90-J-12

平均オプション価格の評価法

(Pricing Average Options)

国友直人

(東京大学経済学部)

高橋明彦

(日本興業銀行)

1990年11月

この研究は所属する日本興業銀行の活動及び見解とは無関係であり、ありうべき責任は個人に帰すべきことをお断りする。

1. はじめに

日本の金融市場が国際化して発展を続けている中でさまざまな新しい金融商品が登場してきた．こうした金融商品の代表的なものとしてオプション契約を挙げることができるが，オプション市場が整備されるとともに近年ではさまざまなオプション契約の取り引きが活発に行われるようになっている．通常のオプション契約では権利行使時におけるペイ・オフはその時点において対象としている資産の価格水準によって一意的に決定している．したがって，その場合にはオプション契約の時点から権利行使の時点まで対象とする資産価格がどのような経路をとって変動するかは直接のペイ・オフに関係しないことになる．一方，外国為替市場では様々な理由で権利行使時におけるペイ・オフが資産価格が過去にとる履歴に依存するようなオプション契約が盛んに取り引きされるようになっている．このように権利行使時におけるペイオフが資産価格が過去にとる履歴に依存するようなオプション契約は一般に経路依存型オプション契約（path dependent options）と呼ばれている．この種のオプションとしては例えば評価価格や権利行使価格がオプション契約中の資産価格の最大値や最小値とするオプション契約やあるいは契約中の資産価格の平均値などを用いるオプション契約などを挙げることができる．経路依存型オプションの中でも特に原資産や権利行使価格がオプション契約中の平均値となる契約は平均オプション（Average Option），あるいはアジア型オプション契約（Asian Options）と呼ばれているが，近年においてＯＴＣ（相対取引）の形で活発に取り引きが行われている．こうしたオプション契約の取り引きの経済的背景としては近年における外国為替レートに係わる不確実性が増していることが挙げられる．例えば輸出入などの実需にもとづいて外国為替市場に参加し，外国為替取り引きを行っている企業は為替の乱高下にともなって生じるリスクを抑えるために外国為替レートの平均値を指標とするオプション契約に対する需要が大きいことなどの要因を挙げることができる．またこの種のオプション契約は仕上がりレートが期間中の平均レートよりやや低いレートで満足する企業，仕入れ価格を期間の平均価格で決定する企業，あるいは日次・週次などで均等に為替予約を締結している企業などにとっても比較的魅力的な契約となっているようである．

さて，オプション価格理論の立場から見ると経路依存型オプションの評価問題についてはこれまでに既に若干の研究が行われている．例えば原資産や権利行使価格がオプション契約中の資産価格の最大値や最小値となる場合についてはGoldman=Sosin=Gatto (1979) がオプション契約の理論価格を導いている．また，平均オプション（Average Option）については最近 Bergmann (1985)及び Carverhill and Clewlow (1990) などが研究を行っている．しかしながら平均オプション価格の評価については理論上なお若干の未解決の問題が存在するように思われる．オプション契約の価格評価では原資産の価格が幾何ブラウン運動にしたがうと考えるのが標準的であるが，権利行使時における評価価格や権利行使価

格がオプション契約中の資産価格の算術平均値（arithmetic mean）である場合には一般的に厳密な理論価格の公式を導出することは困難である．Bergman(1985)はこの問題を検討しているが彼の導いた理論価格は権利行使価格がゼロとなる現実的でない特殊な場合に限られている．また Ingersoll(1987) の教科書ではあたかも平均オプションの理論価格が明示的に導出可能かのように説明しているがこれは誤解であろう．

算術平均にもとづく平均オプション契約については一般には明示的に理論価格を求めることが困難であるが，この問題に対するもう一つのアプローチとして数値的にオプション価格を求めることが考えられる．例えば，オプション価格の満たすべき偏微分方程式がオプション契約の一般理論から導くことができるので（例えば Ingersoll(1987),377ページあるいは本稿第５節を参照），与えられた境界条件の下でよく知られた数値計算法，例えば有限要素法（Finite Difference Method）を用いて近似的に解を求めることが考えられよう．その他，さらに最近になって，Carverhill=Clewlow（1990）は高速フーリエ変換（ＦＦＴ）法にもとづく畳み込み（Convolution）を繰り返す数値的解法を提案している．ここで彼らの方法を"畳み込み法"と呼ぶことにするが，平均オプション価格の厳密な数値を直接求める方法として実務界においても注目を浴びている．

しかしながら，このようなこれまでに提案されている数値計算法についてもその方法を子細に検討してみるとなお実際的問題が存在することを指摘することができる．例えば畳み込み法においては価格の算術平均の分布を求める為には高速フーリエ変換による畳み込みを数多く計算する必要がある．この畳み込みの計算は極めて複雑な数値計算を行うことになるので，この計算を実用上に十分なほど多くの回数を行うと単に計算時間が長くなるばかりでなく計算誤差がかなり大きくなることが予想される．ここで Carverhill=Clewlow（1990）が説明している方法を用いて我々が行った数値計算にもとづく実験結果の１つを表１に示しておこう．

表　1

平均をとる回数	5	10	80	126	252
ＦＦＴによる期待値	148.141	148.205	147.130	146.305	144.164
（理論値）	148.213	148.361	148.491	148.498	148.504
ＦＦＴによる分散	96.596	84.659	76.799	79.332	92.807
（理論値）	96.576	84.603	74.703	74.202	73.767

この表１は資産価格が幾何ブラウン運動にしたがっていると仮定したとき価格の和の分布の平均と分散を高速フーリエ変換にもとづく畳み込み法によって計算した結果をそれぞれ平均と分散の理論値と比較したものである．ただし，ここで理論値とは本稿の第３節で導出した公式を用いて計算していることに注意しておこう．表１からこの畳み込み法で計算した平均と分散は平均をとる回数が少ない

場合，例えば5回や10回程度では計算精度が高いことを見て取ることができる．他方，平均をとる回数を多くするとその誤差は無視できないほど大きくなることを観察することができよう．80回以上の平均では数値計算上の累積誤差が大きくなっている．したがって，オプション契約の理論価格を計算する際，単位期間を短くとって計算精度を挙げようとしたり，また比較的長い期間にわたってオプション契約を設定したりする場合には深刻な問題を引き起こすことが予想される．

本稿においては平均オプション契約の理論価格を計算する実用的な方法を提案する．予め，ここで提案する方法の概要をまとめると以下の通りである．
まず平均オプション契約の中でも幾何平均にもとづくオプション契約に注目する．算術平均にもとづくオプション契約の場合とは異なり，実は幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格の場合には明示的な形を求めることができる．これは原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがう場合には価格の幾何平均は対数正規分布にしたがうことの結果である．そこで我々はこの理論価格を次のように利用する．すなわち，中心極限定理を利用してボラティリティ母数が小さいとき価格の算術平均が対数正規分布で近似できることを証明する．このことから価格の算術平均の分布関数を近似するにはその平均と分散を近似すればよいことになる．すなわち，幾何平均の分布の平均と分散から算術平均の近似分布を求めることができるのである．ヨーロッパ型のオプション契約の場合には権利行使時刻における資産価格の近似分布を求めることができれば，リスク中立化法（Risk Neutralized Method）を用いることにより契約の理論価格を導くことができることが知られている．我々はリスク中立化法を利用して算術平均にもとづくオプションの新しい評価法を与えることができるのである．

本稿の以下の構成は次の通りである．第2節では平均オプション契約として4つのタイプの形態を説明する．第3節では幾何平均に基づくオプション契約の評価法を考察する．続いて，第4節では本稿で提案する算術平均にもとづくオプション契約の評価法を説明する．第5節では簡単に本稿とこれまでに他の研究で導かれている平均オプション契約に関する偏微分方程式の関連についての言及し，第6節では本稿の結論を述べる．最後に本稿で導いた数学的命題の証明を数学付録として与えた．

2. 平均オプションとは?

