92-J-10

ファイナンスと確率解析

国友直人
（東京大学経済学部）

1992年10月

ファイナンスと確率解析[*]

国友直人[‡]

1992年10月

1　はじめに

現代の社会において経済学の守備範囲と考えられている分野を挙げてゆくと多種多様である。また、それぞれの分野における分析方法も歴史的分析から数学的分析などまで様々な方法が用いられている。こうした経済学の分野の中でも金融経済学あるいはファイナンス (finance) と呼ばれている分野は最近になって顕著な発展をとげている。この分野の発展は日本の経済的地位が高まるとともに日本の金融市場の規模が拡大をとげる中で、銀行業・証券業・保険業などをはじめ金融の実務的観点からも応用されているのでこうした実務的必要性に意味でも重要となっている。

このファイナンスにおける最近の理論的な展開においては不確実性を扱う方法として確率論が標準的用具として用いられている。この小論ではなぜ確率論を用いる必要性が生じるかについて経済学に近いと思われる観点から一つの理解を示しておきたい。この小論においてはいくつかの例を通してファイナンスにおける派生証券理論の数学的構造に言及し、様々な確率解析の応用可能性を指摘する。こうしたファイナンスにおける確率論の利用において単に経済学者にとって必要な便宜的な道具を提供していることにのみに意味があるとするのは極めて一面的な理解である。あらかじめ、ここでの主張をまとめておけば次のように要約できる。

---

[*]準備草稿 92-10-6。この解説論文は 1992 年 12 月に神戸大学理学部で開催予定の学際的コンファレンスの為に準備された。

[†]Key Words: ミンコフスキー・ファルカスの補題, 凸集合の分離定理, マルチンゲールの表現定理, 汎関数中心極限定理, 大数法則, 丸山・Girsanov の定理, 伊藤の補題,Fractional ブラウン運動, 幾何ブラウン運動

[‡]東京大学経済学部

「ファイナンスの現象の本質を理解する上で確率論（あるいは確率解析的アプローチ）は自然な形で必要であり、したがってこの分野における今後の発展にとっても不可欠と考えられる」

確率論はこれから当分の間ファイナンス理論の展開にとって有用であり、確率論にとってはファイナンスをはじめとする経済学の新しい分野は新たな興味ある応用分野として位置づけられるべきであろう。

2　裁定条件

ファイナンスにおいて近年発達をとげている派生証券価格についての理論の中で裁定(arbitrage)の論理が大きな役割を演じている。ここで裁定とはさしあたり「２つ以上の市場で同時に証券売買を行うことによってリスクをゼロにして利益を得る」ことを意味することにしよう。金融市場の参加者を大きく分類するならば、リスク回避を目的とする「ヘッジャー」及び多少のリスクがあっても高い収益を求める「スペキュレーター（投機家）」がいるが、最近では日本の市場においてもゼロのリスクで収益を得ようとする「アービトレージャー（裁定家）」の存在も話題となっている。

現実に時々刻々と価格変動を繰り返しながら発展している金融市場では取引コストや情報の不完全性をはじめとして、その他、様々な理由によって明らかな「裁定の機会」の発生を観察することもある。しかしながら、理論的に市場における様々な証券の"fair"（公平な）価格を導く上ではこれらの理由を捨象して裁定の機会が存在しない条件(no arbitrage condition)を用いる方が妥当であろう。ここで一般的に云えば「裁定機会の非存在」はいかなる意味においても「経済均衡が存在する」為の必要条件になっていると考えられる。

そこで裁定条件の典型的な例として国際金融論においてしばしば言及される「先渡し契約(forward contract)」を例として考えてみよう。国際金融論では円・ドル為替レートなどを用いて説明することが多いが、この契約は特に国際金融市場に限定されるわけではないことをあらかじめ注意しておく。記号として時刻 t において価格が S_t である証券に対する満期Ｔの先渡し契約（すなわち、時刻 T において必ず証券を引き渡すという契約）を考えよう。満期におけるドルの引渡し価格を E、満期までの期間を $\tau = T - t$ としておく。またリスク・フリーの債券 B が存在するも

のとしてその金利を簡単化の為に r(一定) としておこう。例えば日本におけるドルを原証券と考えてみればよいが、国際金融市場における円・ドル・レートは様々な理由から変動しているので個々の経済主体にとってはこのような「将来」についての契約を「現在」結ぶことの意味は大きい。そこで当然のことながら市場参加者が将来時点においていくらの価格で証券を引き渡すことをいま合意するかが問題となる。

満期における原証券の価格を S_T で表すとき次のような 2 つのポートフォリオ（金融資産の組み合わせ）を考えよう。

A :1 単位の原証券を保有する。

B :1 単位の先渡し契約と $Ee^{-r\tau}$ 単位の債券を保有する。

ここで期間 $[t, T]$ の間にこの証券を保有することによって何の所得も得られないと仮定すれば時刻 T ではポートフォリオ B の保有者は手持ちの債券を価格 E で売却してこれを用いて先渡し契約により価格 S_T の原証券を確実に手に入れることができる。したがって、期間 $[t, T]$ の間における 2 つのポートフォリオの価値の変化は以下のようにまとめられる。

表 1: 価値の変化

ポートフォリオ	t	T
A	S_t	S_T
B	$Ee^{-r\tau}$	S_T

ここで 2 つのポートフェリオの時刻 T における価値は等しいことに注意しよう。先渡し契約には不確実性は存在しないと考えられるのでもし裁定の機会が無ければ時刻 t においても 2 つのポートフォリオの価格は等しくなければならない。すなわち

$$S_t = Ee^{-r\tau} \tag{2.1}$$

が成立する。ところで先渡し契約の場合には時刻 T まで金銭の授受は発生しない。ここで時刻 t における先渡し契約の価格を記号 f_t で表すことにするとこの価格は時刻 T における引き渡し価格 E に等しいと考えることができる。したがって

$$f_t = E = S_t e^{r\tau} \tag{2.2}$$

によって与えられることになる。ここで時刻 t において

$$f_t = E > S_t e^{r\tau} \tag{2.3}$$

が成立していたとしよう。このとき、リスク・フリーで借りることができるので原証券を保有してさらに時刻 T において価格 f_t で原証券を引き渡す先渡し契約を時刻 t において売ることが可能である。このとき時刻 T においてこのポートフォリオCの保有者は契約1単位当たり必ず

$$f_t - S_t e^{r\tau} > 0 \tag{2.4}$$

だけの利益を確実に得ることができる。

さらに時刻 t において

$$f_t = E < S_t e^{r\tau} \tag{2.5}$$

が成立していたとしよう。このときには原証券を価格 S_t だけ空売り (short sales) して得た金額を金利 r で貸しつけ、さらに先渡し契約を購入する（すなわち、時刻 t において原証券を価格 f_t で受け取る契約）ポートフォリオDを考える。このとき時刻 T においてこのポートフォリオDの保有者は契約1単位当たり

$$S_t e^{r\tau} - f_t \tag{2.6}$$

の利益を確実に得ることができる。

次にこの証券の保有者が期間 $[t, T]$ において連続複利で毎期 d %の所得を受け取ることを考えよう。(例えば円・ドル為替レートの場合にはドル資産のリスク・フリーの金利を考えればよいであろう。) このときポートフォリオAの代わりのポートフォリオとして次を考えよう。

$A' : S_t e^{-d\tau}$ 単位の原証券を保有する。

表 2: 価値の変化

ポートフォリオ	t	T
A'	$S_t e^{-d\tau}$	S_T
B	$Ee^{-r\tau}$	S_T

表 1 と同様にするとポートフォリオ A' と B の価値の変化は次のようになる。

したがって前と同様の裁定機会の非存在を仮定すると

$$S_t e^{-d\tau} = Ee^{-r\tau} \tag{2.7}$$

となる。故にこの場合の先渡し契約の価格は時刻 T における原証券の引き渡し価格に一致するので、

$$f_t = E = S_t e^{(r-d)\tau} \tag{2.8}$$

によって与えられることになる。

不確実性下のもとで裁定機会が存在しない為の条件を議論する為にまず簡単な数値例を使って考えよう。いま時刻 0,1 からなる 2 期間の経済モデルを考える。いまこの経済にはリスクの伴わない債券の他に時刻 $t=1$ においてリスクを伴う 2 つの証券 Z_1, Z_2 が存在するものしよう。いま仮に時刻 $t=0$ においては証券 Z_1, Z_2 の価格が 10 となっているものとして，時刻 $t=1$ においては 2 つの不確実な自然の状態 ω_1, ω_2 に対して証券 Z_1 と証券 Z_2 の保有により得られる収益が以下の表で与えられていると想定してみよう.

