用いられる統計モデルを理論的に考えてきました。さて、実際に現実の経済を構成している人々がどの様に期待を形成しているか大変興味のあるところですが、これを分析者が直接知ることは大変困難です。と云いますのは人々の主観的期待や予想は実際に統計データとして調査されることはあまりないのです。例外的に期待に関するデータが存在するものとしては消費や投資についてのアンケート調査がありますので、これらの期待データをもとにした実証分析がいくつかあります。ただしこれらのアンケートでは直接数値にかんする予想を調査するのではなく、カテゴリー・データとして調査されるためその分析にあたってはいろいろな問題が生じます。ここにも大変興味ぶかい統計的問題がありますがその問題には触れないことにします。

本節では為替レート（円・ドル為替レート）の期待データを用いた期待形成仮説の分析結果を要約して報告します。ここで用いたデータは国際金融センターが市場参加者に対して月に２回づつ定期的に行っている１ヶ月先予測のアンケートからの集計（1985年６月～1987年６月）にもとづいて作成したものです。この予測データは予測数値ですので大変貴重なものだと考えられます。

ここで、時刻ｔにおける直物為替レートをs_t，外国為替市場に参加している市場関係者の主観的為替レートを${}_{t-2}s_t^e$とします。すなわち１ヶ月前に市場関係者が今期の直物為替レートをどう予想していたかを示しています。２期先予測誤差の系列を$e_t(2)=s_t-{}_{t-2}s_t^e$を図5.1に示しました。一見してわかるように強い系列相関が観察されています。さてこの予測誤差系列$e_t(2)$より標本自己相関関数（ＡＣＦ）及び標本偏自己相関関数（ＰＡＣＦ）を計算した結果を図5.2と図5.3に示しておきます。推定値を標準誤差の推定値で割った値をｔ値として計算しますと標本ＡＣＦは１次のみ有意、標本ＰＡＣＦは１次～３次が比較的大きいことがわかりました。

さて、期待仮説に関する１節と２節の議論から合理的期待形成仮説が成立していれば２期先予測誤差$e_t(2)$はＭＡ(1)過程にしたがうはずです。そこで$e_t(2)$に対してＭＡ(1)過程をフィットした結果を次に示します。

$$(5.1) \qquad e_t(2) = \varepsilon_t + 0.86819\varepsilon_{t-1}, \quad R^2 = 0.487$$
$$(0.0594)$$

ここでカッコの内は標準誤差の推定値です。したがって1次のMA項の係数推定値についてのt値は14.62となって有意になっていることがわかります。さて、予測誤差系列$e_t(2)$に対してMA(1)過程をフィットした残差系列から標本ACFを計算できます。この残差系列から計算されたQ統計量は以下のようになりました。

＜Q統計量＞

	1	2	3	4	5
標本ACF	0.08435	0.06328	-0.16605	0.01924	0.10415
統計量	0.38085	0.60113	2.11279	2.15477	2.78155
	6	7	8	9	10
標本ACF	0.12050	0.02431	0.05290	0.08132	-0.06384
統計量	3.62821	3.70004	3.90034	4.32673	4.61327

もし真の確率過程がMA(1)過程であればこの残差系列はほぼホワイト・ノイズ過程となるはずです。計算された統計量の数値はこの残差系列はほぼホワイト・ノイズ系列と考えられることを示しています。以上の分析から合理的期待形成仮説とデータが整合的であったことを示唆しているようです。もし外挿的期待形成や適合的期待形成が正しければ1節の議論よりAR型の誤差項が存在するはずですが、上の図から明らかなように自己相関と偏自己相関ともにAR項の存在には否定的のようです。また、念のため低次の自己回帰モデルをあてはめてみましたが残差はホワイト・ノイズ過程とはなりにくいことがわかりました。以上の結果は本分析者にとっても驚きでしたが、為替市場のような状況では市場参加者は短期的に"系統的な誤り"を修正することはある程度納得できるかもしれません。

ところで、期待の合理性を検定する為にw_tを誤差項とする回帰モデル

$$(5.2) \qquad s_t = \alpha + \beta_{t-2} s_t^e + w_t$$

を考えて、仮説H_0：$\alpha=0$，$\beta=1$に対するF統計量を用いて検定することがしばしば実証分析で行われています。例えば豊田(1979)はカール・パーキン法にもとづいて作成した期待物価系列を用いて行った仮説H_0の検定を合理的期待仮説の統計的検定と呼んでいます。しかしながら1節の議論から明らかなように外挿的期待仮説や適合的期待仮説の下であってもH_0が成立することはありえないことではありません。またこの方法では合理的期待仮説の下ではv_t～MA(1)過程となりますが対立仮説の時系列構造をどのように特定すべきか、あるいは非定常性をどの様に扱うかなどについてはっきりとした基準を考えることが難しいように思われます。

＜図5.1～図5.3が入る＞

<参考文献>

Azariadis, Costas (1981), Self-Fulfilling Prophecies, Journal of Economic Theory, 25,380-396.

Begg, David (1982), The Rational Expectations Revolution in Macroeconomics : Theories and Evidence, Phillips Allen.

Blanchard, Oliver and Mark Watson (1982), "Rational Expectations, Bubbles and Financial Markets," in P.Wachtel ed., Crises in the Economic and Financial Structure, Lexington Press.

Cagan, P. (1956), "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," in M.Friedman ed., Studies in the Quantity Theory of Money, University of Chicago Press.

Cass, David and Karl Shell, (1983), "Do Sunspots Matter?," Journal of Political Economy, 91, 193-227.

Chow, G. (1983), Econometrics, New York, McGraw Hill.

Dornbusch, R. (1976), "Expectations and Exchange Rate Dynamics," Journal of Political Economy, 84, 1161-76.

Engle, Robert F. and Granger, C.W.J. (1987), "Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation, and Testing" , Econometrica, 55, 251-276.

Fair, R. C. and Taylor, J.B. (1983), "Solution and Maximum Likelihood Estimation of Dynamic Nonlinear Rational Expectation Models," Econometrica, 51, 1169-1185.

Friedman, M. (1957), A Theory of the Consumption Function, Princeton University Press.

Flood, R.P. and P.M. Garber (1980),"Market Foundamentals versus Price-Level Bubbles: The First Tests," Journal of Political Economy, 88, 745-770.

Keynes, J.M. (1936), The General Theory of Employment, Interest and Money, Macmillan.

Kunitomo, Naoto and Yamamoto, Taku (1986), "On Incoherency of Testing

Rational Expectation Hypotheses by Vector Autoregressive Models," Discussion Paper F-86-5, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Lucas, Robert (1973), "Some International Evidence on Output-Inflation Tadeoffs", American Economic Review, 6, 326-34.

McCallum, Bennett (1983), "On Non-Uniqueness in Rational Expctations: An Attempt at Perspective," Journal of Monetary Economics, 11, 139-168.

Muth, J.F. (1961), "Rational Expectations and the Theory of Price Movements" , Econometrica, 29, 315-335.

Nerlove Marc (1958), "Adaptive Expectation and Cobweb Phenomena," Quarterly Jounal of Economics, 72, 227-40.

Taylor, J.B. (1977), "Conditions for Unique Solutions in Stochastic Macroeconomic Models with Rational Expectations," Econometrica, 45, 1377-1385.

Taylor, J.B. (1979), "Estimation ad Control of a Macroeconomic Models with Rational Expectations," Econometrica, 47, 1267-1286.

Taylor, J.B. (1980), "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts", Journal of Political Economy, 88, 1-23.

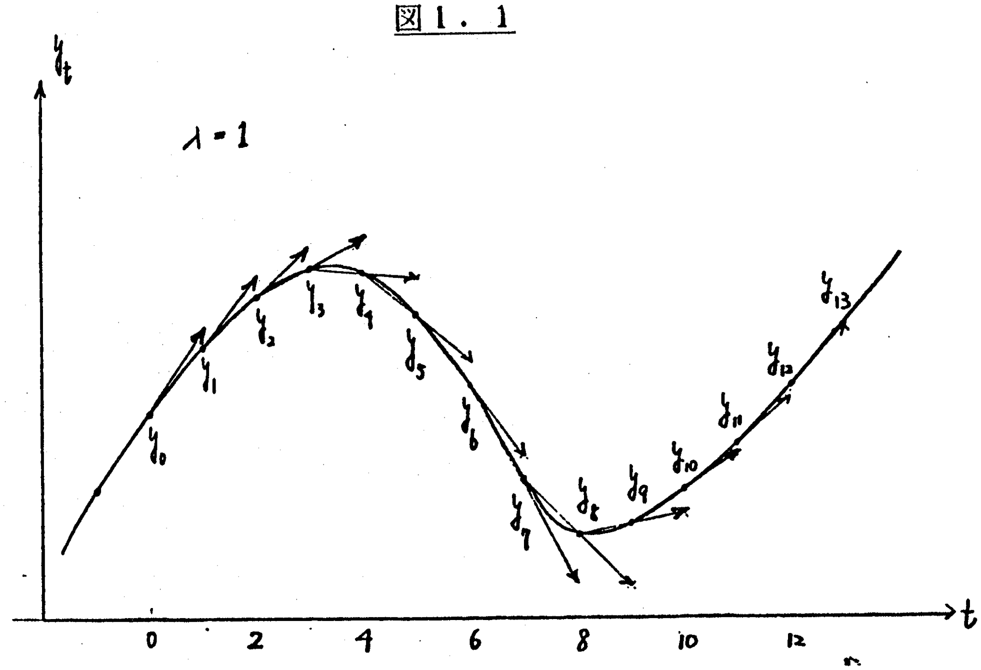
Taylor, J.B. (1986), "New Econometric Approaches to Stabilization Policy in Stochastic Models of Macroeconomic Fluctuations" , Handbook of Econometrics Vol.Ⅲ, Z.Griliches and M.D.Intriligator ed., Elsevier Science Publisher.