ここで平均オプション契約（Average Options）と呼ばれているオプション契約について簡単にまとめておこう．時刻tにおける資産価格をS_tとしておく．また以下の議論ではヨーロピアン型のオプションのみを考察するのでオプション契約の満期をTとしておこう．このような設定のもとで平均オプション契約と呼びうる様々なオプション契約は考えられる．そこでここでの問題を明確にするために平

均オプション契約を整理しておくことにしよう.

(i)算術平均と幾何平均

初期時刻を$t=0$とするとまず資産価格S_iが離散時刻$i=1,2,...,n$において観測されるとすれば資産価格$\{S_i\}$の幾何平均は

$$M_n=\left(\prod_{i=1}^{n}S_i\right)^{1/n}$$

で与えられる. ここで

$$M_n=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln S_i\right)$$

と表すことができることに注意しておこう. 区間$[0,T]$において最終時刻Tを固定して区間$(i-1)T/n\leqq t\leqq iT/n$ $(i=1,2,...,n)$に対して

$$S_t(n)=\left(\frac{(i/n)-t}{1/n}\right)S_{i-1}+\left(\frac{t-(i-1)/n}{1/n}\right)S_i$$

によって$\{S_t(n)\}$を定めると, $n\to\infty$のとき分布の意味(弱収束)で$S_t(n)\to S_t$となる連続時間において連続的に変動する資産価格S_tを考えることができる. このとき確率過程$\{S_t\}$の幾何平均は

$$(1)\qquad M_T=\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T\ln S_t\,dt\right)$$

で与えられる.

これに対して, 離散時間モデルにおける資産価格$\{S_i, i=1,...,n\}$の算術平均は

$$Z_n=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i\right)$$

で与えられる. 幾何平均の場合と同様に考えれば, 連続時間$0\leqq t\leqq T$における確率過程$\{S_t\}$の算術平均は

$$(2)\qquad Z_T=\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt\right)$$

となる. 念のために確率過程$\{S_t\}$についての2つの平均を以下のように定義しておこう.

<u>定義1</u>: 連続時間$0\leqq t\leqq T$における資産価格$\{S_t\}$の算術平均は(2)定義される. また連続時間$0\leqq t\leqq T$における資産価格$\{S_t\}$の幾何平均は(1)で定義される.

(ii)オプションのタイプ

一般にある原資産にたいしてオプション契約者の対象資産と権利行使時点における権利行使価格としてどのようなものを選ぶかにより様々な種類の平均オプシ

ョン契約を考えることができる．本稿においては平均オプション契約としては次に挙げる２つの形を考えることにする．

定義２：タイプ１の（算術）平均オプション契約とはオプション契約者の対象資産がZ_Tとなる契約である．この種の契約の場合，権利行使価格をK（一定値）とすれば，満期のペイ・オフはコール・オプションについては

$$\mathrm{Max}\{Z_T - K, 0\},$$

またプット・オプションの場合には

$$\mathrm{Max}\{K - Z_T, 0\}$$

で与えられる．

定義３：タイプ２の（算術）平均オプション契約とはオプション契約者の権利行使価格がZ_Tとなる契約である．この種の契約の場合，対象資産がZ_Tとなるので，満期のペイ・オフはコール・オプションについては

$$\mathrm{Max}\{S_T - Z_T, 0\},$$

またプット・オプションの場合には

$$\mathrm{Max}\{Z_T - S_T, 0\}$$

で与えられる．

まったく同様に定義１の対象資産として原資産価格の幾何平均をとればタイプ１の幾何平均オプション契約が考えられる．また定義２の権利行使価格として原資産価格の幾何平均をとればタイプ２の幾何平均オプションを考えることができる．したがって以下では算術平均と幾何平均にたいしてタイプ１とタイプ２のオプション契約を考察するので合計４種類のオプション契約の理論価格を求めることになる．

(iii)問題設定

ここで期間$0 \leq t \leq T$において原資産価格$\{S\}$が連続確率過程

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW \tag{3}$$

にしたがうことと仮定しよう．ここでαとσはそれぞれドリフト項母数とボラティリティー母数を呼ばれるが簡単化の為に一定とする．また，Wは標準ブラウン運動を表す．このような確率過程は幾何ブラウン運動（Geometric Brownian Motion）と呼ばれている．

次に原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがうとき平均オプション価格の評価を考えよう．本稿では以下Cox=Ross(1976)が提案し，Harrison=Kreps(1979)によって理論的に正当化されたリスク中立化法（Risk=Neutralized method）を用いることにする．このリスク中立化法では通常のオプション契約の場合にはドリフト項母数αを安全資産の利子率rによっておきかえることになる．これに対して外国為替市場におけるオプション契約では金利として自国通貨の利子率r_dと対象とする通貨の外国利子率r_fが存在する．この場合にはドリフト項母数αをr_dー

r_fで置き換えることになる．本稿では自国利子率r_d及び対象とする通貨の外国利子率r_fはともに期間$0 \leqq t \leqq T$において一定と仮定しておく．

さらに時刻tにおけるコール・オプション契約に対する価格（プレミアム）をタイプ1とタイプ2についてそれぞれ$C(\mathrm{I}, t)$，$C(\mathrm{II}, t)$で表そう．同様にして，時刻tにおけるプット・オプション契約に対する価格をタイプ1とタイプ2についてそれぞれ$P(\mathrm{I}, t)$，$P(\mathrm{II}, t)$で表すことにする．リスク中立化法によれば時刻tにおけるオプション契約の価格は

(a)タイプ1のコール・オプションの場合

$$C(\mathrm{I}, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{Z_T - K, 0\}),$$

(b)タイプ1のプット・オプションの場合

$$S(\mathrm{I}, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{K - Z_T, 0\}),$$

(c)タイプ2のコール・オプションの場合

$$C(\mathrm{II}, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{S_T - Z_T, 0\}),$$

(b)タイプ2のプット・オプションの場合

$$S(\mathrm{II}, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{Z_T - S_T, 0\}),$$

でそれぞれ与えられる．ここで$E_t(\cdot)$は時刻tにおける条件付期待値を表すものとする．

以上で与えられたオプション・プレミアムを具体的に求めるにはタイプ1の場合にはZ_Tの条件付密度関数を求める必要が生じる．またタイプ2の場合には(Z_T, S_T)の条件付同時密度関数を求める必要がある．ここで注意する必要があるのは一般に$\{S_t\}$が幾何ブラウン運動にしたがうという仮定の下ではZ_Tや(Z_T, S_T)の条件付密度関数は明示的に導出することが数学的には困難であるとの数学的事実である．理論的にはこれらの分布を求めるためには対数正規分布の畳み込み（convolution）を無限回行う必要が生じる．他方，よく知られている正規分布の再生性を用いると$\{S_t\}$が幾何ブラウン運動にしたがうという仮定の下では$\{M_n\}$は対数正規分布にしたがうので$\{M_T\}$も対数正規分布にしたがうことが推察できる．（厳密な議論は次節を参照されたい．）したがって，M_Tの条件付密度関数や(S_T, M_T)の条件付同時密度関数を求めることができる．これらの密度関数を求めることができればオプション契約のオプション・プレミアムを解析的にもとめることが可能となる．すなわち，幾何平均にもとづくオプションの理論価格は容易に求めることができる．ここで我々は算術平均にもとづくオプション契約の理論価格と幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格の関係に注目する．実はある漸近的意味で算術平均にもとづくオプション契約の理論価格は幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格によって近似することができる．このことを説明する前提として幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格を導いてお

こう.