ここで時刻 $t=0$ において証券 Z_1 と証券 Z_2 の保有量を y_1, y_2 としよう。ただし負の保有（すなわち「空売り (short sales)」の可能性）をも許すことにするので $y_i, i=1,2$ は任意の実数である。以上の設定のもとでは時刻 $t=1$ においてもし自然の状態 ω_1 が実現すれば

$$6y_1 + 12y_2 \geq 0 \tag{2.9}$$

表 3: 利得表

自然の状態 \ 証券	Z_1	Z_2
ω_1	6	12
ω_2	6	18

のときに収益が非負となる.（図 1 の斜線領域である。）同様にして状態ω_2が実現すれば

$$6y_1 + 18y_2 \geq 0 \tag{2.10}$$

のときに収益が非負である.（図 2 の斜線領域である。）したがって図 1 と図 2 より時刻 $t = 1$ において状態ω_1と状態ω_2のいずれが実現しても非負の収益を得ることが出来る条件は (y_1, y_2) の領域として図 3 の斜線部分により表すことができる。ここで (y_1, y_2) はリスクを伴う 2 つの証券の保有ポジションを表しているが，特に直線

$$10y_1 + 10y_2 = 0 \tag{2.11}$$

を図 3 に書き込めば，領域 $10y_1 + 10y_2 < 0$ はネットの証券保有ポジションが負となる領域を表すことに注意しよう。例えば直線上の点 $(-10, 10)$ を保有ポジションとして選べばこの経済では明らかに「free lunch」（タダの昼食, あるいは裁定の機会の別称）を楽しむ可能性が存在することが確認できよう。次に表 3 で与えられていた状態ω_2における収益を変化させて 2 つのリスクを伴う証券の保有に伴って生じる収益が次の表で与えられる経済を考えよう。

表 4: 利得表

自然の状態 \ 証券	Z_1	Z_2
ω_1	6	12
ω_2	18	6

この経済では時刻 $t=1$ において状態ω_2が実現すれば非負の収益が得られる範囲は

$$18y_1 + 6y_2 \geq 0 \tag{2.12}$$

によって与えられる。（図 4 の斜線領域が対応する。）したがって図 1 と図 4 とを組み合わせれば，この経済においては状態ω_1と状態ω_2のいずれが実現しても非負の収益を得ることが出来る (y_1, y_2) の領域は図 5 の斜線部分で与えられることがわかる。図 5 においてはネット・ゼロの保有ポジションを表す直線

$$10y_1 + 10y_2 = 0$$

は斜線部分とは原点を除いて交わることはない。すなわち，この場合には「free lunch」を享受することはできなくなり裁定の機会は消滅していることがわかる。　ここで表 4 で表現されている「free lunch」が存在しない経済について次の事実に注目しよう。自然の状態ω_1とω_2に対する 2 つの非負の収益線に関する法線ベクトルはそれぞれ $(6,12)'$,$(18,6)'$で与えられている。時刻 $t=0$ の価格ベクトルは $(10,10)'$であるのでこの 3 つのベクトルの間には

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \pi_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \pi_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

を満足する非負ベクトル$\pi' = (\pi_1, \pi_2)'$が存在することが分かる。（図 6 を参照。）この方程式を解けば幸いにも基準化則$\pi_1 + \pi_2 = 1$ をも同時に満足して $(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ となる。ここでπ_1とπ_2をそれぞれ時刻 $t=1$ における自然の状態ω_1, ω_2に対する評価確率と見なせば，時刻 $t=1$ においてリスクを伴う 2 つの証券の期待金額はそれぞれ

$$p_1 = E(Z_1) = 6\pi_1 + 18\pi_2 = 10 \tag{2.14}$$

$$p_2 = E(Z_2) = 12\pi_1 + 6\pi_2 = 10 \tag{2.15}$$

となる。すなわち時刻 $t=1$ における Z_1の期待価格と Z_2の期待価格は時刻 $t=0$ における 2 つの証券の価格水準 10 に等しいことが分かる。すな

わち、時刻$t=0$におけるこれら2つの証券価格は裁定機会が存在することの無い価格であり、一種の均衡価格（あるいは理論価格とも呼ばれる）であると考えることができる。

ここで明らかなように以上の数値例においては「no free lunch」条件のみを用いて理論価格を導いていることに注目しておこう。すなわち以上で求められた理論価格は人々のリスクに対する選好とは独立に決まっていることになる。

3　裁定価格の基本定理

ここで対象となる経済においてリスクの伴う証券の数が有限であってしかも不確実な自然の状態も有限個しかない場合には前節の数値例で説明したことはそのまま成立する。数値例では時刻$t=0$における価格ベクトルを$p'=(p_1,p_2)=(10,10)$，証券Z_1,Z_2の保有ポジションを$y'=(y_1,y_2)$，時刻$t=1$における利得表を

$$Z=(z_{ij})=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

とおいたと見なすことができる。一般にK個の証券とM個の自然の状態が存在する場合にも同じ記号を用いることにすれば時刻$t=1$において非負の収益が存在する領域は

$$Zy \geq 0 \tag{3.1}$$

によって表せる。時刻$t=0$におけるネット・ゼロの保有ポジションは

$$p'y = 0 \tag{3.2}$$

によって表せる。このような有限次元の場合には次の命題が成立することが知られている。

命題 1 次の3つの主張は同値である.
(i)$p'y<0$ならば$Zy\geq 0$となる実ベクトルyは存在しない。

(ii)$Zy \geq 0$ となる任意の実ベクトル yにたいして $p'y \geq 0$ となる.
(iii)$\pi' Z = p'$となる非負ベクトル$\pi = (\pi_i) \geq 0$ が存在する。

ここで条件 (i) $p'y < 0, Zy \geq 0$ が成り立つときに「第 2 種の裁定機会」が存在すると云うことがある。命題 1 の条件 (i) は第 2 種の裁定機会が存在しないことと同等である。これに対して条件 (ii) $p'y \geq 0, Zy > 0$ が成り立つときに「第 1 種の裁定機会」が存在すると云うことがある。命題 1 から容易にわかるように条件 (iii) を満足する正ベクトル$\pi > 0$ が存在する必要十分条件は「第 1 種及び第 2 種の裁定機会が存在しない」こととなる。

ところで命題 1 は実は線形代数学において **〈ミンコフスキー・ファルカス (Minkowski=Farkas) の補題〉** としてよく知られている内容そのものである。このように裁定の経済理論には自然な形で「数学的構造」が含まれていることがこの命題によって明らかになった。ここで前節の数値例で用いた図 5 からこの問題の数学的構造を考察するとこの命題は**分離定理**と呼ばれている内容の特殊な場合であることが推察される。

次に以上で用いた議論を用いて証券の理論価格を見てみよう。「no free lunch」条件より得られた確率を用いて関数$\pi\left(1(\omega_i)\right) = \pi_i$ としよう。このとき原証券 Z_1の理論価格 p_1を関数$\pi(\cdot)$ と見て

$$p_1 = \pi\left(Z_1\right) = \sum_i \pi_i z_{1i} \tag{3.3}$$

と書くことにしよう。同様に原証券 $Z_j, j = 2, \ldots$ についても $p_j = \pi\left(Z_j\right)$ としておく。このとき複数の証券 Z_jより作られるポートフォリオ $Z = \sum_j y_j Z_j$ に対して線形関数$\pi\left(\cdot\right)$ を

$$\pi(Z) = \pi\left(\sum_j y_j Z_j\right) = \sum_j y_j \pi\left(Z_j\right) \tag{3.4}$$