翁邦雄 (1985),「期待と投機の経済分析」, 東洋経済。

豊田利久 (1979), "大インフレーション期における期待の形成," 季刊理論経済学, 193-201。

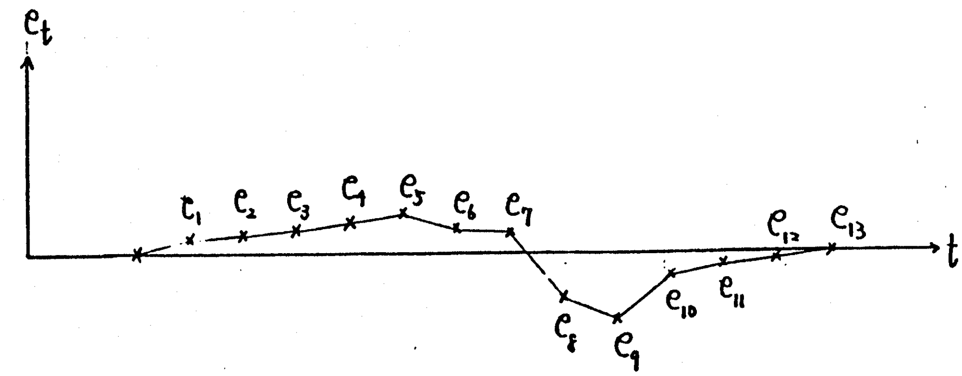
山本拓 (1987),「経済の時系列分析」, 創文社。

図１．１



y_t
$\lambda = 1$
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8
y_9
y_{10}
y_{11}
y_{12}
y_{13}
0
2
4
6
8
10
12
t

図１．２



e_t
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
t

図1．3

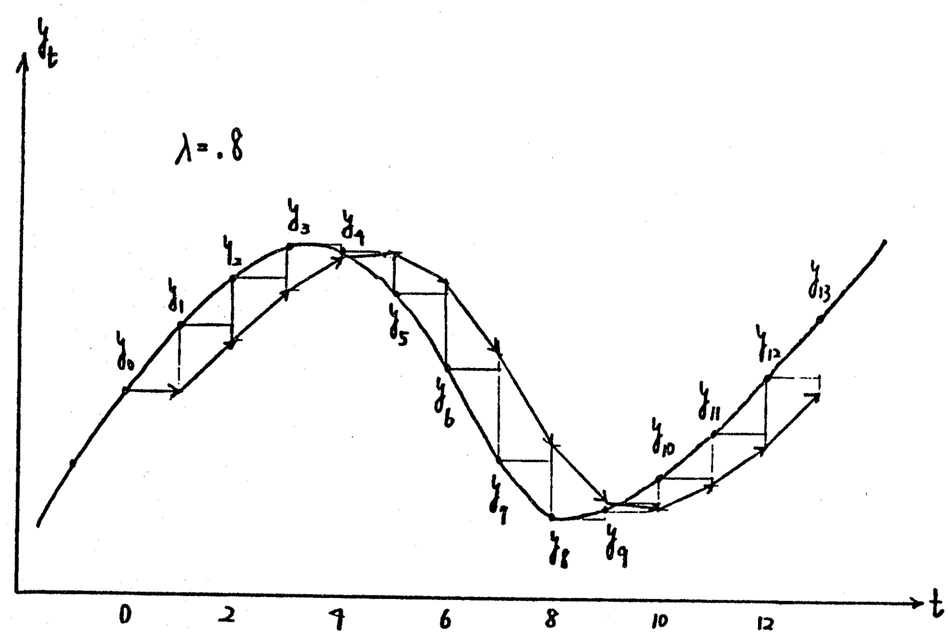

y_t
$\lambda = .8$
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_8
y_9
y_{10}
y_{11}
y_{12}
y_{13}
0
2
4
6
8
10
12
t