3. 幾何平均オプションの理論価格

本節では幾何平均にもとづくオプションの理論価格を導くことにする. ヨーロピアン型のオプション価格を求めるには満期における対象資産価格の分布を知る必要がある.

(i)幾何平均の条件付分布

原資産価格$\{S_t\}$についての幾何平均は(2)で与えられた. (2)に対して対数変換を行えば

$$(4) \qquad \ln(M_T) = \frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t \, dt$$

となる. ここで$\{S_t\}$は(3)にしたがうと仮定したので伊藤の補題 (Ito's Lemma) を用いれば

$$(5) \qquad d(\ln S) = (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW$$

と変換される. 時刻tで条件付きで考えると

$$(6) \qquad \ln(S_T) = \ln(S_t) + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma \int_t^T dW$$

となる. すなわちこの形から$\ln(S_T)$は平均$\ln(S_t) + (\alpha - \sigma^2/2)(T-t)$, 分散$\sigma^2(T-t)$の正規分布にしたがうことがわかる. (厳密には次節の定理1を参照されたい.) ここで(4)より時刻tにおける条件付きで考えれば,

$$(7) \qquad \ln(M_T) = \frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt$$

$$= \frac{t}{T}\ln(M_t) + \frac{1}{T}\int_t^T \ln(S_s)\,ds$$

$$= \frac{t}{T}\ln(M_t) + \frac{(T-t)}{T}\ln(S_t)$$

$$+(\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\frac{(T-t)^2}{2T}+\sigma\frac{1}{T}\int_t^T\int_t^s dW ds$$

と書くことができる．これから条件付期待値を求めると

(8) $$E_t(\ln(M_T))=\frac{t}{T}\ln(M_t)+\frac{(T-t)}{T}\ln(S_t)+(\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\frac{(T-t)^2}{2T}$$

となることがわかる．次に条件付分散を求めてみよう．ここで

(9) $$V_t(\ln(M_T))=E_t(\sigma\frac{1}{T}\int_t^T\int_t^s dW ds)^2$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{T})^2 E_t\{\int_t^T\int_t^T(\int_t^s dW)(\int_t^{s'} dW')dsds'\}$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{T})^2\{\int_t^T\int_t^T E_t[(\int_t^s dW)(\int_t^{s'} dW')]dsds'\}$$

となる．期待値と積分記号の順序交換についてはFubiniの定理（例えばIkeda=Watanabe(1989),116ﾍﾟｰｼﾞを参照）を用いている．ここで任意の $s>s'$ に対して $W(s)=W(s')+(W(s)-W(s'))$ と書けばブラウン運動の性質から $W(s')$ と $(W(s)-W(s'))$ は独立であるから

(10) $$\{\int_t^T\int_t^T E_t[(\int_t^s dW)(\int_t^{s'} dW')]dsds'\}$$

$$=2\{\int_0^{T-t}\int_0^s E[W(s)W(s')]ds'ds\}$$

$$=2\{\int_0^{T-t}\int_0^s E[W(s')+(W(s)-W(s'))]W(s')ds'ds\}$$

$$=\frac{(T-t)^3}{3}$$

となる．したがって

(11) $$V_t(\ln(M_T))=\sigma^2(\frac{1}{T})^2\frac{(T-t)^3}{3}$$

で与えられる．同様にして$\ln(M_T)$と$\ln(S_T)$の条件付共分散を求めると

$$(12)\qquad Cov_t(\ln(M_T),\ln(S_T))$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{T})E_t\{(\int_t^T\int_t^s dWds)(\int_t^T dW)\}$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{T})\{\int_0^{T-t}[E(W(s)W(T-t))]ds\}$$

$$=\sigma^2(\frac{1}{T})\{\frac{(T-t)^2}{2}\}$$

となることがわかる．このことから$\ln(M_T)$と$\ln(S_T)$の条件付相関係数をρとすれば，ρは

$$(13)\qquad \rho=\frac{Cov_t(\ln(M_T),\ln(S_T))}{\sqrt{V_t(\ln(M_T))}\sqrt{V_t(\ln(S_T))}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

ところで任意の実数a，bにたいして線形結合

$$(14)\quad a\ln(S_T)+b\ln(M_T)=\{a\ln(S_0)+b\ln(M_0)\}$$
$$+(\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\{a\int_0^T dt+b(\frac{1}{T})\int_0^T t\,d\}$$
$$+\sigma\{a\int_0^T dW+b\frac{1}{T}\int_0^T W(t)dt\}$$

は明らかに正規分布にしたがっている．（例えば数学付録(ii)を参照されたい．）以上の議論を使いやすい結果としてまとめると以下のようになる．

<u>定理1</u>：確率過程$\{S_t\}$が(1)にしたがうとき$(\ln(S_T/S_t),\ \ln(M_T)/M_t))'$の同時分布は2次元正規分布$N_2(\mu,\Sigma)$であって平均ベクトル$\mu'=(\mu_1,\mu_2)$と共分散行列$\Sigma=(\sigma_{ij})$はそれぞれ

$$\mu_1=(\alpha-\sigma^2/2)(T-t),$$

$\mu_2 = ((T-t)/T)\ \ln(S_t/M_t) + (\alpha - \sigma^2/2)\ ((T-t)^2/2T)$,
$\sigma_{11} = \sigma^2 (T-t)$, $\sigma_{22} = \sigma^2\ ((T-t)^3/3T^2)$,
$\sigma_{12} = (\sqrt{3}/2)\ \sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}$

で与えられる.

(ii)幾何平均オプションの価格評価

幾何平均の分布を求めることができたので幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格を求めてみよう. まず次の有用な命題を用意する. 証明は数学付録に与えておいた.

<u>補題2</u>: 確率変数 $x' = (x_1, x_2)$ が平均 μ, 共分散行列 Σ の2次元正規分布 $N_2(\mu, \Sigma)$ にしたがうとする. このとき任意のベクトル a とスカラー b に対して以下が成立する.

$$(15)\qquad \iint_{(1,-b)x \geq c} e^{a'x}\, n_2(x \mid \mu, \Sigma)\, dx$$

$$= \exp(a'\mu + \frac{1}{2} a'\Sigma a)\, \Phi\left[\frac{(1,-b)'(\mu + \Sigma a) - c}{\sqrt{(1,-b)'\Sigma(1,-b)}}\right]$$

ただし $n_2(x \mid \mu, \Sigma)$ は $N_2(\mu, \Sigma)$ の密度関数, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表すものとする.