によって定めることができる。したがって関数$\pi(\cdot)$ は原証券を表している確率変数 Z_jに対する線形汎関数と考えることができる。そこで例えば原証券から作られる先渡し契約や後に説明するオプション契約 (option contracts) などの派生証券 (derivative security) のペイ・オフを確率変数 Xで表そう。確率変数 Z_jの分布から確率 $P(X = x_j) = \pi_j^*$となるとするときこの派生証券の理論価格が

$$\psi(X) = \sum_j x_j \pi_j^* \tag{3.5}$$

となるように$\pi(\cdot)$を（一意的に）拡張して汎関数$\psi(\cdot)$を考えることが出来る。この記号のもとでは$\psi(X) = 0$が分離超平面 (separating hyperplane) に対応している。例えば前節の数値例では直線

$$\begin{aligned} \psi(y_1 Z_1 + y_2 Z_2) &= y_1 \psi(Z_1) + y_2 \psi(Z_2) \\ &= 10y_1 + 10y_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

が正の収益に対応する領域$\psi(y_1 Z_1 + y_2 Z_2) > 0$と負の収益に（すなわち損失の機会）対応する領域$\psi(y_1 Z_1 + y_2 Z_2) < 0$を分離している．また、集合$M$を

$$M = \{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p' \\ Z \end{pmatrix} y \geq 0, \quad \forall y \in R^k \} \tag{3.7}$$

とおけば同じ問題を条件

$$M \cap \{0\} = \phi \tag{3.8}$$

から解くこともできよう。

ここで実は以上の議論は経済に存在する自然の状態や証券の数が無限大の場合にも拡張することができることに注意しておこう。数学的には二乗可積分の確率変数に限定してL^2空間を考えると見通しの良い結果を得ることができることが予想される。実際、関数空間における〈**凸集合の分離定理**〉を用いれば「裁定機会の非存在条件」と「派生証券の理論価格の存在」の同等性を示すことができるように期待されよう。これがHarrison=Kreps(1979)が主張する〈裁定価格の基本定理〉の第一のエッセンスと解釈される。ここで自然の状態や証券の数が無限大の場合を考察するのは現実の経済に存在している証券は有限個に限られていることより意味がないと思われるかもしれない。しかしながら状態が無限に存在していれば現実に存在している有限個の証券にもとづいて作ることのできる条件付請求権（contingent claims）は無限に存在する。また後で説明するブラック・ショウルズの連続時間の経済モデルの有用性を考えればこの一般化はあながち架空の議論とは言えないであろう。

4　オプション契約の数値例

前節で用いた数値例を利用してオプション契約と呼ばれている派生証券についての簡単な応用を考えて見よう。ここでオプション契約では満期と呼ばれるある将来の時点においてある権利行使価格で原証券を手に入れることができるのでそのペイ・オフは原証券の非線形関数となることに特徴がある。オプション契約の原時点の価格とはオプション契約の購入に対して契約時点で支払われるプレミアムの値段のことである。(したがって、以前に例として説明した先渡し契約とは意味が異なっている。) このようなオプション契約を簡単な数値例を用いて示しておこう。

いま時刻 $t=0$ 時点では時刻 $t=1$ における証券 Z_1 と Z_2の価格が不確実であり、確率変数 $Z_1(1), Z_2(1)$ とおく。時刻 $t=1$ において権利行使価格6 により非線形のペイ・オフ

$$max\,(Z_1(1), Z_2(1)) \tag{4.1}$$

を受け取ることのできるオプション契約が時刻 $t=0$ において市場に存在するものとしよう。このオプション契約の時刻 $t=0$ における理論価格を求めるのは実際的にも重要な問題である。前節の議論からオプション契約のペイ・オフを $X = max\,(Z_1(1), Z_2(1)) - 6$ とおけば既に求めた理論確率分布$\pi' = (\pi_1, \pi_2)$ を用いて$\psi(X)$ を計算すれば

$$\begin{aligned} \psi(X) &= E[max\,(Z_1(1), Z_2(1)) - 6] \\ &= (12-6)\tfrac{2}{3} + (18-6)\tfrac{1}{3} = 8 \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる。ここで念のためこのオプション契約を新たに証券 Z_3として表 2 のペイ・オフ行列を拡張してみると次のようになる.

このとき、もしこの経済で時刻 $t=0$ において 3 つの証券 Z_1, Z_2, Z_3 の価格がそれぞれ $Z_1(0)=10, Z_2(0)=10, Z_3(0)=8$ となっているとすればこの拡張された経済においても「free lunch」は存在しないことを確かめることができる。すなわち、もしこのオプション契約の価格が 8 であれば裁定取引によってリスクがゼロで利益をあげることは不可能なのである。さてオプション契約の価格理論を学んだことがあればここで説明

表 5: 利得表

自然の状態 \ 証券	Z_1	Z_2	Z_3
ω_1	6	12	6
ω_2	18	6	12

した確率測度はオプション契約の評価法としてよく用いられているリスク中立化法 (risk neutralized method) における確率測度（リスク中立化確率測度と呼ばれている）に対応していることが推察されよう。この予想は正当化されるが、その正当化の論理を正しく理解するには次節で述べる証券価格の動学的構造を考える必要がある。

5 裁定機会の非存在とマルチンゲールの存在

前節の例を少し複雑にして経済における証券価格の時間的（動学的）動きを考えよう。いま将来収益についてリスクを伴う 2 つの証券 Z_1, Z_2 が存在する 3 期間の経済モデルを考えよう．時刻 $t = 0, 1, 2$ における証券 Z_1, Z_2 の価格ベクトルを

$$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))'$$

とおくときにこれが図 7 のような数値をとるものとしよう。この数値例については既に時刻 $t = 1$ の事象についての「no free lunch」条件から理論確率 $\pi_1 = 2/3, \pi_2 = 1/3$ が得られることを説明した。次にいま仮に時刻 $t = 1$ において価格が $Z(1) = (6, 12)'$ となっているものとしよう。この事象が実現すると時刻 $t = 2$ においては図 7 における 3 つの可能性 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ が考えられる。$Z(1) = (6, 12)'$ からそれぞれの事象に進む確率をそれぞれ q_1, q_2, q_3 とすると再び「no free lunch」条件より前節の命題と基準化則 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ を用いると理論確率は方程式

$$(5.1) \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = q_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} + q_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + (1 - q_1 - q_2) \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

を解けば $q_1 = 1/4, q_2 = 1/4, q_3 = 1/2$ で与えられることがわかる。全く同

様の議論を時刻 $t=1$ における価格が $Z(1)=(18,6)'$ となる場合にも適用することができる。この場合に3つの事象に進む確率をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とおけば $r_1=r_2=r_3=1/3$ となることがわかる。ただし以上で求めた確率 $q_i, r_i (i=1,2,3)$ は条件付確率であることに注意しておこう。例えば

$$(5.2) \qquad q_1 = P\{Z(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} | Z(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\}$$

となる。この数値例で表される経済における基本事象を図7のように $(\omega_1, \ldots, \omega_6)$ とすればこれら基本事象の確率は条件付確率より

$$(5.3) \qquad P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{6}, P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = P(\omega_5) = P(\omega_6) = \frac{1}{9}$$

によって与えられる。さてこのように「no free lunch」条件から求めた確率測度を P^*をしよう。このとき確率測度 P^*によって証券価格 $Z(t)$ の時間に伴う動き $(t=0,1,2)$ を特徴づけることができる。いま時刻 $t=0$ における価格を所与とすると時刻 $t=1$ における $Z(1)$ の条件付期待値は

$$(5.4) \qquad E^*[Z(1)|Z(0)] = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = Z(0)$$