図1．4

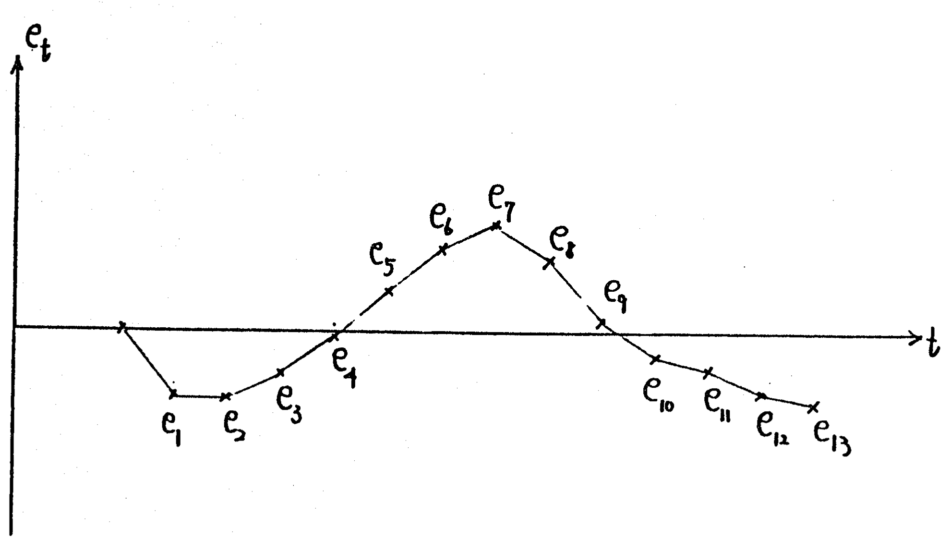

e_t
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
t

図2．1

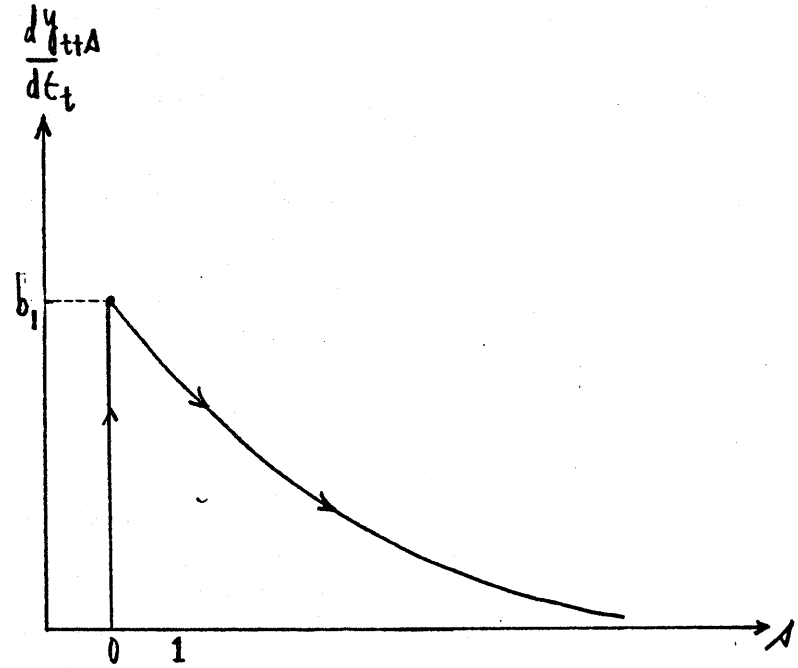

$\frac{dy_{t+\Delta}}{d\epsilon_t}$
b_1
0
1
Δ

図2．2

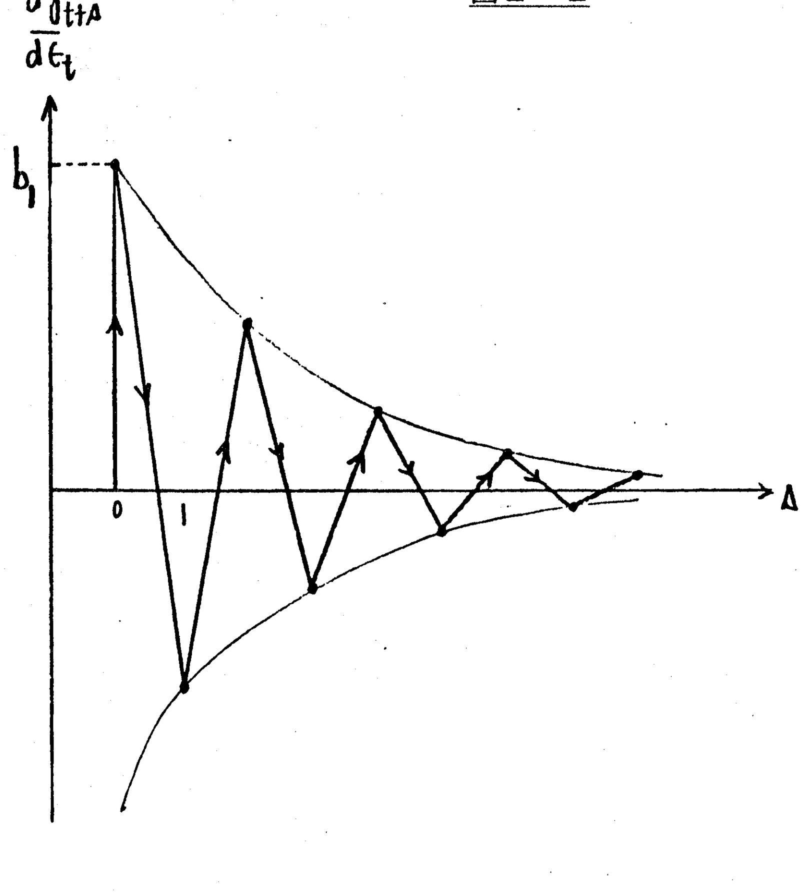
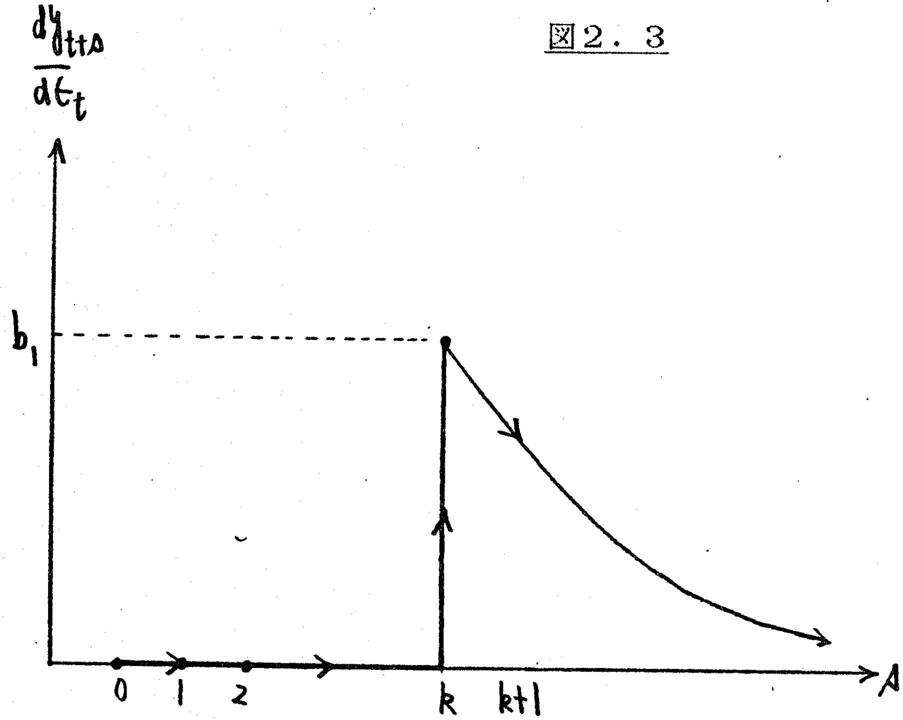
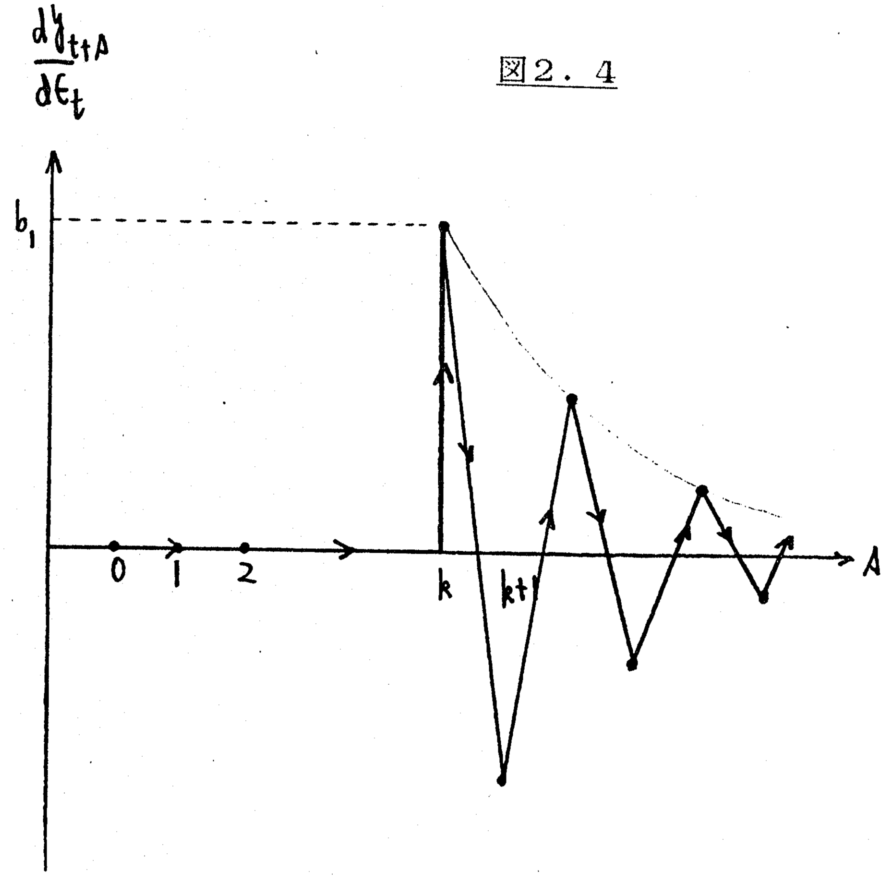