（タイプ1のオプション価格）まずタイプ1の幾何平均オプションの価格を導こう. コール・オプションの場合にはリスク中立化法を用いると

$$(16)\qquad C(t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{M_T - K, 0\}),$$

$$= e^{-r_d(T-t)} \{M_T \int_{\ln(K/M_t)}^{+\infty} e^{x}\, n(x \mid \mu_1, \sigma_{11})\, dx$$

$$- \int_{\ln(K/M_t)}^{+\infty} n(x \mid \mu_1, \sigma_{11})\, dx\}$$

と表すことができる. ただし $n(x \mid \mu, \sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数を表している. ここで補題2を適用して $a = (1, 0)$, $b = 0$, $c = \ln(K/M_t)$ とおけばコール・オプションの価格は

$$(17)\quad C(t)=e^{-r_d(T-t)}\{M_t\exp(\mu_2+\sigma_{22}/2)\Phi(d_1)-K\Phi(d_2)\},$$

$$d_1=\{-\ln(K/M_t)+(\mu_2+\sigma_{22})\}/\sqrt{\sigma_{22}},$$
$$d_2=d_1-\sqrt{\sigma_{22}},$$

となることが分かる．ただし念のためリスク中立化法であるのでドリフト項母数αはr_d-r_fで置き換えることに注意しておこう．

タイプ1のプット・オプションの理論価格については通常のオプションと同様にプット・コール・パリティーを考えよう．ここでポートフォリオAとポートフォリオBとして

A：コール・オプションC円と債券$e^{-r_d(T-t)}K$円,
B：プット・オプションP円と
　　コール・オプション（行使価格ゼロ）$e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$円,

を考えると，これら2つのポートフォリオの権利行使時点におけるペイ・オフは以下の表で与えられる．

表2

	$M_T \geqq K$	$M_T < K$
C	$-M_T+K$	0
$-P$	0	$-M_T+K$
$e^{-r_d(T-t)}K$	$-K$	$-K$
$-e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$	M_T	M_T
0	0	0

ここで，経済に"無リスクの裁定機会の存在しない"ことを仮定するとプット・コール・パリティーの条件を用いることができる．表2よりプット・オプションの価格は

$$(18)\quad P(t)=C(t)+e^{-r_d(T-t)}K-e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$$

$$=C(t)+e^{-r_d(T-t)}K-e^{-r_d(T-t)}M_t\exp(\mu_2+\sigma_{22}/2)$$

で与えられる．

（タイプ２のオプション価格）次にタイプ２の幾何平均オプション契約の理論価格を導こう．コール・オプションの場合にはリスク中立化法を用いると

$$(19)\quad C(t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\mathrm{Max}\{S_T - M_T, 0\}),$$

である．ここで領域$\{S_T - M_T > 0\}$は領域

$$\{\ln(S_T/S_t) - \ln(M_T/M_t) > \ln(M_t/S_t)\}$$

に一致することに注意しよう．$x' = (\ln(S_T/S_t), \ln(M_T/M_t))'$として補題２を適用するために

$$(20)\quad C(t) = e^{-r_d(T-t)}\left\{\int_{(1,-1)x > \ln(M_t/S_t)}^{+\infty} [S_t e^{x_1} - M_t e^{x_2}]\, n_2(x \mid \mu, \Sigma)\, dx\right\}$$

と書き直しておこう．ここで(20)の右辺の積分項を２つに分割してそれぞれの項をA，Bと表すことにしておけば

$$(21)\quad C(t) = e^{-r_d(T-t)}\{A - B\}$$

となる．項Aについては$a = (1, 0)$とおいて補題２を適用すれば

$$(22)\quad A = S_t \exp(\mu_1 + \sigma_{11}/2)\Phi(d_3),$$
$$d_3 = (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_{11} - \rho\sigma_1\sigma_2 - \ln(M_t/S_t)) / \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

で与えられることが分かる．ただし$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{11}}$，$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_{22}}$とおいている．同様にして項Bについては$a = (0, 1)$とおいて補題２を適用すれば

$$(23)\quad B = M_t \exp(\mu_2 + \sigma_{22}/2)\Phi(d_4),$$
$$d_4 = (\mu_1 - \mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{22} - \ln(M_t/S_t)) / \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

となる．すなわち通常のオプション公式よりも若干複雑になるが標準正規分布の分布関数によってコール・オプションの明示的な評価式を得ることができた．

次にタイプ２の幾何平均プット・オプションの理論価格を求めよう．国内金利はr_d，また外国金利はr_fとしたので，ドリフト項母数αに$r_d - r_f$を代入してS_Tの現在価値を求めると

$$(24)\quad e^{-r_d(T-t)} E_t(S_T) = e^{-r_d(T-t)} e^{(r_d - r_f)(T-t)} S_t$$

$$= e^{-r_d(T-t)} S_t$$

となる．このことに注意してタイプ1のオプションの場合と同様にポートフォリオCとポートフォリオDを

C：コール・オプションC円と
　　コール・オプション（権利行使価格ゼロ）$e^{-r_d(T-t)} E_t(M_T)$円，

D：プット・オプションP円と為替$e^{-r_f(T-t)}(S_t)$円，

により構成すれば，権利行使時点におけるペイ・オフの表は以下のように与えられる．

表3

	$M_T \geqq S_T$	$M_T < S_T$
C	0	$-S_T + M_T$
$-P$	$-S_T + M_T$	0
$-e^{-r_f(T-t)} S_t$	S_T	S_T
$e^{-r_d(T-t)} E_t(M_T)$	$-M_T$	$-M_T$
0	0	0

ここで，再び経済に"無リスクの裁定機会が存在しない"ことを仮定すればプット・コール・パリティーの条件を得る．すなわち，タイプ2の幾何平均プット・オプションの理論価格は

$$(25)\quad P(t) = C(t) - e^{-r_f(T-t)} S_t + e^{-r_d(T-t)} M_t \exp(\mu_2 + \sigma_2^2/2)$$

で与えられる．

4．算術平均オプションの評価法

前節では幾何ブラウン運動$\{S_t\}$から計算される統計量M_TとS_Tの分布の性質について調べた．さて算術平均Z_Tの分布は厳密に求めることは困難であるが，なんらかの意味で幾何平均M_Tの分布と関係がないであろうか？本節ではまずボラティリティー母数σが小さい場合には算術平均の分布はある極限分布を持つことを示す．実はこの極限分布は対数正規分布になることがわかるので，このことを利用

すると幾何平均の分布を用いて算術平均の分布を近似することが考えられる．本節ではまず算術平均の極限分布を導き，これを利用して算術平均オプションの理論価格を計算する実際的方法を説明する．

(i)算術平均の漸近分布

期間$0 \leqq t \leqq T$における$\{S_t\}$の算術平均Z_Tは(2)で与えられた．ここで$\alpha' = \alpha - \sigma^2/2$，$x_0 = \ln S_0$とおけば(3)より標準ブラウン運動$W(t)$を用いて

$$(26) \quad \begin{aligned} x_t &= \ln S_t \\ &= x_0 + \alpha' t + \sigma W(t) \end{aligned}$$

と表すことができる．したがって

$$(27) \quad \begin{aligned} Z_T &= \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{x_0 + \alpha' s + \sigma W(t)\} ds \\ &= \frac{t}{T} Z_t + \frac{1}{T}\int_t^T \exp\{x_t + \alpha'(s-t) + \sigma(W(s) - W(t))\} ds \\ &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T}\int_0^{T-t} \exp\{\alpha' s + \sigma W(s)\} ds \end{aligned}$$

と表すことができる．ここでσが極めて小さいことを想定すると

$$(28) \quad \begin{aligned} Z_T &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T}\int_0^{T-t} \exp(\alpha' s)\{1 + \sigma W(s) + o(\sigma)\} ds \\ &= \left(\frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T}\int_0^{T-t} \exp(\alpha\ t) dt\right) + \sigma\left(S_t \frac{1}{T}\int_0^{T-t} W(t)\exp(\alpha\ t) dt\right) + o(\sigma) \\ &= Z_T(0) + \sigma Z_T(1) + o(\sigma) \end{aligned}$$

となる．以下では正当化が可能であるので形式的に高次の項$o(\sigma)$を無視することにしよう．ここで時刻tまでの履歴を条件とすると，$\alpha \neq 0$のとき右辺第1項は

$$(29) \quad \begin{aligned} Z_T(0) &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \left[\frac{\exp(\alpha s)}{\alpha T}\right]_0^{T-t} \\ &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \left\{\frac{\exp(\alpha(T-t)) - 1}{\alpha T}\right\} \end{aligned}$$