となる。さらに時刻 $t=0,1$ における証券価格 $Z(0), Z(1)$ を所与とするとき時刻 $t=2$ における証券価格 $Z(2)$ の条件付期待値についても

$$E^*[Z(2)|Z(1), Z(0)] = Z(1)$$

が成立する。ここで一般に条件付期待値について確率1で方程式

$$(5.5) \qquad E^*[Z(t)|Z(t-1), \cdots, Z(0)] = Z(t-1) \ \ a.s.$$

を満足するとき確率過程 $Z(t)$ はマルチンゲール (martingale) と呼ばれている。マルチンゲールはもともと「公平な賭 (fair gambling)」の概念を一般化した確率過程と考えることができる。以上の数値例において「no free lunch」条件からマルチンゲール過程の存在が例証された。このマルチンゲールとなる確率測度の存在定理が Harrison=Kreps(1979) の〈裁定価格の基本定理〉の第二のエッセンスと解釈される。この裁定価格の基本定理の第二の経済学的な内容をきわめて直観的にまとめれば以下のようになる。

命題 2 リスクの伴う証券 $Z(t)$ が存在する市場において自然の状態が有限で取引きの機会が有限回ならば次の条件は同等である。
(i) 裁定機会が存在しない。
(ii) 証券価格の確率過程 $\{Z(t)\}$ がマルチンゲールとなるような確率測度 P^*が存在する。

ここで経済学的に見て命題2の重要な含意を述べてみよう。いまリスクを伴う証券が存在する市場において時刻 $t=0$ において取引可能であって将来の時刻 $t=T$において不確実なペイ・オフを持つ任意の証券を X としよう。この X についての確率測度 P^*による評価

$$(5.6) \qquad \psi(X) = E^*[X]$$

により$\psi(\cdot)$ を定義しよう。例えば時刻 $T=t_n$におけるポート・フォリオを $X = y(t_n)' Z(t_n)$ としよう。ただし $y(t_n), Z(t_n)$ はそれぞれ各証券の保有量を表している証券保有ベクトル及び各証券の価格を表している証券価格ベクトルである。ここで時刻 $t_1, \cdots, t_n$において証券の取引を行うことができるものとしよう。さらに証券からポートフォリオを組み変えるときに許容される (admissible) 戦略として各時点において

$$(5.7) \qquad y(t_i)' Z(t_i) = y(t_{i-1})' Z(t_i)$$

となる自己充足的 (self-financing) 戦略に限ることにする。簡単に云えば、この戦略では各時刻 t_iにおいてはその時に得られるポートフォリオの価値の外から新たに投資は行わないことを意味している。このとき $Z(\cdot)$ は確率測度 P^*についてマルチンゲールであるので

$$(5.8) \qquad E^*[y(t_n)' Z(t_n) | Z(t_{n-1})] = y(t_{n-1})' Z(t_{n-1})$$

となる。この議論を続けて行けば結局 $0 = t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$に対して

$$(5.9) \qquad \begin{aligned} E^*[X] &= \psi(y(t_n)' Z(t_n)) \\ &= \psi\left(y(0)' Z(0)\right) \\ &= \pi\left(y(0)' Z(0)\right) \\ &= y(0)' Z(0) \end{aligned}$$

となる．したがって時刻$t=t_n$における確率変数Xに対する価格汎関数$\psi(\cdot)$は時刻$t=0$において取引が行われている証券Z_jに対する価格汎関数$\pi(\cdot)$による評価に一致している。今度は逆に条件付請求権Xとして特に

$$X=1(\omega_i) \tag{5.10}$$

とおけば

$$P^*(\omega_i)=\psi[1(\omega_i)]=\pi[1(\omega_i)] \tag{5.11}$$

により確率測度P^*を定めることができる。このとき数値例から明らかなように証券価格$Z(t)$はP^*についてマルチンゲールになっている。すなわち確率測度P^*と価格汎関数$\psi(\cdot)$は一対一に対応することがわかる。

命題 3 自然の状態が有限で取引の機会が有限回であれば確率測度P^*と価格汎関数$\psi(\cdot)$は一対一に対応する。

以上に述べた2つの命題の証明はHarrison=Pliska (1981) に与えられている。ここで連続時間の確率モデルにすると若干の数学的問題が生じるがこの命題はそのまま成立することが期待される。例えば確率変数の空間をL^2空間に限ると〈**リースの定理**〉を用いることになる。さらに、Kunita=Watanabe (1967) による〈**L^2空間上のマルチンゲール表現定理**〉を用いれば拡散過程 (diffusion process) における派生証券の価格が表現されたり、また〈**等価マルチンゲールの存在定理**〉により与えられた確率過程に対してマルチンゲールが存在する条件を得ることができる。

以上で説明したように命題3を用いるとリスクを伴う証券が存在する市場において取引可能な任意の条件付請求権 (contingent claim)X の理論価格を求めることができることがわかった。すなわちX がマルチンゲールとなる確率測度P^*を用いて評価して

$$\psi(X)=E^*[X] \tag{5.12}$$

を計算すればこれがX の理論価格となる。この方法はオプション価格理論においてはリスク中立化法 (risk netralized method) として知られている。したがって命題2と命題3はこの方法を正当化したことになる。

再び簡単な数値例を考えよう。いま満期 $t=2$ において権利行使価格 6 により金額

$$\max_{0\leq t\leq 2}\{Z_1(t), Z_2(t)\}$$

を手に入れることのできるオプション契約を考えよう。時刻 $t=0$ におけるこのオプションの理論価格は既に求めた確率測度 P^* を用いれば

$$E^*[\max_{0\leq t\leq 2}\{Z_1(t), Z_2(t)\}-6]=\frac{94}{9} \tag{5.13}$$

で与えられることがわかる。

こうしたオプション契約が現実の経済に存在する意味はなんであろうか?簡単にそのメリットを云えばオプション契約により市場が作られることである。例えば証券の数が2つ、自然の状態が3つの場合には一般に2つの資産を適当な比率で保有するだけではすべての可能性に対して最適な戦略を選ぶことは困難である。しかしながら第3番目の証券を作り出すことができればこのことは可能である。例えば今2つの証券の価格が $(6,12)'$ のときペイ・オフが次の表で与えられている場合を考えよう。

表 6: 利得表

自然の状態 \ 証券	Z_1	Z_2
ω_1	4	10
ω_2	10	6
ω_3	5	16

この数値例において時刻 $t=1$ のときに状態 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ に対してペイ・オフ $(1,0,0)$ を実現したいとしよう。これを実現するには状態 ω_1 に対して $(10-6)=4$, 状態 ω_2 に対して $(10-6)=4$, 状態 ω_3 に対して $(16-6)=10$ となるオプション契約を導入すればよい。経済全体のペイ・オフ表は以下のようになる。

このオプション契約の公平な価格は前と同様にすれば7となることがわかる。ここで第i証券の保有額を $y_i, i=1,2,3$ とすると、状態1が実現

表 7: 利得表

自然の状態 \ 証券	Z_1	Z_2	Z_3
ω_1	4	10	4
ω_2	10	6	4
ω_3	5	16	10

すれば必ず 1, 状態 2 が実現すれば必ず 0, 状態 1 が実現すれば必ず 0 と云うペイ・オフを作り出すには方程式

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 10 & 6 & 4 \\ 5 & 16 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

を解けばよい。同様にして $(0,1,0)$,$(0,0,1)$ というペイ・オフを作ることも可能であるのでこれらを組み合わせれば

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

より任意のペイ・オフを作りだすことが可能となる。すなわち、オプション契約が導入する以前の経済と導入されたあとの経済を比べると、経済に存在する 2 つの証券（すなわち原資産）では実現することのできなかったペイ・オフをオプション契約（すなわち派生証券）により可能となったわけである。ここでオプション契約のペイ・オフが退化しない条件が必要であるがこの条件下ではオプション契約の導入により市場が完備化 (complete) されたことになる。

ここで完備な市場とは（非負値をとる）任意の派生証券の価値を自己充足的戦略によって到達することが可能な証券市場を意味する。自然の状態が有限個で取引の機会が有限回であれば簡単な同値条件が知られている。