$\frac{dy_{t+\Delta}}{d\epsilon_t}$
b_1
0
1
Δ

図2．3



$\frac{dy_{t+s}}{d\epsilon_t}$
b_1
0
1
2
k
k+1
s

図2．4



$\frac{dy_{t+s}}{d\epsilon_t}$
b_1
0
1
2
k
k+1
s

図２．５

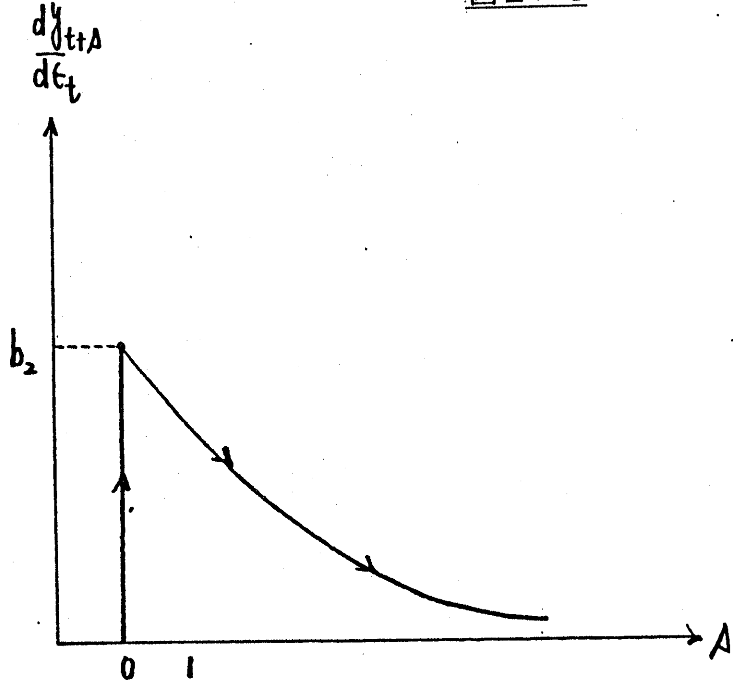


図２．６

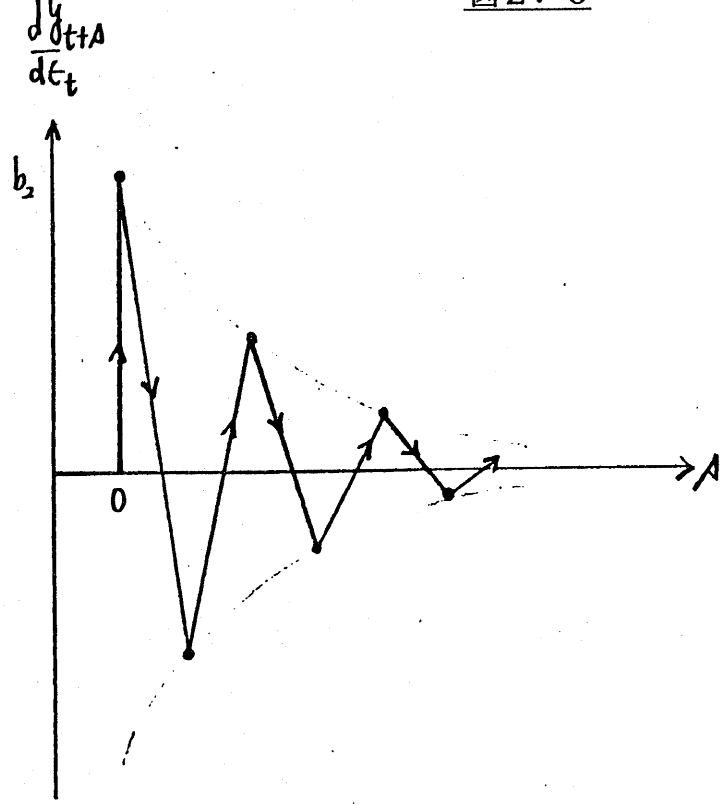


図2．7図

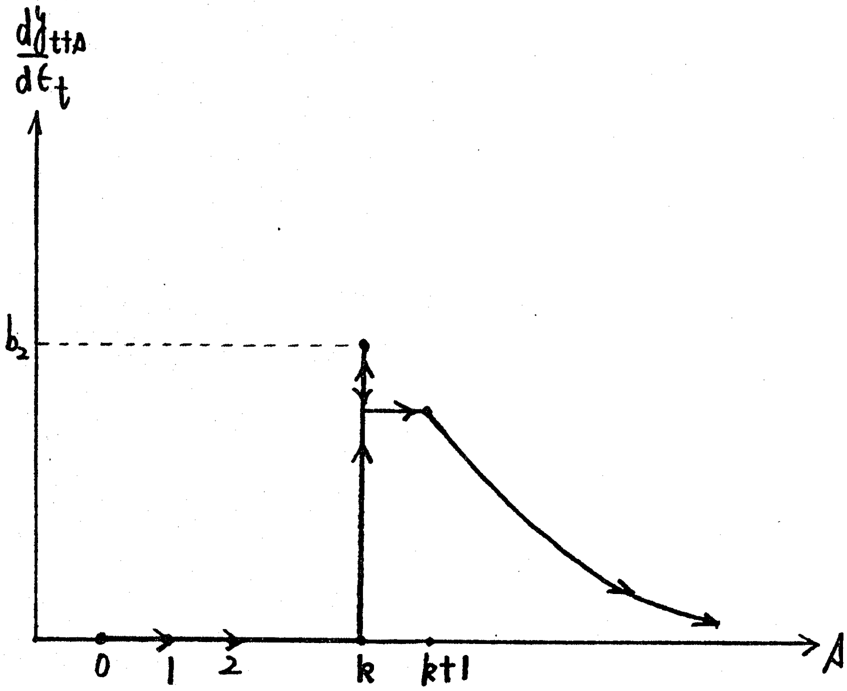
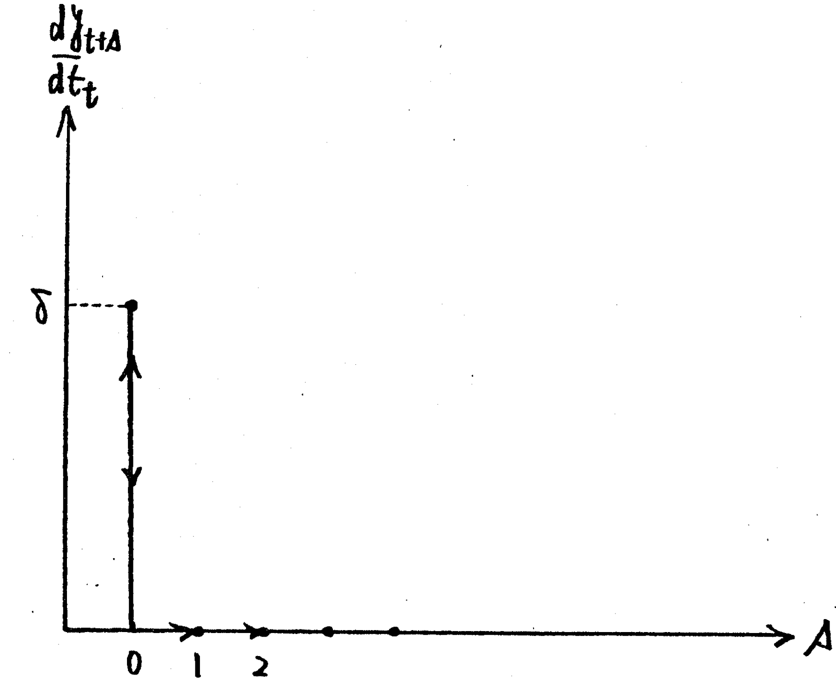
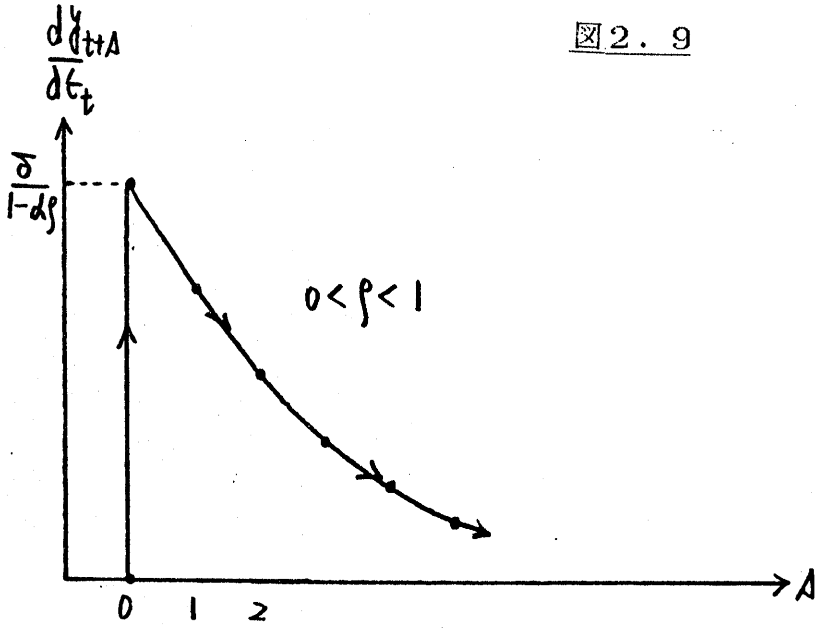