となる．次に

$$(30)\quad Z_T(1)=S_t\frac{1}{T}\int_0^{T-t}W(s)\exp(\alpha s)ds$$

の分布を考えよう．期待値はFubiniの定理を用いて

$$(31)\quad E_t(Z_T(1))=S_t\frac{1}{T}\int_0^{T-t}E[(W(s))\exp(\alpha s)]ds\ =\ 0$$

である．分散は

$$(32)\quad V_t(Z_T(1))=(\frac{S_t}{T})^2\ E\{\int_0^{T-t}\int_0^{T-t}(W(s)W(s'))\exp(\alpha(s+s'))\}dsds'$$

となる．ここで再び $W(s)=W(s')+\{W(s)-W(s')\}$ と分解すると任意の $s'<s$ にたいして $W(s')$ と $\{W(s)-W(s')\}$ は独立であるので，Fubiniの定理を使って計算すると，$\alpha\neq0$ のときには

$$(33)\quad V_t(Z_T(1))=(\frac{S_t}{T})^2\{2\int_0^{T-t}\int_0^{s}s'\exp(\alpha(s+s'))ds'ds\}$$

$$=2(\frac{S_t}{T})^2\{\int_0^{T-t}\exp(\alpha s)[\exp(\alpha s')(\frac{s'-\alpha}{\alpha^2})]_0^s ds]\}$$

$$=(\frac{S_t}{T})^2\{\frac{\tau\exp(2\alpha\tau)}{\alpha^2}-\frac{3(\exp(2\alpha\tau)-1)}{2\alpha^3}+\frac{2(\exp(\alpha\tau)-1)}{\alpha^3}\}$$

となる．ただし $\tau=T-t$ である．また $\alpha=0$ のときには(29)と(33)で形式的に $\alpha\to0$ として展開した式と一致して，$Z_T(0)=(t/T)Z_t+S_t$，$V_t(Z_T(1))=\tau^3/3$ となることがわかる．ここで

$$(34)\quad \log(Z_T)=\log\{(Z_T(0))[1+\sigma\ \frac{Z_T(1)}{Z_T(0)}+o(\sigma)]\}$$

$$=\log(Z_T(0))+\sigma\ [\frac{Z_T(1)}{Z_T(0)}]+o(\sigma)$$

となることに注意すれば，算術平均 Z_T の漸近分布について次の命題が成立する．

証明の概略を数学付録に与えた.

<u>定理3</u>: 区間$0 \leqq t \leqq T$における確率過程$\{S_t\}$の算術平均をZ_Tとすると時刻tを条件とする

$$\frac{1}{\sigma}(\ln Z_T - \ln Z_T(0))$$

の分布は$\sigma \to 0$のとき漸近的に平均0, 分散$V(Z_T(1))/(Z_T(0))^2$の正規分布に収束する.

この定理により$\ln(Z_T/Z_T(0))$の分布を正規分布で近似することがある意味で正当化されることになる. このことは$(Z_T/Z_T(0))$の分布としては対数正規分布によって近似できることをも意味している. したがって, 算術平均オプションの理論価格を求める場合にはZ_Tの分布を幾何正規分布で近似して理論価格の近似値を求めることが考えられよう.

(ii)算術平均のモーメントの性質

一般に幾何ブラウン運動の算術平均Z_Tの精密分布を求めることは困難であるが精密モーメント(exact moment)を求めることは可能である. Z_Tのn次モーメントはFubiniの定理を用いて

$$(35)\quad E(Z_T)^n = \left(\frac{1}{T}\right)^n E\left\{\int_0^T S_t dt\right\}^n$$

$$= n!\left(\frac{S_0}{T}\right)^n\left\{\int_0^T\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2} E(\exp(\sigma W(t_1)+\sigma W(t_2)+\ldots+\sigma W(t_n)) \cdot \exp(\alpha'(t_1+t_2+\ldots t_n))dt_1 dt_2\ldots dt_n\right\}$$

と表せる. ここでブラウン運動の差分を$x(t_i - t_{i-1}) = W(t_i) - W(t_{i-1})$とおけば$x(t_i - t_{i-1})$は$N(0, t_i - t_{i-1})$にしたがっている. ただし$t_0=0$とした. また

$$(36)\quad \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(k\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)+k^2\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{n+1-k}-t_{n-k})\right\} = \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha + k\sigma^2)t_{n-k}\right\}$$

となることに注意して式を変形すると

$$(37)\quad E(Z_T)^n = n!\left(\frac{S_0}{T}\right)^n\left\{\int_0^T\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2} E(\exp(n\sigma x(t_1)+(n-1)\sigma x(t_2-t_1)+\ldots \sigma x(t_n-t_{n-1}))\exp(\alpha'(t_1+t_2+\ldots t_n))dt_1 dt_2\ldots dt_n\right\}$$

$$=n!\left(\frac{S_0}{T}\right)^n\left\{\int_0^T\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha+k\sigma^2)t_{n-k}\right)dt_1dt_2\ldots dt_n\right\}$$

$$=n!\left(\frac{S_0}{T}\right)^n\left\{\int_0^T\exp(\alpha t_n)\int_0^{t_n}\exp((\alpha+\sigma^2)t_{n-1})\int_0^{t_{n-1}}\cdots\right.$$
$$\left.\int_0^{t_3}\exp((\alpha+(n-2)\sigma^2)t_2)\int_0^{t_2}\exp((\alpha+(n-1)\sigma^2)t_1)dt_1dt_2\ldots dt_n\right\}$$

となる．この一般公式を用いて$n=1,2,3$のモーメントを計算してみよう．$n=1$のモーメントは(a) $\alpha\neq 0$のときには

$$E(Z_T)=S_0\left\{\frac{\exp(\alpha T)-1}{\alpha T}\right\}, \tag{38}$$

(b) $\alpha=0$のときには$E(Z_T)=S_0$となる．$n=2$のモーメントはより複雑な場合わけが必要となり，(a) $\alpha\neq 0$，$\alpha+\sigma^2\neq 0$，$2\alpha+\sigma^2\neq 0$のときには

$$E(Z_T^2)=2\left(\frac{S_0}{T}\right)^2\left\{\frac{\exp((2\alpha+\sigma^2)T)-1}{(\alpha+\sigma^2)(2\alpha+\sigma^2)}-\frac{\exp(\alpha T)-1}{\alpha(\alpha+\sigma^2)}\right\}, \tag{39}$$

(b) $\alpha=0$，$\alpha+\sigma^2\neq 0$，$2\alpha+\sigma^2\neq 0$のときには

$$E(Z_T^2)=2\left(\frac{S_0}{T}\right)^2\left\{\frac{\exp(\sigma^2T)-1}{\sigma^4}-\frac{T}{\sigma^2}\right\}, \tag{40}$$

(c) $\alpha\neq 0$，$\alpha+\sigma^2\neq 0$，$2\alpha+\sigma^2=0$のときには

$$E(Z_T^2)=2\left(\frac{S_0}{T}\right)^2\left\{\frac{T}{(\alpha+\sigma^2)}-\frac{\exp(\sigma^2T)-1}{\alpha(\alpha+\sigma^2)}\right\}, \tag{41}$$

(d) $\alpha\neq 0$，$\alpha+\sigma^2=0$，$2\alpha+\sigma^2\neq 0$のときには

$$E(Z_T^2)=2\left(\frac{S_0}{T}\right)^2\left\{\frac{T\exp(\alpha T)}{\alpha}-\frac{\exp(\alpha T)-1}{\alpha^2}\right\}, \tag{42}$$