6 幾何ブラウン運動とブラック・ショウルズ理論

経済の諸分野の中でも株式の価格や外国為替レートをはじめとする資産価格は時間の経過とともに刻々とはげしく変動を続けていることは古くから人々によって観察されてきた。新聞やテレビで報道されるニュースでは世界中で起こる政治や経済に関係する出来事とともにしばしば株価や外国為替レートの変動に言及することも増えてきている。また、一部の経済学者だけでなく一般の人々の間においてもこうした変動の話題が増えてきている。こうした中で金融経済あるいはファイナンスに関係する人々の間においてこうした日々あるいは刻々と時間の経過とともに変動している株価や外国為替レートの変動を説明する統計的モデルあるいは確率的モデルとしてどのような確率過程が記述に適当であるか興味が持たれている。この問いに対する系統的な研究は実は相当に古くまで遡ることができる。中でもフランスの学者バシャリエ (Bachelier (1900)) の研究は特筆すべきものとしてファイナンスでは知られている。彼は株価の変動の説明にブラウン運動を用いると言った当時としては画期的なアイデアを提供した。しかしながら、その研究は余りにも時代に先駆的であったことやブラウン運動の偏微分方程式を導いたものの理論的に完全には解決できなかったことなどから特に経済学者の間においてはあまり注目されなかった。その後、ブラウン運動の理論は物理学者や数学者の研究対象となって発展をとげていった。ところが、近年になって経済学の中でもファイナンス分野においてブラウン運動の確率モデルは再び脚光をあびることとなった。1960 年代におけるサムエルソンの一連の研究に始まるこの研究の流れにおいてはブラウン運動を資産価格の確率過程として直接あてはめるのではなくブラウン運動に基ずく幾何ブラウン運動やより一般の連続時間の伊藤過程を用いている。こうした研究分野がなぜ盛んになったのかは興味ある話題であるがその一つの原因としてはオプション契約に関するブラック・ショウルズ理論を挙げることができる。

ここで、時刻 t における株価を S_t(あるいは $S(t)$) で表そう。株式や外国為替のようにほぼ連続的に市場で取り引きが可能な金融資産の価格を理論的に分析しようとする場合には連続時間の確率過程モデルを考えることが便利である。まず期間 $[t, t+\Delta t]$ の間の収益率を $r_t(\Delta t)$ をしよう。価格リスクのある金融資産を証券と呼び、さらに証券保有に伴って生じ

る利益はキャピタル・ゲイン（値上がり益）のみとすると収益率は

$$(6.1) \qquad r_t(\Delta t) = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)}$$

で与えられる。この収益率は互いに無相関としてさらに次の2つの仮定をおこう。(i) 単位時間 Δt あたり期待収益率 $E[r_t(\Delta t)] = \mu\Delta t$ で一定。(ii) 単位時間 Δt あたり収益率の分散 $Var[r_t(\Delta t)] = \sigma^2\Delta t$ で一定。

ここで時刻 t における証券価格は収益率により

$$(6.2) \qquad \begin{aligned} ln\left(\tfrac{S(t)}{S(0)}\right) &\cong ln\left[\prod_{i=1}^{[t/\Delta t]} \frac{S(i\Delta t)}{S((i-1)\Delta t)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{[t/\Delta t]} ln[1 + r_{(i-1)\Delta t}(\Delta t)] \end{aligned}$$

と表される。さらに時間単位 $\Delta t \to 0$ として〈**汎関数中心極限定理 (functional central limit theorem)**〉あるいは不変原理 (invariance principle) 及び〈**大数の法則**〉を用いれば証券価格 $\{S(t)\}$ がしたがうべき連続確率過程は

$$(6.3) \qquad ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)$$

となることがわかる。ここで $B(t)$ は $[0,1]$ 上のブラウン運動である。したがって、こうした状況では証券価格についての幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) モデル

$$(6.4) \qquad dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

が得られることがわかる。

ところで、こうした幾何ブラウン運動にしたがう確率モデルを考えるという発想はかなり前から存在していたが。そうした原資産価格に対するオプション契約の理論価格はなかなか導くことができなかった。ここに経済学的議論である裁定条件を用いて問題を扱ったのが Black=Scholes (1973) である。彼らの研究では裁定条件からオプション価格のしたがう

偏微分方程式を導いて解を求めるという方法を用いている。ここではより確率解析的アプローチで同じ問題のエッセンスを考えてみよう。

期間 $[0,T]$ における連続時間の経済モデルを考えよう。いまこの経済にはリスクの無い債券（国債を考えればよい）Z_0とリスクを伴う証券 S が存在するものと想定しよう。時刻 $t \in [0,T]$ における Z_0の価格 $Z_0(t)$ はリスクの伴わない短期金利 rを一定とすると

$$Z_0(t) = e^{rt} \tag{6.5}$$

により与えられる。時刻 t における証券 Sの価格を $S(t)$ とすれば瞬時的収益率が

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB \tag{6.6}$$

にしたがっていると考えよう。ここで簡単化の為にドリフト母数μとファイナンスではボラティイリティ(あるいは予想変動率) と呼ばれている母数σは一定としておこう。この経済においてはリスクの伴わない安全資産とリスクのある証券が存在するので、リスクのある証券価格をリスクの無い証券価格で割り引けば

$$Z(t) = \frac{S(t)}{Z_0(t)}$$

である。対数変換を行えば $Z(t)$ のしたがう確率過程は

$$Z(t) = Z_0 e^{\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)} \tag{6.7}$$

より幾何ブラウン運動である。ここでブラウン運動 $B(t)$ より

$$B^*(t) = B(t) + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)t \tag{6.8}$$

を考えよう。この $B^*(t)$ を用いれば

$$Z(t) = Z_0 e^{\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B^*(t)} \tag{6.9}$$

と書くことができる。ここで確率過程 $B^*(t)$ は別の標準ブラウン運動と見なすことができることに注意しよう。すなわち、ドリフト項 $(\mu - r)/\sigma$ を変換した確率測度 P^* についてのブラウン運動となる。このとき

$$dZ = \sigma Z dB^* \tag{6.10}$$

を満足する。ここでより一般的には連続時間の確率過程についての測度変換を行う必要があるが、〈**丸山=Girsanov の定理**〉を用いればよいことが推察できよう。したがって、幾何ブラウン運動の場合には

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z_0 exp\{\left(\mu - r - \tfrac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B(t)\} \\ &= Z_0 exp\{\left(-\tfrac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B^*(t)\} \\ &= Z_s exp\{\left(-\tfrac{\sigma^2}{2}\right) (t - s) + \sigma [B^*(t) - B^*(s)]\} \end{aligned} \tag{6.11}$$

となる。ここで標準ブラウン運動の性質から $B^*(t) - B^*(s)$ は正規分布 $N(0, t - s)$ にしたがう。したがって対数正規分布の性質を利用して期待値をとれば

$$E^*[Z(t)|Z(s), s \leq t] = Z(s) \tag{6.12}$$

となる。すなわち、確率過程 $Z(t)$ は確率測度 P^* に関して裁定機会の存在しない公平なマルチンゲールになることがわかる。さらに、この標準ブラウン運動 $B^*(t)$ を用いてリスクを伴う証券価格の確率過程を書き直せば

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S dB \\ &= r S dt + \sigma S dB^* \end{aligned} \tag{6.13}$$

となる。すなわち原証券価格の確率過程のドリフト項の母数 μ を無リスク債券の収益率である r に置き換えた過程に対応している。こうした変換はリスク中立化法で用いられている確率過程に対応している。一般に経済学においては不確実性が存在した経済における均衡ではリスクの伴う危険資産に対しては市場で決まるリスク・プレミアムがつかなければならないことが知られている。(例えば市場に存在している保険を考えて見れ