図2．8



$\frac{dy_{t+A}}{dt_t}$
δ
0
1
2
A

図2．9



$\frac{dy_{t+A}}{dt_t}$
$\frac{\delta}{1-\alpha\rho}$
$0<\rho<1$
0
1
2
A

図2．10

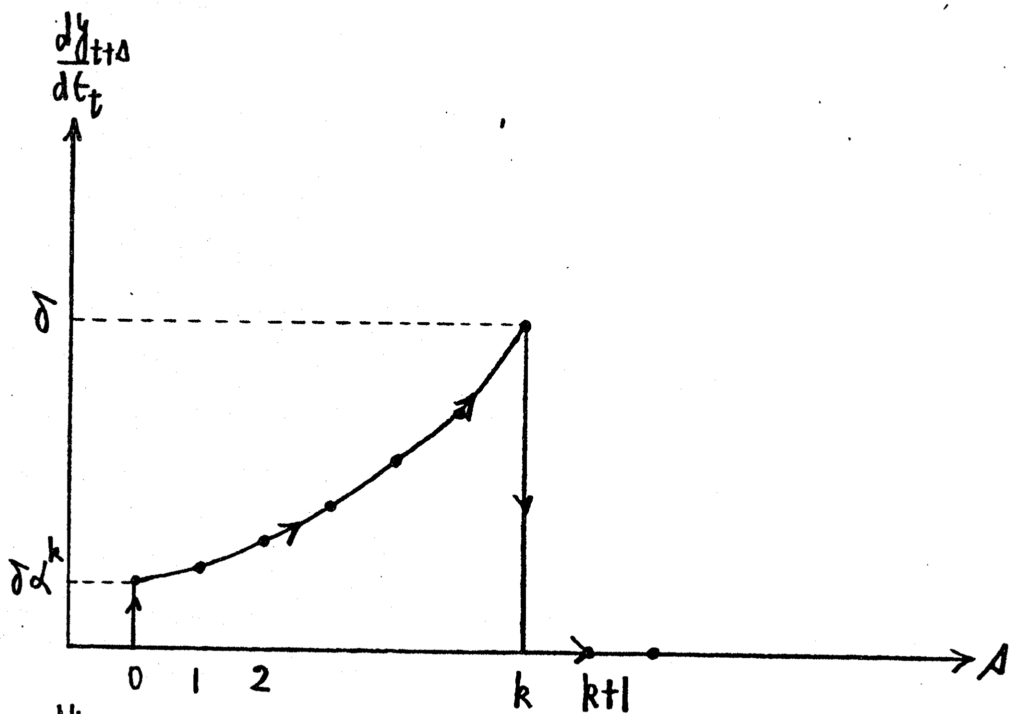


図2．11

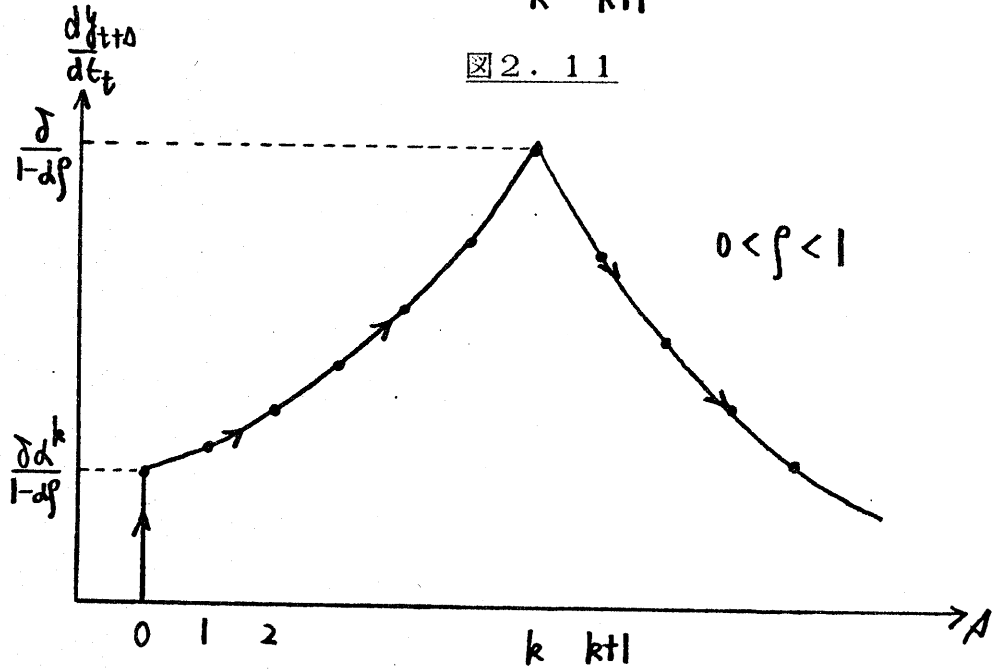
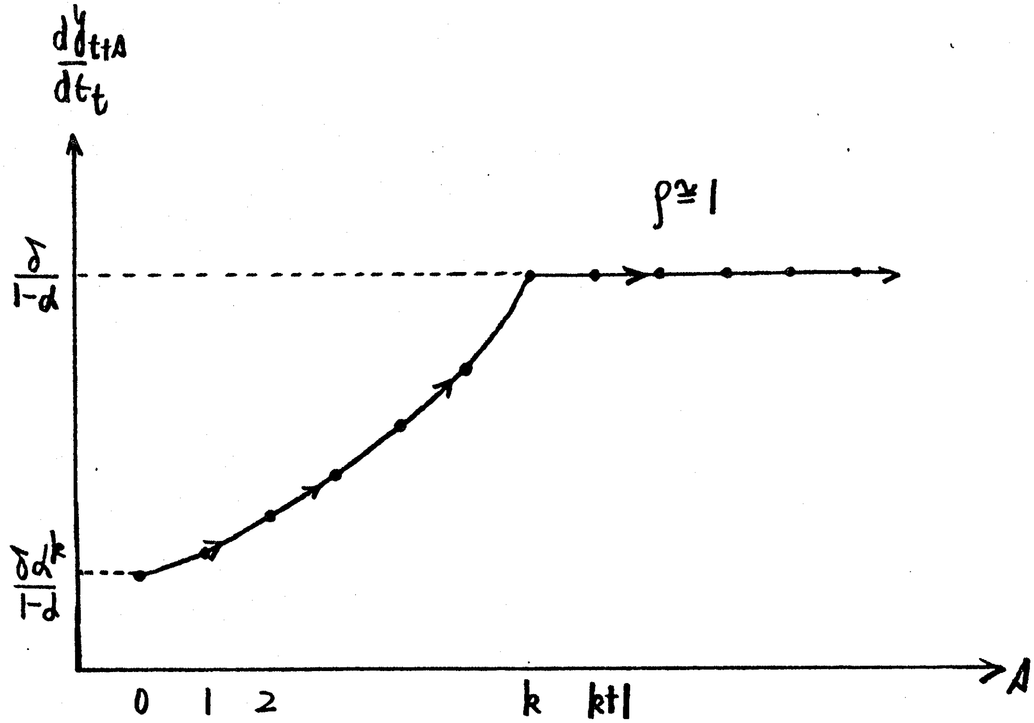


図２．１２



$\frac{dy_{t+A}}{dt_t}$
$\rho \cong 1$
$\frac{\delta}{1-\alpha}$
$\frac{\delta\alpha^k}{1-\alpha}$
0
1
2
k
k+1
A

図3．1

series of X_t (α=.9)

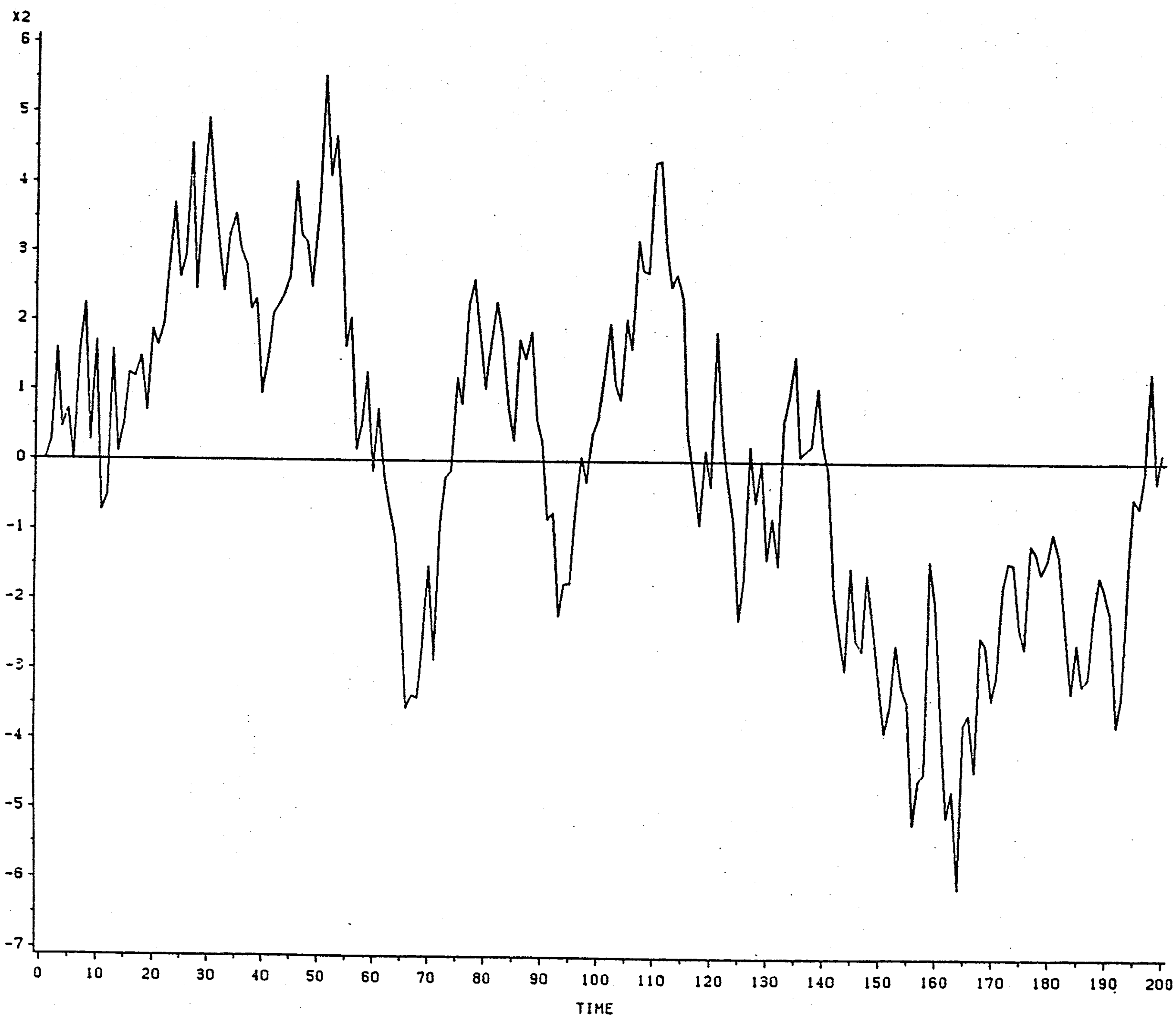


図3．2

series of Y_t (π=.95, r=.10)