となる．3次のモーメントはより煩雑になり，例えば$\alpha\neq 0$，$\alpha+\sigma^2\neq 0$，$2\alpha+\sigma^2\neq 0$，$2\alpha+3\sigma^2\neq 0$，のときには

$$E(Z_T^3)=6\left(\frac{S_0}{T}\right)^3\frac{1}{(\alpha+2\sigma^2)}\left\{\frac{\exp(3(\alpha+\sigma^2)T)-1}{3(\alpha+\sigma^2)(2\alpha+3\sigma^2)}\right. \tag{43}$$

$$-\frac{\exp(\alpha T)-1}{\alpha(2\alpha+3\sigma^2)}-\frac{\exp((2\alpha+\sigma^2)T)-1}{(2\alpha+\sigma^2)(\alpha+\sigma^2)}+\frac{\exp(\alpha T)-1}{\alpha(\alpha+\sigma^2)}\}$$

となる．

次にここで算術平均について求めた"厳密な（exact）"平均と分散を前節でもとめた幾何平均の分布の期待値と分散と比較してみよう．幾何平均の期待値

$$(44)\quad E(M_T)=S_0\exp\left(\frac{\alpha T}{2}-\frac{\sigma^2 T}{12}\right)\leqq S_0\exp\left(\frac{\alpha T}{2}\right)$$

となることに注意すれば上の公式から

$$(45)\quad E(Z_T)\geqq E(M_T)$$

となることがわかる．すなわち算術平均の期待値は幾何平均の期待値よりも小さくない．分散については一般に複雑で簡単な関係を見いだすことができない．そこでボラティリティーσの小さいときを考え$V(M_T)$をσについて展開すれば

$$(46)\quad V(M_T)=(S_0)^2\exp\left(\left(\alpha+\frac{\sigma^2}{T}\right)T\right)\{1-\exp\left(\frac{\sigma^2}{3}\right)\}$$

$$=\sigma^2\{\left(\frac{S_0{}^2}{3}\right)\exp(\alpha T)\}+0(\sigma^6),$$

となる．まったく同様にして$\alpha\neq 0$のときには$V(Z_T)$をσについて展開すると

$$(47)\quad V(Z_T)=(S_0)^2\{m_2\sigma^2+m_4\sigma^4+0(\sigma^6)\},$$

$$m_2=\frac{T\exp(2\alpha T)}{\alpha^2}-\frac{3(\exp(2\alpha T)-1)}{2\alpha^3}+\frac{2\exp(\alpha T)-1}{\alpha^3},$$

$$m_4=\frac{7\exp(2\alpha T)}{7\alpha^4}-\frac{3T\exp(2\alpha T)}{2\alpha^3}+\frac{T^2\exp(\alpha T)}{2\alpha^2}-\frac{2\exp(\alpha T)}{\alpha^4}$$

によって与えられる．したがって，σが十分に小さければ平均の差に比べて分散の差は十分小さくなることがわかる．$\alpha=0$のときにも同様なことが確認できる．

(iii)算術平均分布の近似法

平均オプション契約が実務的に利用されている外国為替市場ではこのところボラティリティー母数の値σは年率にして８％－１５％の範囲を推移している．このような状況においてはσが小さい場合の近似法の現実妥当性は大きいように考え

られる．そこで漸近理論により求められた漸近分布による算術平均オプション契約の価格評価を考えよう．ここで定理3で求めた$\ln(Z_T)$の漸近分布より$\ln((Z_T)/(Z_t))$の条件付平均と条件付分散はそれぞれ

(48) $\mu_2^* = \ln(Z_T(0)/Z_t)$, $\sigma_{22}^* = \sigma^2\{V(Z_T(1))/Z_T(0)^2\}$

によって近似することが正当化できることに注目する．また$\alpha \neq 0$のとき$\ln((Z_T)/(Z_t))$と$\ln(S_T/S_t)$の条件付共分散の近似値を求めれば

(49) $$Cov_t(Z_T(1), \ln(S_T))$$

$$= \sigma\left(\frac{S_t}{T}\right) E\left\{\left(\int_0^{T-t} W(s) e^{\alpha s} ds\right) W(T-t)\right\}$$

$$= \sigma\left(\frac{S_t}{T}\right)\left\{\int_0^{T-t} E[W(s)W(T-t)] e^{\alpha s} ds\right\}$$

$$= \sigma\left(\frac{S_t}{T}\right)\left\{\int_0^{\tau} s e^{\alpha s} ds\right\}$$

$$= \sigma\left(\frac{S_t}{T}\right)\left\{\frac{\tau e^{\alpha\tau}}{\alpha} - \frac{(e^{\alpha\tau}-1)}{\alpha^2}\right\}$$

となる．（ただし$\tau = T-t$である．）したがって，(33)より$\ln((Z_T)/(Z_t))$と$\ln(S_T/S_t)$の条件付相関係数の近似値ρ^*は$\alpha \neq 0$のとき

(50) $$\rho^* = \frac{Cov_t(Z_T(1), S_T)}{\sqrt{V_t(Z_T(1))}\sqrt{V_t(\ln(S_T))}}$$

$$= \left\{\frac{\tau \exp(\alpha\tau)/\alpha - (\exp(\alpha\tau)-1)/\alpha^2}{\sqrt{\tau}\sqrt{[\tau\exp(2\alpha\tau)/\alpha^2 - (3/2)(\exp(2\alpha\tau)-1)/\alpha^3 + 2(\exp(\alpha\tau)-1)/\alpha^3]}}\right\}$$

で与えられる．また$\alpha = 0$のときには形式的に$\alpha \to 0$としたときの値，すなわち$\rho^* = \sqrt{3/2}$となることがわかる．したがって，以上で求められた漸近分布にもとづく近似値μ_2^*，σ_{22}^*，ρ^*を母数として幾何平均オプション契約の理論価格を用いることが考えられよう．これが本稿で提案する第1の近似法である．

次により実務的により適当と考えられる第2の近似方法を説明する．以下の議論では一般性を失うことなく$\alpha \neq 0$，$\alpha + \sigma^2 \neq 0$，$2\alpha + \sigma^2 \neq 0$としておこう．前節では既に$Z_T$および$(S_T, Z_T)$の厳密分布を求めたが，厳密分布をそれぞれ$M_T$および$(S_T, M_T)$の分布を利用してより精度の良い近似を考えよう．ここでM_Tの分布

に現れる母数αとσをα^*とσ^*とおこう．これに対してZ_Tの分布に現れる母数αとσについてはそのままとしておく．このとき２つの統計量M_TとZ_Tの期待値と分散について

$$(51)\qquad E_t(Z_T)=E_t(M_T),\quad V_t(Z_T)=V_t(M_T)$$

を満足するように母数(α,σ)の関数として(α^*,σ^*)を選ぶことができる．そこで，こうして求めた(α^*,σ^*)にもとづくM_Tの分布と(S_T,M_T)の分布によりZ_Tの分布と(S_T,Z_T)の分布を近似することを考えるのである．

まず，M_TとZ_Tの厳密な条件付期待値は$\tau=T-t$としておくと

$$(52)\qquad E_t(M_T)=M_t^{t/T}S_t^{\tau/T}\exp\{\alpha^*\frac{\tau^2}{2T}+\sigma^{2*}(\frac{\tau^3}{6T^2}-\frac{\tau^2}{4T})\},$$

$$(53)\qquad E_t(Z_T)=\frac{t}{T}Z_t+\frac{S_t}{\alpha T}\exp(\alpha\tau-1)$$

となっている．そこで

$$(54)\qquad c_1=\ln E(Z(T))-\ln(M_t^{t/T}S_t^{\tau/T})$$

とおけば，条件$E_t(Z_T)=E_t(M_T)$から

$$(55)\qquad \alpha^*\frac{\tau^2}{2T}=c_1-\sigma^{2*}(\frac{\tau^3}{6T^2}-\frac{\tau^2}{4T})$$