ば明かであろう。）しかしながら、ここではμを rで置き換えていることが要請されることは注目に値しよう。

ここでより現実的なオプション契約の評価の例としてヨーローパ型コール・オプション契約の理論価格を導いておこう。ヨーロッパ型とは権利行使の機会が時刻T（満期）のみ与えられるオプション契約である。権利行使価格を E（一定値）とするとコール・オプション契約とは原資産を価格 Eで満期時に取得できる契約である。したがってこのオプション契約の満期におけるペイ・オフは $X = max\{S(T) - E, 0\}$ で与えられる。経済にリスクを伴わない債券が存在するときにはこの契約の時刻 t における評価は

$$X' = e^{-r(T-t)}max\{Z(T)e^{r(T-t)} - E, 0\} \tag{6.14}$$

を確率測度 P^*についての期待値

$$E^*[X'] = e^{-r(T-t)}E^*[max\{Z(T)e^{r(T-t)} - E, 0\}|S(t) = S] \tag{6.15}$$

を評価する問題に帰着されることになる。この公式はリスク中立化法におけるオプションの理論価格の評価の基礎である。

命題 4 安全資産の金利 r（一定）とするとき、裁定機会の存在しないようなヨーロッパ型・コール・オプション契約の理論価格は

$$C(S,t) = E^*[e^{-r(T-t)}max\{S(T) - E, 0\}|S(t) = S] \tag{6.16}$$

で与えられる。

この公式の形から明かなようにコール・オプション契約に限らず他の条件付請求権 (contingent claims) の理論価格も全く同様にして導くことができる。またここでは便宜上リスクの伴う証券価格 $S(t)$ の確率過程が幾何ブラウン運動にしたがう場合についてのみ言及した。しかしながら、連続時間の連続確率過程について一般に適用することができる。ここで具体的にコール・オプション契約の理論価格を導いてみよう。満期を T, 権利行使価格を Eとするヨーロッパ型のコール・オプション契約の時刻 t における理論価格 $C(S,t)$ は (6.16) で与えられているので期待値を計算

すればよい。時刻Tにおけるリスク中立化確率測度に関す確率過程 $S(t)$ の密度関数を $f(S(T))$ とすれば

(6.17)

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_E^\infty S(T) f(S(T))\, dS(T) - Ee^{-r(T-t)} \int_E^\infty f(S(T))\, dS(T)$$

と変形される。対数正規分布の性質を利用してこの積分を具体的に実行すると次のような結果を得る。

命題 5 安全資産の金利 r（一定）とするとき、裁定機会の存在しないようなヨーロッパ型・コール・オプション契約の理論価格は

$$C(S,t) = SN[d_1] - Ee^{-r(T-t)} N[d_2] \tag{6.18}$$

である。ただし、$N(\cdot)$ は単位正規分布の分布関数,

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{6.19}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{6.20}$$

で与えられる。

この理論価格は Black=Scholes (1973) がはじめて導いたのでブラック・ショウルズの公式と呼ばれているが金融界では実務的にもっとも利用されている公式である。ここで簡単な計算からこの解が偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S + C_t - rC = 0 \tag{6.21}$$

を満足していることを示すことができる。この偏微分方程式は Black=Scholes (1973) がオプション契約と債券及び株式との間に成立する裁定条件から導いた方程式に一致する。Black=Scholes (1973) はヨーロッパ型コール・オプション契約の境界条件

$$C(S,T) = max\{S(T) - E, 0\} \tag{6.22}$$

の下でこの偏微分方程式を解きオプション契約の理論価格を導いたのである。したがって本節の説明はそれを逆転した議論になっていることに注意しておこう。この偏微分方程式はオプション価格理論の基本方程式と呼ばれファイナンスでは広く知られている。この命題4の結果は実務的にも様々な興味深い応用がある。(例えばHull (1989) を参照。)

ところで方程式(6.21)は次のようにして求めることもできる。債券と証券が存在している連続時間の経済において時刻tにおける価格はそれぞれ$Z_0(t)=e^{rt}$及び$Z_1(t)=S(t)$となっている。このとき割引きオプション価格$C(S(t),t)e^{-rt}$はブラウン運動B^*についてマルチンゲールになっているはずである。したがって、〈伊藤の補題〉を適用して計算すると

$$
\begin{aligned}
C(S,t)e^{-rt} &= C(S(0),0)+\int_0^t \sigma S e^{-rs} C_s dB^* \\
&\qquad + \int_0^t e^{-rs}\left(\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S + C_s - rC\right) ds
\end{aligned} \tag{6.23}
$$

となる。したがって、左辺がマルチンゲールであることから右辺の第3項は恒等的にゼロとなる必要があるので(6.21)を得ることができるのである。ここでさらに時刻tにおける証券の保有量を$y_1(t)=C_s$, 債券の保有量を$y_0(t)=(C-SC_S)e^{-rt}$として2次元ベクトル$y(t)'=(y_1(t),y_0(t))$を作ろう。このとき時刻tにおけるポートフォリオの価値は

$$
\begin{aligned}
V(t) &= y_1(t)S(t)+y_0(t)Z_0(t) \\
&= C(t) \geq 0
\end{aligned} \tag{6.24}
$$

で与えられる。再びオプション契約の価格$C(S,t)$に対して〈伊藤の補題〉及び(6.21)を用いれば

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V(0)+\int_0^t \sigma S C_S dB \\
&\qquad + \int_0^t \left(\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + \mu S C_S + C_s\right) ds \\
&= V(0)+\int_0^t y_1(t)dS + \int_0^t y_0(t)dZ_0
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

となることがわかる。ここでこの方程式の右辺の第2項は時刻tにおける証券と債券のポジションを$y(t)$としたときに発生する利得を表現していると解釈できよう。また右辺の第1項は初期投資額を意味しているのでこの方程式は自己充足的戦略を表していると考えることもできる。こ

こで最も重要なことは、この連続時間の経済においては $y(t)$ で表される証券と債券のポジションをとれば必ずオプション契約の価値を複製することができることである。実はこのことはここで考えている連続時間の経済が離散確率の例で説明したような完備性を満たしていることを意味している。ここで証券のポジション $y_1(t)$ はしばしばオプション・デルタ呼ばれているが実務的にも重要な役割を果たしている。

7　確率解析アプローチの可能性

最後に今後しばらくの間にファイナンスの分野において確率解析が応用されると考えられる問題を気がつくままに挙げておこう。

(i) **ファイナンス確率過程の理論**

この小論においては金融におけるいわゆる派生証券の価格理論についての経済学的説明を中心にして考えた。そして、あたかも簡単な離散確率の例により示された命題が一般に成り立つように説明した。確率論においては周知のように連続時間の確率過程を考えると様々な数学的問題が生じることが知られている。多次元の証券価格が連続時間の確率過程にしたがうとき (a) 裁定機会の非存在条件,(b) 等価マルチンゲール測度の存在条件, (c) 測度変換の条件,(d) 市場の完備性, などの間には様々な理論的議論が必要である。ファイナンスにおいてよく知られている重要な結果としては Harrison=Pliska (1983) による次の命題がある。

命題 6 連続時間の証券経済モデルにおいて許容的戦略としてポートフォリオを構成する $y(\cdot)$ が可予測 *(predictable)* であって, ポートフォリオが自己充足的かつ非負条件を満たす戦略に限定する。このとき次の 2 つの条件は同等である。
(i) 同値マルチンゲール測度が一意に存在する。
(ii) 証券市場が完備 *(complete)* である。

この結果から例えば連続時間のブラック・ショウルズ理論は正当化されることになる。また、条件 (a) と条件 (b) については連続時間の証券モデルにおいては一般に $(b) \rightarrow (a)$ となることが知られている。ところが Kusuoka (1992a) の最近の研究によれば一般的条件の下で逆の関係も成立するようである。

さらに、以上に挙げた条件 (a)-(d) の他にも (e) 証券価格経路の性質, についても若干の理論的考察が必要と思われる。ここでは興味深いように思われる二つの結果を挙げておこう。Harrison et.al. (1984) は若干の経済学的仮定の下で次の結果を報告している。

命題 7 複数の証券価格 $Z_j(t), j = 1, \cdots, K$が連続時間の連続確率過程で表される経済においてはもし裁定の機会が存在しなければ証券価格の経路は非有界変動でなければならない。

ここでブラウン運動の経路は非有界変動であることは良く知られているが、その他の確率過程、例えば〈**Fractional** ブラウン運動〉もまたこうした性質を持つことも知られている。(Mandelbrot=Van Ness (1968) を参照。) しかしながら、Kunitomo (1992) は Kôno (1969) の結果を用いて次のことを主張している。