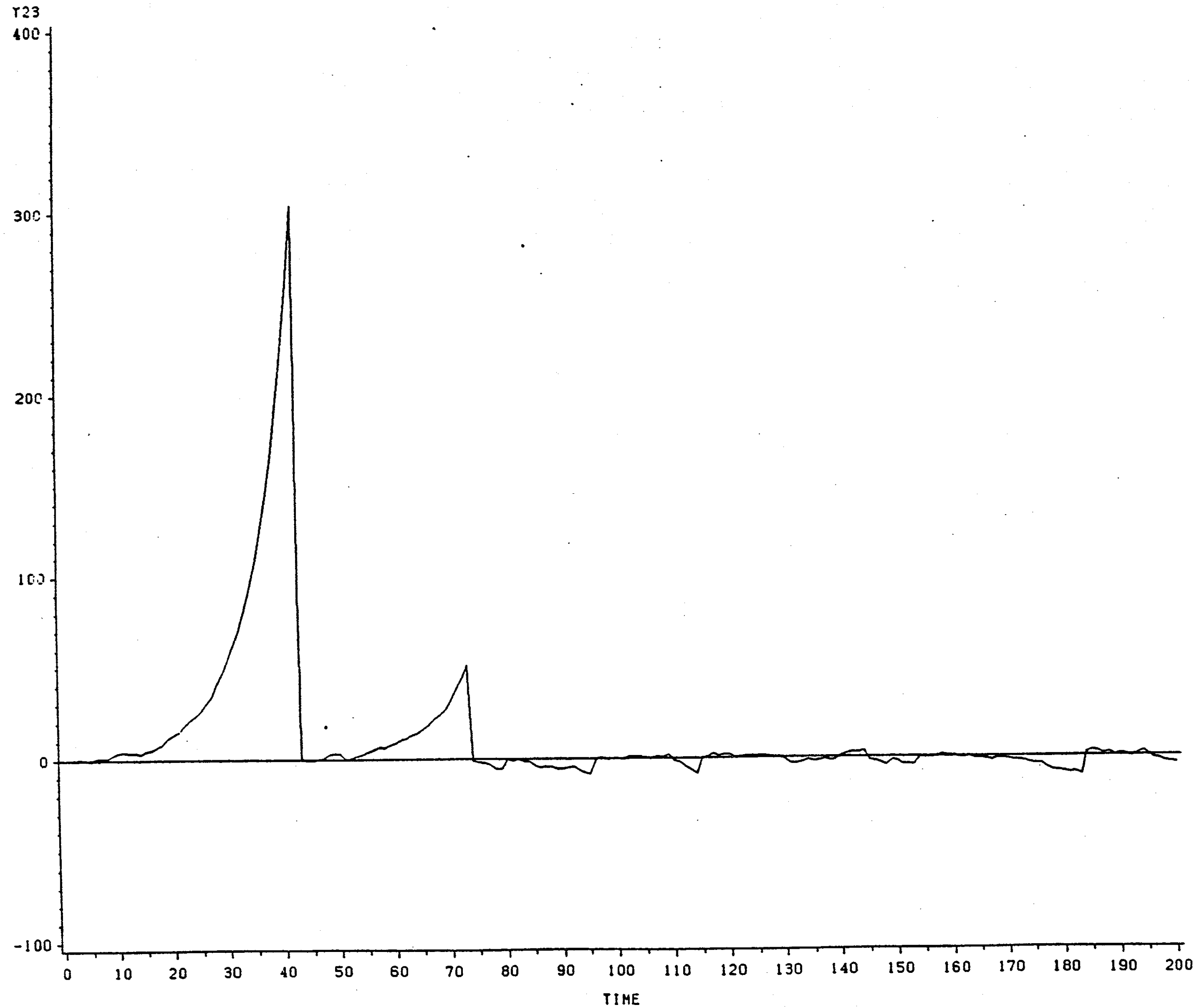


図3．3

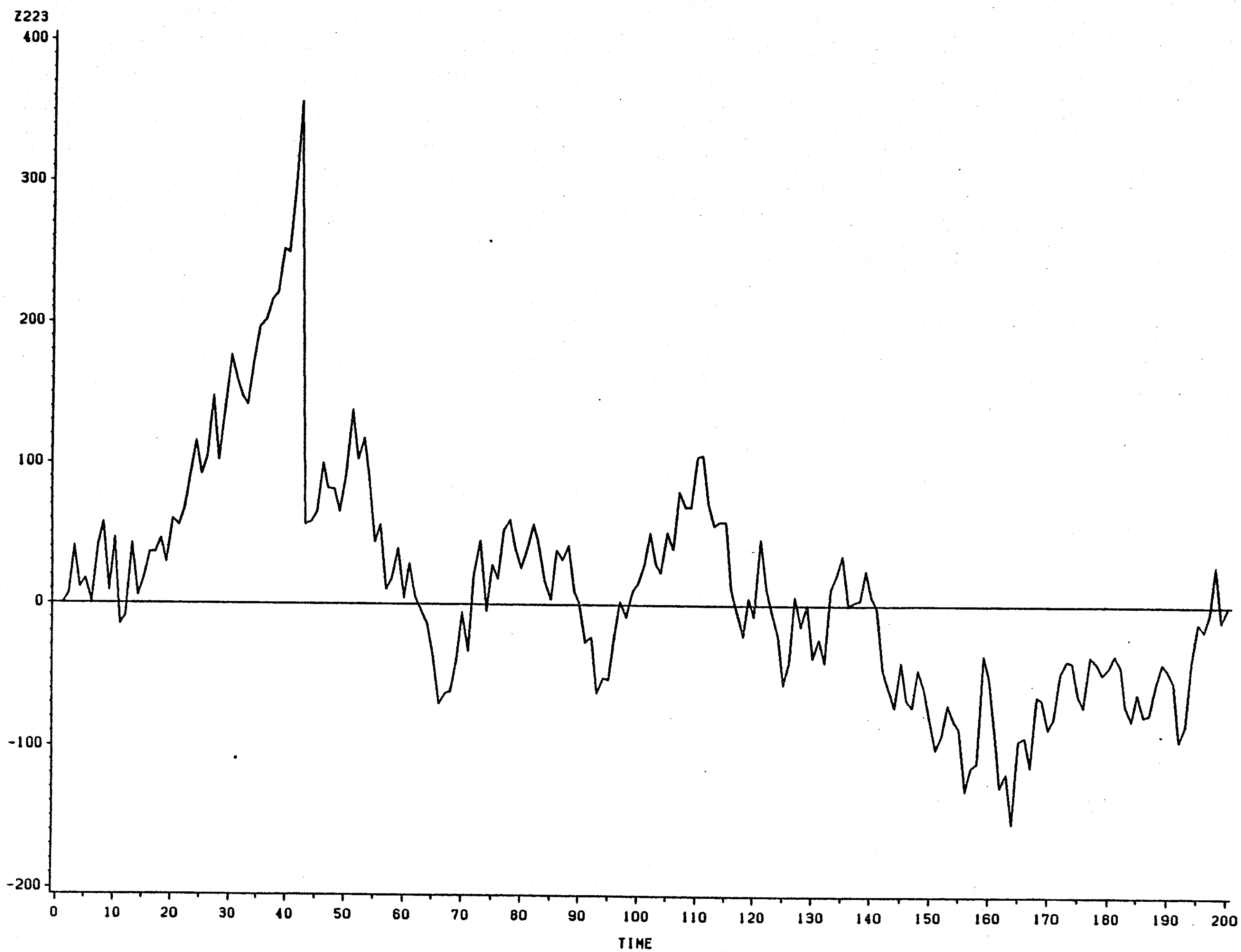

Z223
400
300
200
100
0
-100
-200
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
TIME

図３．４

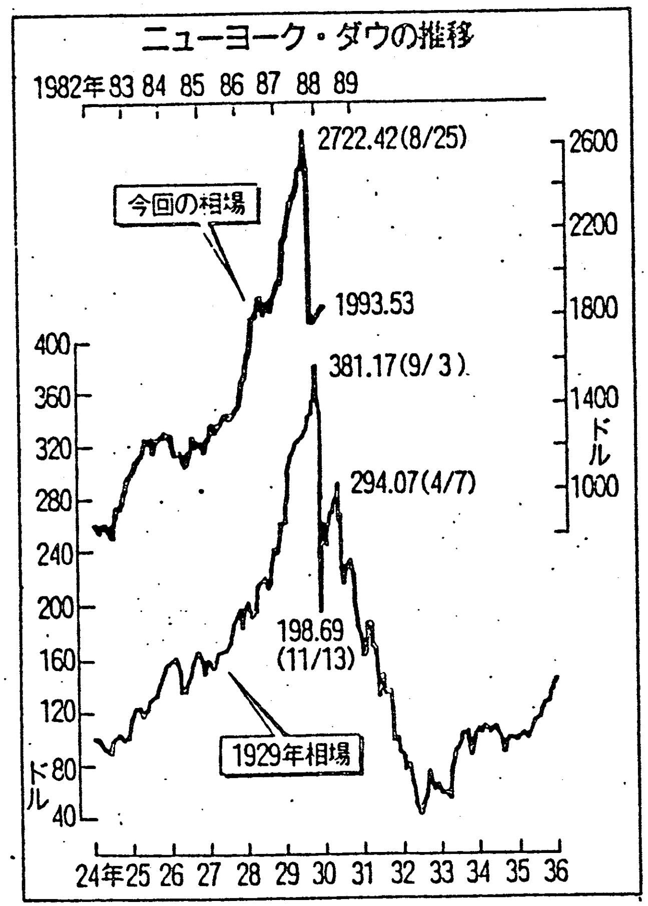

ニューヨーク・ダウの推移
1982年 83 84 85 86 87 88 89
2722.42(8/25)
今回の相場
1993.53
381.17(9/3)
294.07(4/7)
198.69
(11/13)
1929年相場
2600
2200
1800
1400
1000
ドル
400
360
320
280
240
200
160
120
80
40
ドル
24年 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

図3. 5

series of X_t (α=1.0)