となる．同様にしてM_TとZ_Tの条件付分散はそれぞれ

$$(56)\qquad V_t(M_T)=M_t^{2t/T}S_t^{2\tau/T}\exp(\alpha\frac{\tau^2}{T})\{\exp[\frac{2\tau^3}{3T^2}-\frac{\tau^2}{2T}]\sigma^{2*}-\exp[\frac{2\tau^3}{3T^2}-\frac{\tau^2}{2T}]\sigma^{2*}\},$$

$$(57)\qquad V_t(Z_T)=(\frac{S_t}{T})^2\{\frac{2}{(\alpha+\sigma^2)}[\frac{\exp(2\alpha+\sigma^2)\tau-1}{(2\alpha+\sigma^2)}-\frac{\exp(\alpha\tau)-1}{\alpha}]-(\frac{\exp(\alpha\tau)-1}{\alpha})^2\}$$

で与えられる．また，

(58)　$c_2 = V_t(Z_T)/S_t^2$

とおけば条件$V_t(Z_T)=V_t(M_T)$から

$$(59)\quad \sigma^{2*} = \frac{3T^2}{\tau^3}\ln\{c_2 e^{-2c_1}\left(\frac{M_t}{S_t}\right)^{-2t/T}+1\},$$

$$(60)\quad \alpha^* = \frac{2T}{\tau^2}\{c_1 + \left(\frac{\tau^2}{4T} - \frac{\tau^3}{6T^2}\right)\sigma^{2*}\},$$

となることがわかる．そこで，こうして求めたσ^{2*}とα^*に対応するM_T及び(S_T, M_T)の分布からオプション公式に現れる母数μ_2と$\sigma_2{}^2$を求めるのが第2の近似法である．

ここで(α, σ^2)を母数とするS_Tと(α^*, σ^{2*})を母数とするM_Tの相関係数をρ^*とすれば

$$(61)\quad \mathrm{cov}\left(\frac{1}{T}\int_t^T \ln S^*(s)ds, \ln S(T)\right) = \frac{1}{T}E\left(\sigma^*\int_0^{T-t}W(s)ds, \sigma W(T-t)\right)$$

$$= \frac{\sigma^*\sigma}{2T}(T-t)^2$$

で与えられる．したがって

$$(62)\quad \rho^* = \frac{\sigma^*\sigma(T-t)^2/(2T)}{(\sigma^*(T-t)^{3/2}/T\sqrt{3})\sigma(T-t)^{1/2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるのでもとの確率過程に対するρに一致することがわかる．

(iv)算術平均オプション価格の計算法

算術平均の分布を幾何平均の厳密な平均（exact mean）と分散に合わせることで近似する方法を用いると，算術平均オプション契約の近似価格を簡単に求めることができる．具体的には幾何平均についてのドリフト項母数α^*とボラティリティー母数σ^*をもとにして幾何平均オプションの理論価格式に表れる母数μ^2, σ^2, ρの推定値を求める．次にこれらの値を幾何平均オプションの価格式に代入することによって算術平均オプション価格の近似値を求める方法をここで提案する．

以上で説明した方法を実際の数値例を用いて実行してみた．ここで

$S_0 = 150.00$, $T=1$, $r_d = 7\%$, $r_f = 9\%$, $K = 150$, $\sigma = 10\%$

などの数値を前提としてオプション価格を計算した．表4はタイプ1のコール・オプションとプット・オプションのプレミアムを離散近似して計算した結果を示

したものである.

表4

平均回数	5	10	80	126	252
コール	2.8997	2.7264	2.5734	2.5654	2.5584
(コンボリューション)	2.8923	2.7198	2.5597	2.5539	2.5407
プット	4.5658	4.2542	3.9801	3.9657	3.9532
(コンボリューション)	4.5551	4.2503	3.9566	3.9242	3.8927

ここでコンボリューションとは畳み込み法による数値計算の結果である. 近似計算との比較する為に示しておいた. この数値計算例から明かなように近似計算法と畳み込み法によるプレミアムの数値は極めて類似している. ただし実際の畳み込み計算では連続時間モデルを離散時間モデルで近似していることに注意しておこう. この表4において特に, 平均をとる回数が5回, 10回とあまり多くない場合には誤差は1%以下となっている. また平均をとる回数が多い場合には多少数値が異なる. これは第1節に述べたようにこの場合には畳み込み法の信頼性に若干の疑問があることを考え合わせれば, ここで提案する幾何平均近似法が有効であることを否定するものではないと考えられるであろう.

最後にここで我々の提案する評価法について以下のことを注意しておこう. 我々は算術平均の分布を幾何平均の分布で近似する場合には権利行使価格時点に極めて近くなると近似の精度が多少落ちることが予想される. これはtがTに近くなると確率1で(45)が成立する為である. したがって, 理論的には権利行使時刻の付近では定理3で導いた漸近分布を直接用いた第1の近似法を考える必要がある. ただし, 我々が行ったシミュレーションによれば, ヘッジ・ポートフォリオを作るなどの実用的観点から考えると本稿で提案する第2の近似評価法によって十分に計算精度が保証されるとの結論を得ている.

(v)ボラティリティーの推定

現実のデータから以上で説明したオプション価格の理論価格を求める場合にはボラティリティー母数σを推定する必要がある. オプション理論では母数σの推定方法としては原資産価格の対数変化率から計算された標本分散を用いる方法がヒストリカル・ボラティリティーとして知られている. その他, 最近 Kunitomo (1990) は毎日観察される高値と安値を用いるParkinson法をさらに改良した方法を提案している. この推定方法を平均オプションの評価に応用することも考えられよう.

5. ヘッジ・ポートフォリオ

これまで本稿で考察してきた平均オプション契約が実際に市場においてヘッジ可能であろうか．以下では外国為替市場の場合に容易にヘッジ・ポートフォリオを構成できることを示しておこう．通貨の場合には通常r_fを外国金利として原資産価格が幾何ブラウン運動

(63)　$dS = \alpha S dt + \sigma S dW$

にしたがっていると考える．ここで算術平均Z_Tについては

(64)　$dZ_T = S dt$

となるので局所的に不確実性が存在しない（locally deterministic）ことになる．ここで平均オプション価格Cとしておき，ヘッジ・ポートフォリオとしてn（$= C_S$）単位の通貨SとV－nS単位の安全資産からなるVを考える．このとき自己充足的（self-financing）戦略の下ではVの変化は

(65)
$$\begin{aligned} dV &= n dS + (V - nS) r_d dt + n S r_f dt \\ &= n\{\alpha S dt + \sigma S dW\} + (V - nS) r_d dt + n S r_f dt \\ &= \{C_S \alpha S + C_S r_f S + (V - C_S S) r_d\} dt + \sigma S dW \end{aligned}$$

である．一方，オプション価格$C = C(S, Z_T, t)$に対して伊藤の補題を用いれば

(66)　$dC = \{\alpha S C_S + (1/2)\sigma^2 S^2 C_{SS} + S C_Z + C_t\} dt + \sigma S dW$

となる．したがって偏微分方程式

(67)
$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + (r_d - r_f) S C_S + S C_Z + C_t - r_d C = 0$$