命題 8 *Fractional* ブラウン運動 $\{B_H(t)\}$ においてもし $H \neq \frac{1}{2}$ ならば $B_H(t)$ をマルチンゲールとするような確率測度は存在しない。

これらの結果によれば上に挙げた条件 (a) と条件 (e) は密接に関連していることを意味するばかりでなく、連続時間の証券経済モデルとしてはブラウン運動にもとずく伊藤過程（あるいは diffusion process）が妥当であると解釈されよう。

さらに、連続時間モデルは理論的モデルとして美しい反面、現実には離散時間で考えざるを得ない側面も多く存在する。例えば現実の取引きには様々な取引コストが存在しているがこうした現実的問題を理解する上でも離散時間の証券モデルと連続時間の証券モデルの関連を分析することは重要であると考えられる。(例えばこうした問題については Willinger=Taqqu (1991) 及び Kusuoka (1992b) が参考になろう。) また、ファイナンスにおいては配当 (dividend) をはじめとして必ずしも連続過程として見なすことのできない要素も観察されることが指摘できる。一般的にジャンプ過程を含めた確率論的考察は半マルチンゲール (semi-martingale) 理論を用いた Harrison=Pliska (1981) を挙げることができるが、いまだ十分に満足する形としては発展していないようである。

(ii) **様々な派生証券の評価**

現実の経済においては実物経済の問題に係わる様々な理由からオプション契約をはじめワラント債・転換社債など原証券に対する派生証券

と見なすことのできる証券が多数存在している。こうした派生証券としてのオプション契約の中で、例えば最近アジア型オプション契約 (Asian options) と呼ばれている契約が注目されているので取りあげてみよう。このオプション契約は平均オプション契約 (average options) とも呼ばれているが、満期におけるペイ・オフは連続時間の表現では

$$max\{\int_0^T S(t)dt - E, 0\} \tag{7.1}$$

である。ただし権利行使価格 Eは一定値である。この種のオプション契約の評価問題については国友・高橋 (1992) が$\sigma \to 0$ となる小分散理論による評価法を提案している。また、Yoshida (1992) はより精密な漸近的な近似理論を応用している。さらに、幾何ブラウン運動の場合 (7.1) 式の厳密な評価についての Yor (1992) の最近の研究が注目される。この平均オプション契約を含めこうしたオプション契約は一般に経路依存型オプション契約と呼ばれているが、こうした契約の評価問題は確率解析の方法が有効であろう。また、実際の金融市場には様々な制約条件の付いたオプション契約も取り引きされているが、例えば幾何ブラウン運動にしたがう証券価格にある種の境界条件がついた場合のオプション理論を Kunitomo=Ikeda (1992) が展開している。ところで、市場において実際に最も広く取り引きされているのはアメリカ型と呼ばれているオプション契約 (American options) である。この契約に関する評価理論は Merton (1973) により始められたがなお重要な未解決の問題が存在している。この契約では一般に権利行使が止め時 (stopping times) になっているので一般にヨーロッパ型オプション契約の評価よりも困難であることのみを指摘しておこう。

(iii) 様々な確率過程の応用

現実の金融市場においては実物経済との関連において様々な金融商品が開発され、取引きが行われている。その中でも重要な例としては債券や金利を挙げることができるが、こうした金融手段を表現する確率過程については最近さまざまなアプローチが提唱されている。こうした確率過程では確率過程の非負性だけでなくいくつかの制度的特長がある。例えば債券には満期が存在するので満期を Tとして $B(t,T)$ と表現すれば、金融市場には様々な満期の債券 $\{B(t,T), 0 \le t \le T\}$ が互いに連動して変動している。したがって、すぐに幾何ブラウン運動は理論的に好ましくないことを指摘することができよう。債券価格における裁定価格理論とし

ては Health=Jarrow=Morton (1992) の連続モデルが注目されている。さらに、より経済学的テーマとしては株式をはじめとする動的に変動する多数の不確実な金融資産が存在するとき (i) 個人の異質性と情報, (ii) 市場の完備性と不完備性, (iii) 経済均衡や経済の効率性, などの分析を挙げることができる。この方面では例えば動学的最適制御を用いた経済均衡の条件を考察している Cox=Ingersoll=Ross (1985) が基本的文献であろう。

(iv) **統計的問題**

経済現象を記述する確率過程モデルを現実のデータを使って研究する場合には様々な統計的問題が生じる。多くの場合には普通の研究者にとっては非常に短い時間単位のデータを利用する事は不可能である。したがって、離散時間で観測されるデータから連続時間モデルを統計的方法により計測することが一般的であるが、離散時間と連続時間の計測に関する新たな問題やボラティリティーの変動を統計的にモデル化する必要性が生じることが指摘されている。そこで、こうした金融時系列を分析する際に生じる統計的問題について計量経済学者や一部の統計学者が活発な研究を始めている。

参考文献

[1] Bachelier, L.(1900),Theorie de la Speculation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*,Vol.17,21-86. [In The Random Character of Stock Market Prices.by P.Cootner,ed., The MIT Press(1964).]

[2] Black, F. and M. Scholes (1973),The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-359.

[3] Cox,J. J.Ingersoll and S. Ross (1985), An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica*, 53, 363-407.

[4] Heath,D. R.Jarrow, and A.Morton (1992), Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica*, 60, 77-105.

[5] Harrison, J.M. and D.M. Kreps(1979), Martingales and Arbitrage

in Multi-period Securities Markets, *Journal of Economics Theory*, 20,381-408.

[6] Harrison, J.M. and S. Pliska (1981), Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and Their Applications*, 11, 215-260.

[7] Harrison, J.M. and S. Pliska (1983), A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets, *Stochastic Processes and Their Applications*, 15, 313-316.

[8] Harrison, J.M., R.Pitbladdo, and S.M. Schaefer (1984), Continuous Price Processes in Frictionless Markets have Infinite Variation, *Journal of Business*, 57, 353-365.

[9] Hull,J.(1989), *Options,Futures and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall.

[10] Kôno, N. (1969), Oscillation of Sample Fuctions in Stationary Gaussian Processes, *Osaka J. Math.*, 6, 1-12.

[11] Kunita, H. and S. Watanabe (1967), On Suare Integrable Martingales, *Nagoya Math. Journal*, 30, 209-245.

[12] Kunitomo, N. (1992), Long-Memory and Geometric Brownian Motion in Security Market Models, Unpublished Manuscript.

[13] Kunitomo, N. and M. Ikeda (1992), Pricing Options with Curved Boundaries, *Mathematical Finance*, forthcoming.

[14] 国友直人・高橋明彦 (1992),「平均オプションの評価法」, ファイナンス研究,1-19.

[15] Kusuoka, S. (1992a), Arbitrage and Measure, RIMS-882, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

[16] Kusuoka, S. (1992b), Consistent Price System when Transaction Costs Exist, RIMS-883, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

[17] Mandelbrot, B.B. and J.W.Van Ness (1968), Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review*, 10-4, 422-432.

[18] Merton, R. (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Management Science*, 4, 141-183.

[19] Willinger, W. and M.S.Taqqu (1991), Toward a Convergence Theory for Continuous Stochastic Securities Markets Models, *Mathematical Finance*, 1, 55-99.

[20] Yor, M. (1992), On Some Exponential Functionals of Brownian Motion, Unpublished Manuscript.

[21] Yoshida, N. (1992), Asymptotic Expansion for Statistics Related to Small Diffusion, *Jounal of Japan Statistical Society*, forthcoming.