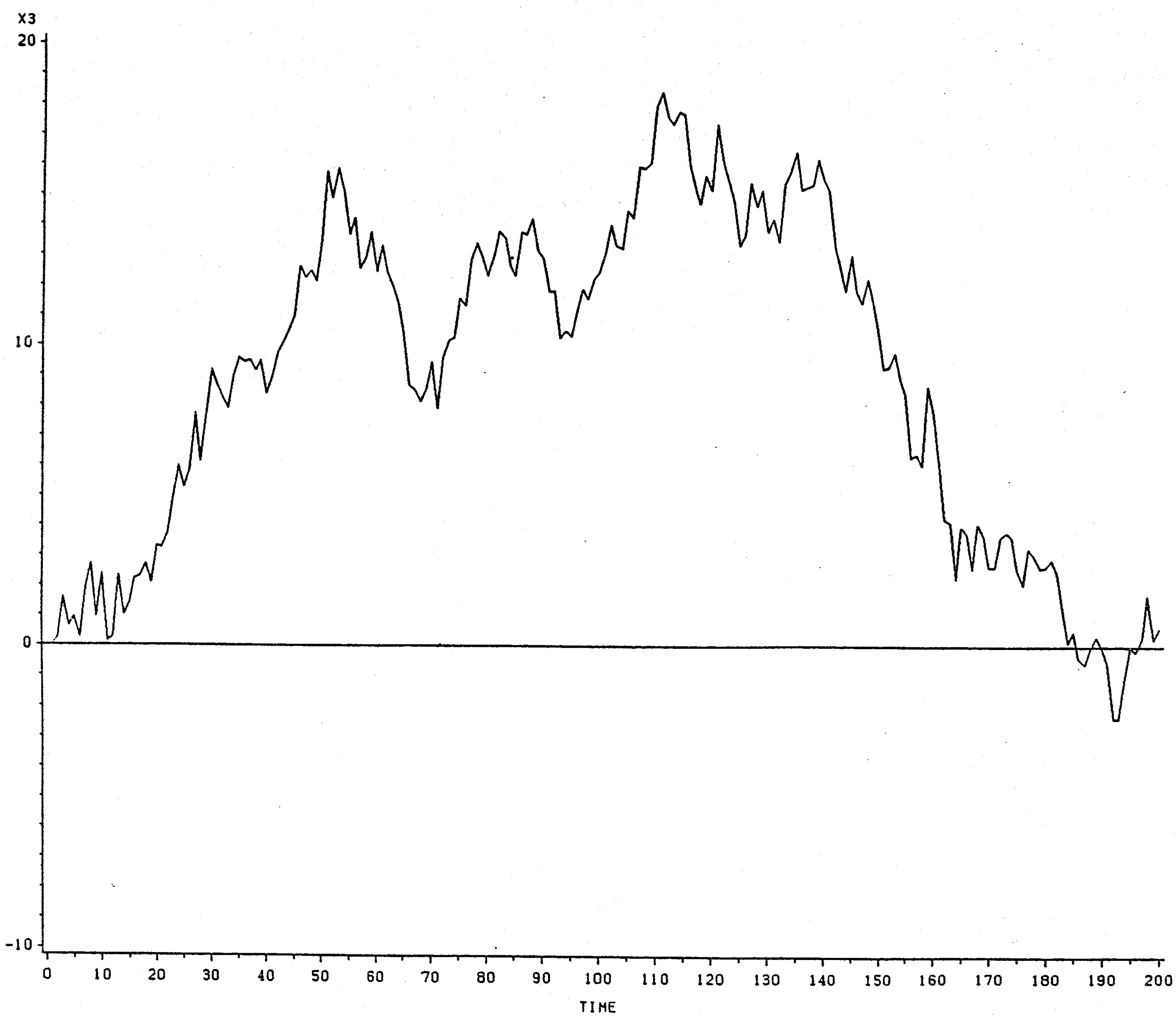
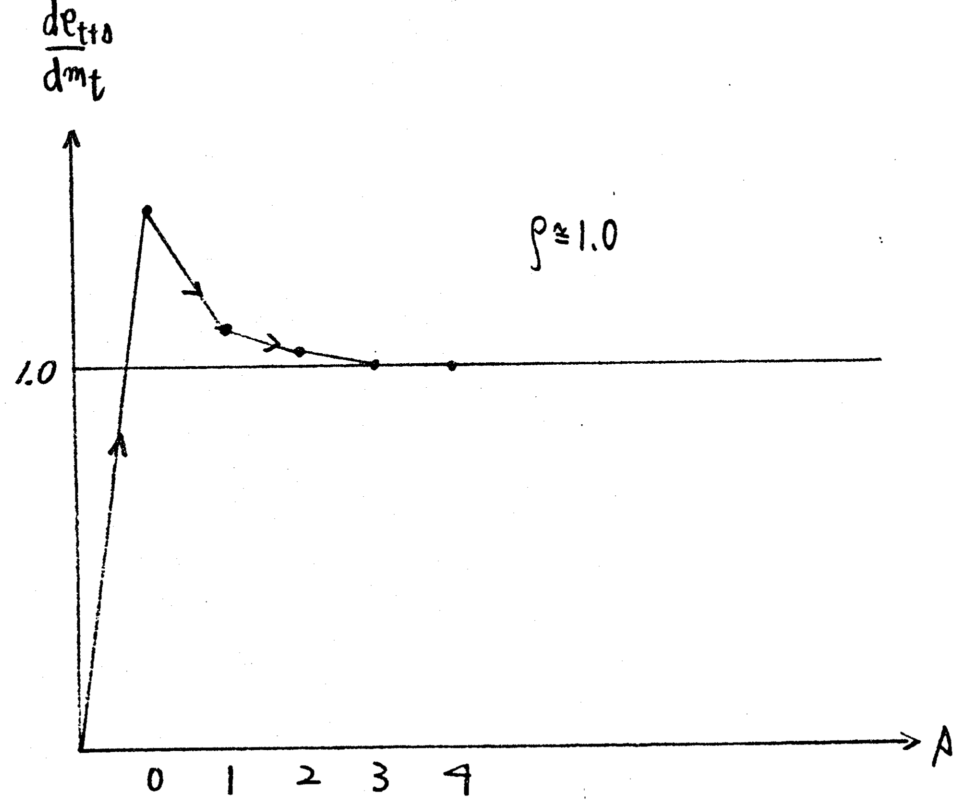
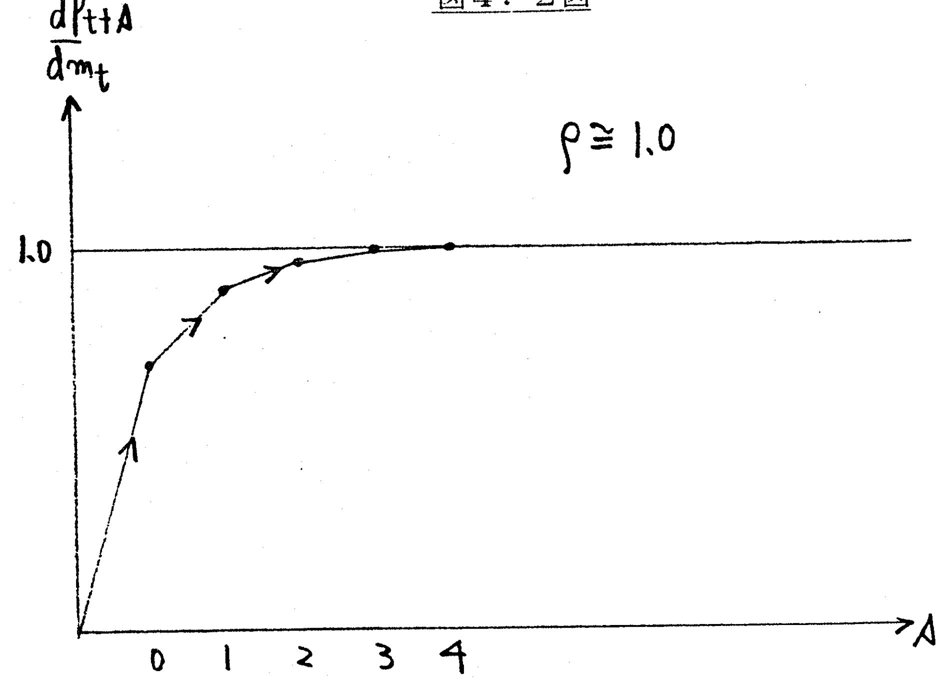