を得る．ここで$r_d - r_f$とr_dをともにrによって置き換えればこの方程式はBergman(1985) が導いた(18)式及び Ingersoll(1987) の(60a)式に一致する．したがって，理論的には(67)を境界条件の下で解けばオプション契約の理論価格を求めることができる．しかもこうして求めた理論価格はFeynman=Kacの方程式を用いることによりリスク中立化法による理論値と同一であることをより一般的に示すことができる．しかしながら，算術平均オプション契約の評価の場合，このような偏微分方程式アプローチにおいては求めるべき偏微分方程式の解の解析的表現が困難であるので数値計算上の大きな問題が生じると思われる．ただし原理的には有限要素法などにより数値的に解を求める方法を考えることは不可能ではないであろう．

6.結語

本稿では幾何平均オプション価格を利用する算術平均オプション価格の新しい評価法を説明した．本稿で提案した方法は幾何平均近似法とでも呼ぶことができ

ようが，この方法はこれまでに提案されている数値計算方法，例えば畳み込み法などと比較すると最終形が明示的に与えられるので計算が比較的簡単であり，必要な計算時間も短い．また，本稿では一つの漸近理論を用いてボラティリティー母数σがゼロに近付くにつれて（すなわちsmall-σ漸近理論）には極限では近似価格が真の価格に一致することを示した．この漸近理論は現実にボラティリティー母数があまり大きくない場合には幾何平均近似法の精度をある程度保証してくれる．また，より実用的と思われるオプション価格の評価法についても説明を加えた．以上のような理論的結果および我々が行った近似法についての若干の数値シミュレーションの結果から判断する限り本稿で提案した幾何平均近似法は実務的にも有用であるように考えられる．

ところで，前節で提案した方法はこれまでの数値計算法と異なりオプションの近似価格が明示的に得られるので実はより広い応用を考えることができる．算術平均の関数として表現されるペイ・オフを持つオプション契約，例えば停止条件付オプションや開始条件付オプションなどより複雑なオプション契約の理論価格を求めることも不可能でないであろう．他方，このような算術平均に基づくオプションの応用を既存の畳み込み法などによって実現することはきわめて困難と思われる．

7.数学付録

(i)補題2の証明

変数変換$u=x_1-bx_2, v=x_2$を考える．変換のヤコビアンは1であるので$x=(u+bv, v)$を代入すると

$$(A.1)\quad \int\int_{(1,-b)x\geq c} e^{a'x} n_2(x \mid \mu, \Sigma)dx$$

$$= \exp(a'\mu + a'\Sigma a/2) \int\int_{(1,-b)x\geq c} n_2(x \mid \mu+\Sigma a, \Sigma)dx$$

$$= \exp(a'\mu + a'\Sigma a/2) \int_{u\geq c}\int_{-\infty}^{+\infty} n_2(u+bv, v \mid \mu^*, \Sigma)dudv$$

と書ける．ただし$\mu^{*'}=(\mu_1^*, \mu_2^*)=\mu+\Sigma a$とおいた．ここで

$$(A.2)\quad \begin{pmatrix} u+bv \\ v \end{pmatrix} - \mu^* = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}(v-\mu_2^*) + \begin{pmatrix} u-(1,-b)\mu^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかけるので正規分布の密度関数の指数部は

$$(A.3)\quad [\binom{u+bv}{v}-\mu^{*}]'\Sigma^{-1}[\binom{u+bv}{v}-\mu^{*}]$$

$$=(b,1)\Sigma^{-1}\binom{b}{1}\{(v-\mu_2^{*})+\frac{(b,1)\Sigma^{-1}(1,0)'}{(b,1)\Sigma^{-1}(b,1)'}[u-(1,-b)\mu^{*}]\}^2$$

$$+[(1,0)\Sigma^{-1}(1,0)'-\frac{((b,1)\Sigma^{-1}(1,0)')^2}{(b,1)\Sigma^{-1}(b,1)'}][u-(1,-b)\mu^{*}]^2$$

である．したがってvについて積分を行うと

$$(A.4)\quad \int_{u\geqq c}\int_{-\infty}^{+\infty} n_2(u+bv,v\mid\mu^{*},\Sigma)dudv$$

$$=k_1(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\int_{u\geqq c}\exp\{-\frac{1}{2}k_2[u-(1,-b)\mu^{*}]^2\}du$$

となる．ただし

$$k_1=|\Sigma|^{-1/2}[(b,1)\Sigma^{-1}(b,1)']^{-1/2},$$

$$k_2=[(1,0)\Sigma^{-1}(1,0)'-\frac{((b,1)\Sigma^{-1}(1,0)')^2}{(b,1)\Sigma^{-1}(b,1)'}]$$

である．そこで変数変換$w=\sqrt{k_2}[u-(1,-b)\mu^{*}]$を行って積分を計算し，さらに

$$(A.5)\quad |\Sigma|[(b,1)\Sigma^{-1}(b,1)']k_2=1$$

となることに注意すれば右辺の積分は

$$\Phi[\frac{(1,-b)'(\mu+\Sigma a)-c}{\sqrt{(1,-b)'\Sigma(1,-b)}}]$$

に一致する．□

(ii)定理3の証明の概略

簡単化の為に$T=1$とおき

$$(A.6)\quad \int_0^1 e^{\alpha t}W(t)dt$$

が正規分布にしたがうことを示す．確率積分の構成から平均0，分散1/nの確率変数列$\{\xi_j, j=1,...,n\}$を用いて

$$\text{(A.7)}\qquad \int_0^1 e^{\alpha t} W(t)dt = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha(i/n)} \left\{\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}\xi_j)\right\}$$

と書ける．ここで

$$\text{(A.8)}\qquad a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} e^{\alpha(i/n)}$$

とおけば

$$\text{(A.9)}\qquad \int_0^1 e^{\alpha t} W(t)dt = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sum_{j=1}^{n} a_j(\sqrt{n}\xi_j)$$

と書ける．ここで右辺の各項の期待値はゼロであるから中心極限定理を適用すればよいことになる．さらに$\eta_j = a_j(\sqrt{n}\xi_j)$,

$$\text{(A.10)}\qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} Var(\eta_j)$$

とおけば，２つの条件

$$\text{(A.11)}\qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \max_{1\leqq j\leqq n} Var(\eta_j) = 0,$$

$$\text{(A.12)}\qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) S_n = c \quad (\text{一定})$$

を満たせばリンドバーグ条件下の中心極限定理（例えばAnderson=Kunitomo (1989)定理１を参照）を適用することができる．系列｛a_j｝からこれら２つの条件を満足することは容易にわかる．　□

8.参考文献

Anderson, T.W. and N. Kunitomo, (1989),"Asymptotic Robustness in Regression and Autoregression Based on Lindeberge Conditions," Discussion Paper No.89-F-10, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Bergman, Y.Z. (1985), "Pricing Path Contingent Claims," Research in Finance, vol.5, 229-241.

Carverhill, A.. and L.J. Clewlow (1990), "Valuing Average Rate ('Asian') Options," Unpublished Discussion Paper, University of Warwick.

Cox, J.C. and S.A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," Journal of Financial Economics, Vol.3, 145-166.

Goldman, M.B., H.B. Sosin, and M.A. Gatto (1979), "Path Dependent Options: 'Buy at the Low, Sell at the High," Journal of Finance, Vol. 34, 1111-1127.

Ikeda, N. and S. Watanabe (1989), Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, Second Edition, North-Holland.

Ingersoll, J.E. (1987), Theory of Financial Decision Making," Rowman & Littlefield Publishers.

Harrison, J.M. and D. Kreps (1979),"Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," Journal of Economic Theory, Vol. 20, 381-408.

Kunitomo, N. (1990), "Improving the Parkinson's Estimation Method of Security Price Volatilities," Discussion Paper No.90-F-16, Faculty of Economics, University of Tokyo.