図1

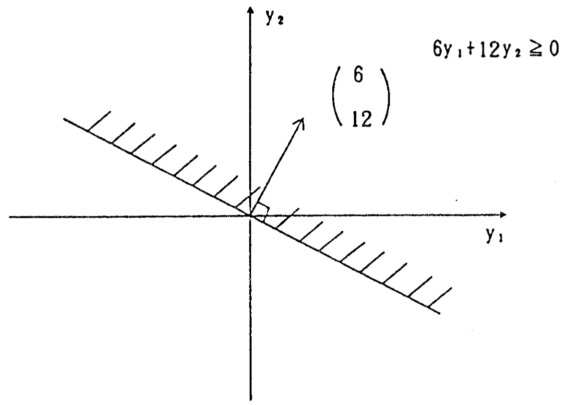

y_2
$6y_1+12y_2 \geqq 0$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$
y_1

図2

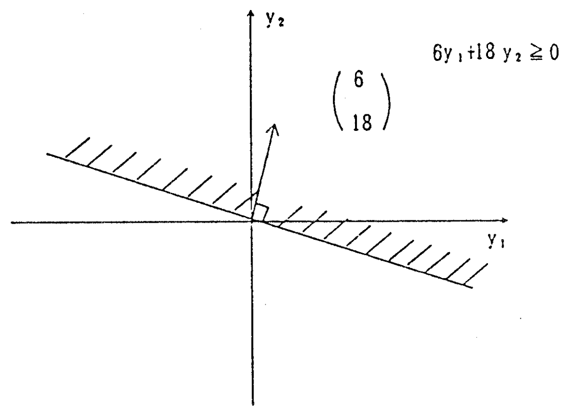

y_2
$6y_1+18y_2 \geqq 0$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$
y_1

図3

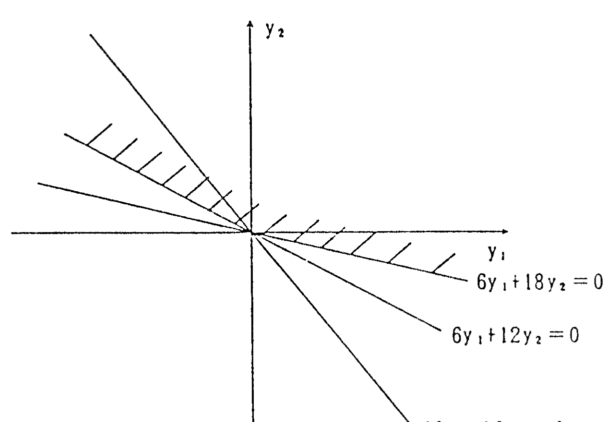
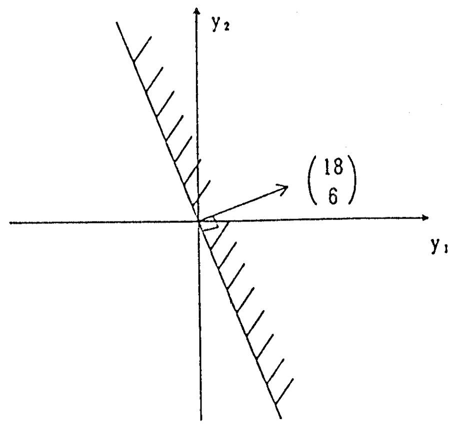
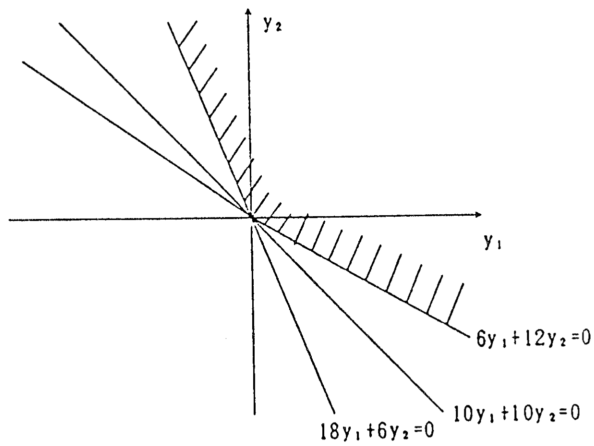

y_2
y_1
$6y_1+18y_2=0$
$6y_1+12y_2=0$
$10y_1+10y_2=0$

図4



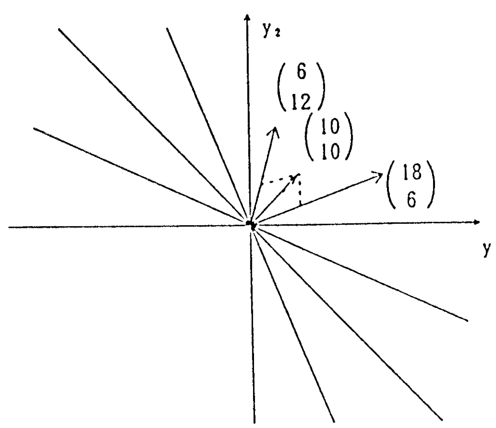
y₂
(18 6)
y₁

図5



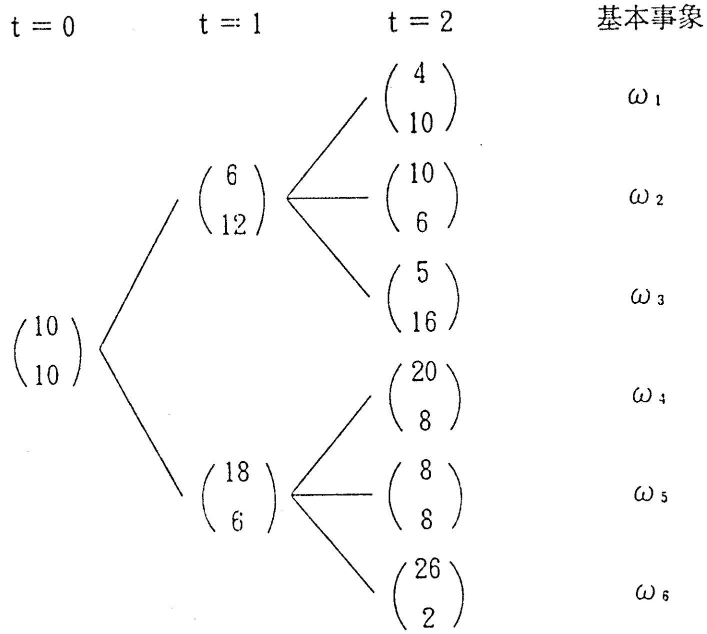
y₂
y₁
6y₁+12y₂=0
10y₁+10y₂=0
18y₁+6y₂=0

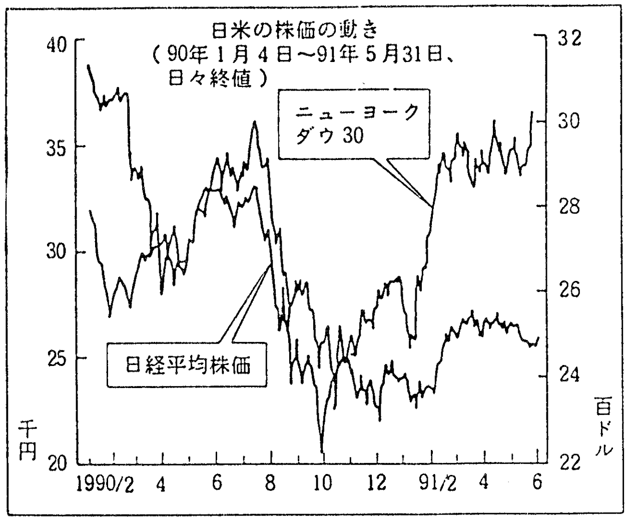
図6

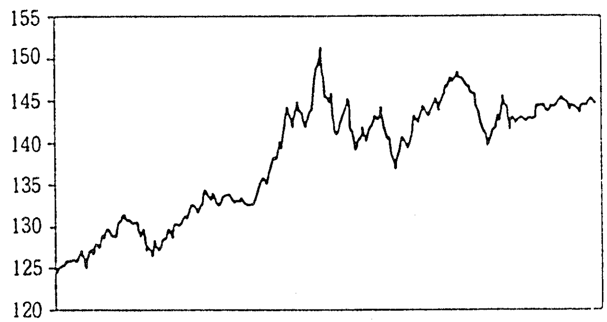


y₂
(6 12)
(10 10)
(18 6)
y₁

図7







円・ドル・レート
(1988.12-1989.12)