図4．1



$\frac{de_{t+A}}{dm_t}$
$\rho \cong 1.0$
1.0
0
1
2
3
4
A

図4．2図



$\frac{dp_{t+A}}{dm_t}$
$\rho \cong 1.0$
1.0
0
1
2
3
4
A

図4．3

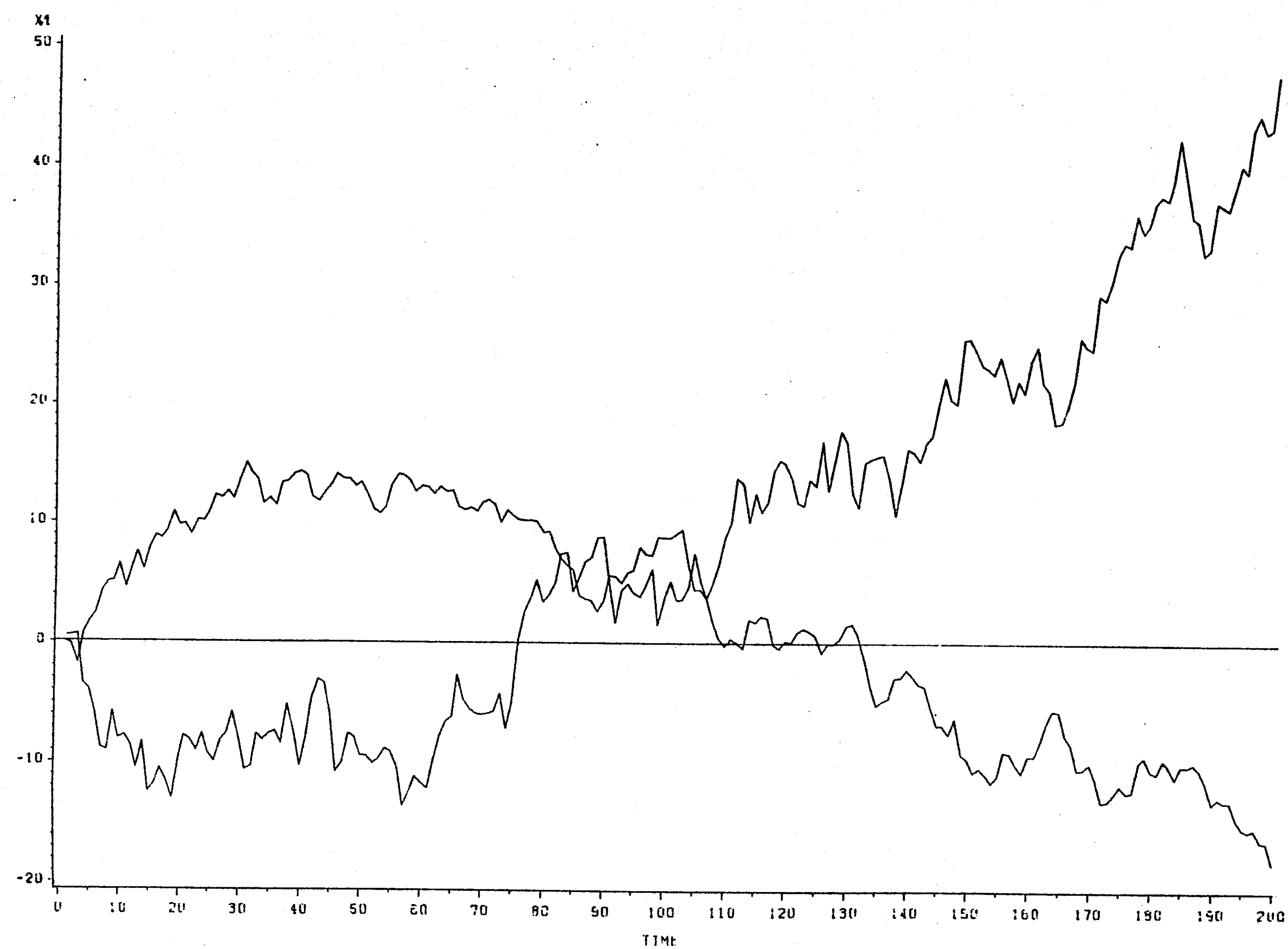

X1
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
TIME

図4．4

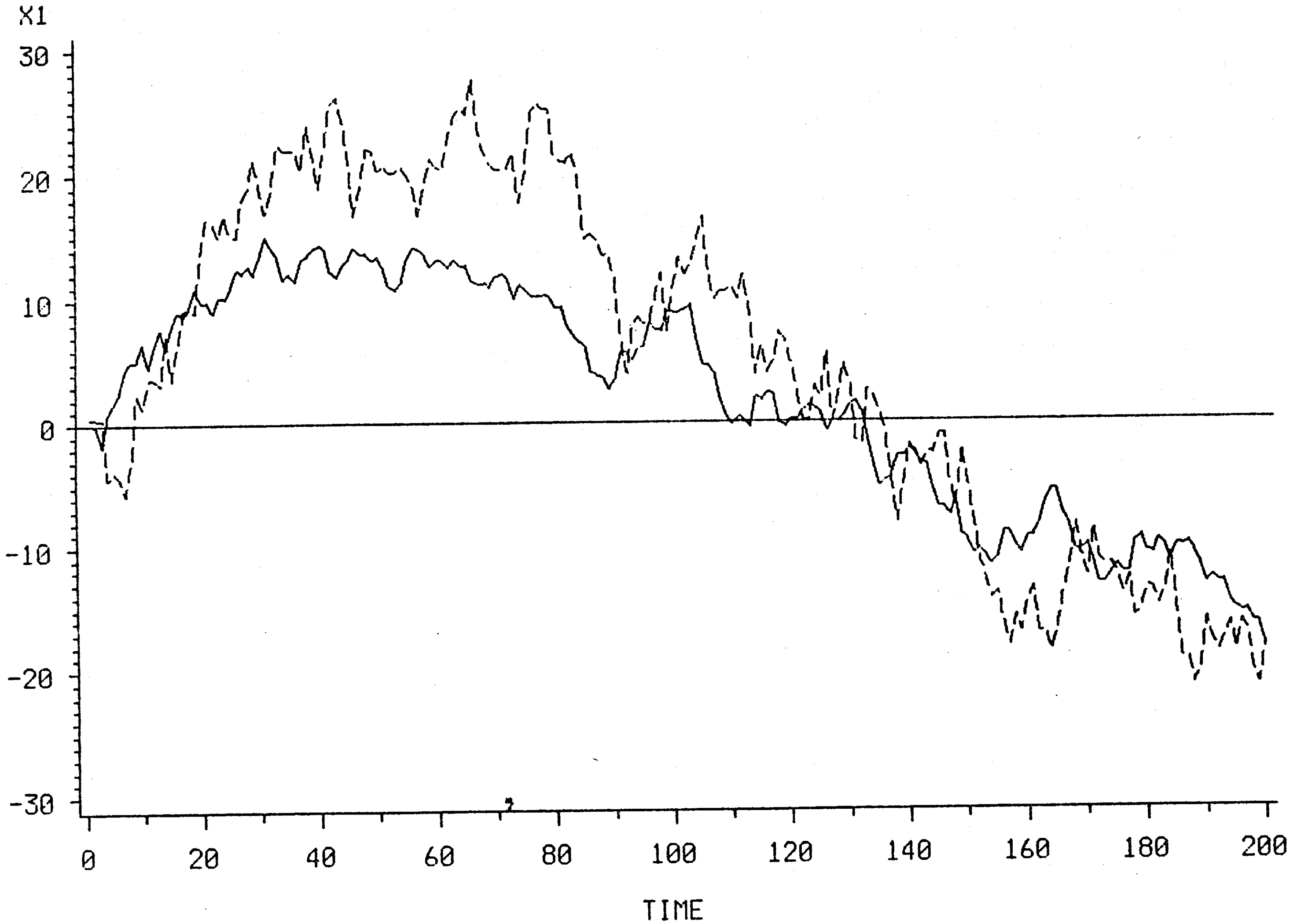


図5．1

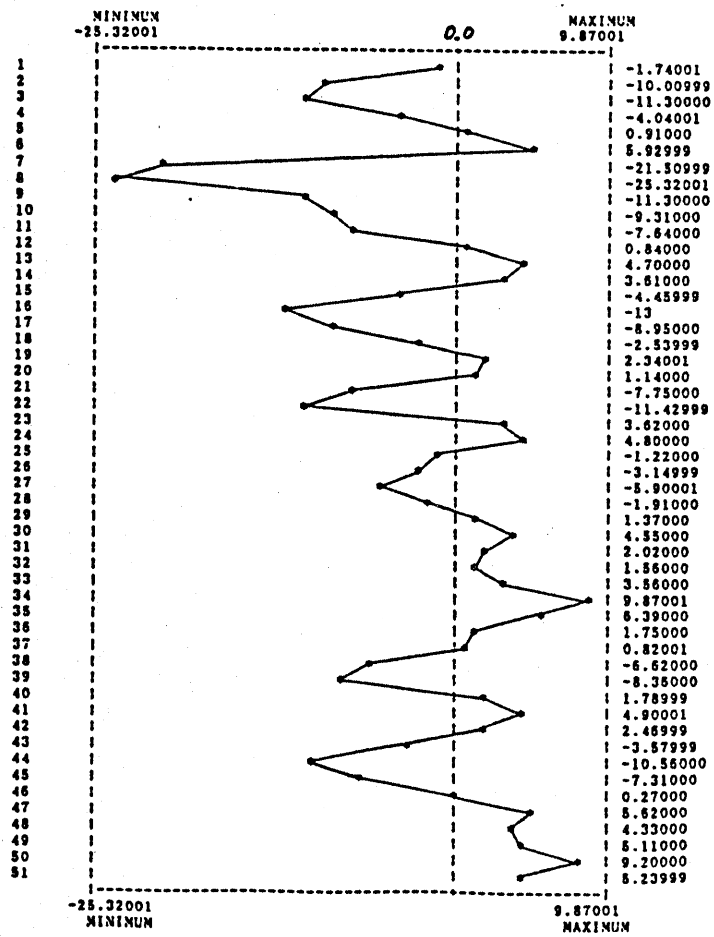
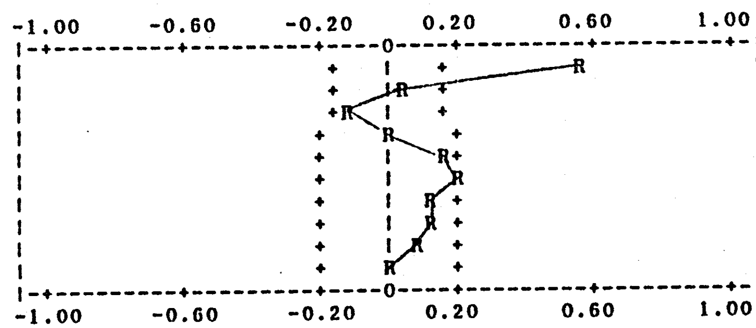
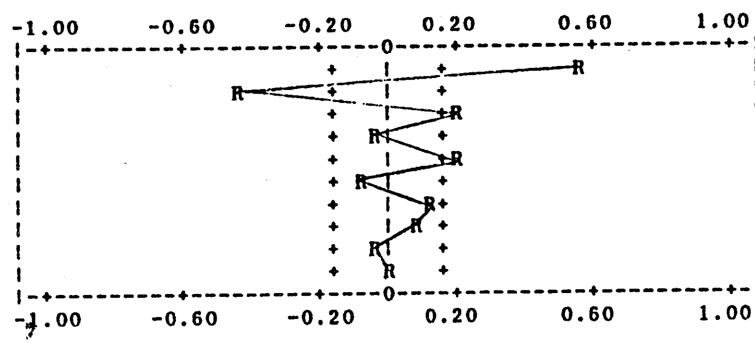

MINIMUM
-25.32001
0.0
MAXIMUM
9.87001
1 -1.74001
2 -10.00999
3 -11.30000
4 -4.04001
5 0.91000
6 5.92999
7 -21.50999
8 -25.32001
9 -11.30000
10 -9.31000
11 -7.64000
12 0.84000
13 4.70000
14 3.61000
15 -4.45999
16 -13
17 -8.95000
18 -2.53999
19 2.34001
20 1.14000
21 -7.75000
22 -11.42999
23 3.62000
24 4.80000
25 -1.22000
26 -3.14999
27 -5.90001
28 -1.91000
29 1.37000
30 4.35000
31 2.02000
32 1.56000
33 3.56000
34 9.87001
35 6.39000
36 1.75000
37 0.82001
38 -6.62000
39 -8.36000
40 1.78999
41 4.90001
42 2.46999
43 -3.57999
44 -10.56000
45 -7.31000
46 0.27000
47 5.62000
48 4.33000
49 5.11000
50 9.20000
51 5.23999
-25.32001
MINIMUM
9.87001
MAXIMUM

図5．2



Lag	ACF	t
1	0.567	4.050
2	0.022	0.123
3	-0.118	-0.656
4	-0.016	-0.086
5	0.151	0.834
6	0.181	0.989

Figure 5.3



Lag	PACF	t
1	0.567	4.050
2	-3.150	1.486
3	-0.025	-0.179
4	0.193	1.379
5	-0.062	-0.444
6		