

95-J-1

**構造変化と単位根・共和分仮説**  
(マクロ経済時系列への応用)

国友直人  
東京大学経済学部

1995年1月

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられるたい。

# 構造変化と単位根・共和分仮説

(マクロ経済時系列への応用)\*

国友直人†

1994年11月

## Abstract

本稿ではまず時系列分析においてこれまで知られている単位根検定 (unit roots tests) 及び共和分検定 (cointegration tests) の方法が経済時系列のトレンドに構造変化が存在する場合には誤った結果をもたらす可能性があることを指摘する。次に構造変化を含む線形時系列モデルにおいて単位根仮説及び共和分仮説に対する新たな検定統計量のクラスを提案する。この統計量を用いると多次元時系列において構造変化点が未知であったり、構造変化点の個数が未知であるときにも簡単に検定を拡張できることが提案する方法の長所である。尤度比検定を含むこのクラスの検定統計量の漸近分布はブラウン運動の汎関数になることが示されるので、シミュレーションによりその極限分布の性質をより詳しく考察する。さらに提案する検定を用いて外国為替レート (円・ドル・マルク) と日本の所得・消費系列を分析し、前者については単位根の存在に肯定的、後者については否定的な結果を得た。また共和分仮説の下での情報量基準 (AIC) について応用上の問題点も指摘する。こうした分析からマクロ経済時系列の実証分析においては最近よく使われるようになっている単位根仮説や共和分仮説の検定方法を機械的に適用するよりも、経済構造の変化を適切に時系列モデルで表現することが必要であり、またより重要であることを指摘する。

---

\*本稿は日本銀行金融研究所における客員研究員としての研究の一部分を中間的にまとめた準備草稿である。本稿における数値計算については佐藤整尚氏 (東京工業大学大学院) の協力に負っているが、数値計算を含めて誤りがあるとすれば著者の責任である。また、議論をまとめるまでの過程において日本銀行金融研究所の副島豊氏との議論は有益であった。両者に感謝する。(94/11/14 Version)

†東京大学経済学部

# 1 はじめに

経済時系列の計量分析においては最近になって確率的な意味での非定常性が大きな問題となっている。マクロ経済データや金融データを使って単純な統計的時系列モデルを当てはめると、しばしば定常的 (stationary) 統計モデルよりもある種の非定常的 (non-stationary) 統計モデルの方があてはまりのよいことが報告されている。また、金融データ、とりわけ株式価格や外国為替レートなどの資産価格水準の変動においてはしばしば確率的定常性とは整合的でないと判断されるような観察事実も見ることができる。

他方、計量経済分析の方法として伝統的に用いられている統計モデルではしばしば明示的あるいは暗黙理に確率的変動部分は統計的意味において定常的 (stationary) であることが仮定されている。日本のマクロ金融時系列を用いて過去に行われていた多くの実証分析の場合にはこの仮定は先験的になされていたと考えられが、統計学的な見地からすると実証分析に先立って検討すべき統計的仮説の一つであろう。この非定常の仮説に関してはこれまでに計量経済学者や統計学者によって様々な検定方法が提案されている。通常、確率的な意味での定常性の条件が成り立たない場合は一般に非定常性と呼ばれるが、経済学者にとって興味ある非定常性としてランダム・ウォーク (random walk) モデルの場合が注目されている。ランダム・ウォーク (酔歩) モデルやそれを拡張した線形時系列モデルを定常的な線形時系列モデルに対して検定する問題は単位根 (unit roots) の検定、あるいは共和分 (cointegration) の検定と呼ばれている。1次元の時系列における単位根の検定方式については、例えば Dickey=Fuller(1979) が提案した方法がよく知られている。その他にも例えば Dickey=Fuller (1981), Phillips (1987), Phillips=Perron (1988), Perron (1989) などにより提唱された方法が単位根検定として実証分析において用いられている。他方、共和分概念はもともと Granger=Engle(1987) により提唱されたが、実証分析を行っている研究者の間においては、いまだ必ずしもその意味を正確に理解されていないのではないと思われることもある。共和分関係の検定については異なる幾つかの解釈がありうると判断されるが、本稿においては、以下の3節で示すように多次元の単位根検定の一種としてとらえることとする。これまでに共和分検定としては Engle=Granger(1987) が提案した Dickey=Fuller 検定を利用する方法をはじめとして Phillips=Ouliaris (1990), Johansen(1991) など

が開発した方法が共和分検定 (cointegration test) として注目されて、最近ではしばしば実証分析においても用いられるようになってきている。

こうした単位根や共和分関係の統計的検定方法は特にマクロ経済学やファイナンス（金融）を中心として最近の実証的な計量分析において利用されている。しかしながら、これまでにここで挙げた方法の他にも様々な異なる検定方式が提案されており、その中には検定の意味づけを理解することが困難な場合もあるようである。また、実際のデータ分析において様々な検定方式からどの様な方法を用いれば良いのか不明なこともあるように思われる。そこで Kunitomo(1992) はこうした経済時系列分析における非定常性のとらえ方、特に単位根仮説及び共和分仮説について提案された様々な検定方式を系統的に導き、多くの検定統計量の間の関係を整理するとともに若干の新しい方法を提案した。

本稿においてはまず単位根に関連して特に共和分関係にまつわる幾つかの問題を整理する。特に、これまで提案されている共和分検定について軽視されている構造変化に係わる問題点を考察する。一般にマクロ経済データや金融データでは明らかに長期的トレンドが観察されることが少なくない。したがって、マクロ・データの非定常性を議論する場合には分析においての歴史的トレンドの扱い方が大きな問題となると考えられる。単位根検定に関連して米国の実証的問題からこの問題を始めて取りあげたのは Perron(1989) である。Perron(1989) は歴史的トレンドが多く単位根検定で仮定しているような単純な時間の線形関数ではなく、既知のトレンド変化点が1個ある場合には検定結果が大きく変わってしまうことを指摘している。彼の研究では両大戦間を含む米国のマクロ時系列を用いて実証分析を行っているが、副島(1994) 及び小原(1994) は実質GNPを含む日本のマクロ時系列について同様の結果が得られることを報告している。ここで複数の時系列を扱う場合には歴史的トレンドや構造変化の扱いはより複雑になることに注意しておこう。したがって、多次元時系列における単位根の検定問題及び共和分関係の検定問題をより分かりやすく統計理論的に整理することにも多少の意義があるように考えられよう。

本稿の2節において多次元時系列における共和分仮説にまつわる統計的問題を整理する。続いて3節ではトレンドに関して構造変化を自由に組み込むことができる共和分仮説に対する新しい検定統計量のクラスを提案する。その統計量のクラスには尤度比検定、ラグランジュ検定、ワルド検定などよく知られている検定方法を含んでいるので実用上は十分

に役に立つ検定方法を特別な場合として含んでいる。ここで提案する方法は多次元時系列において構造変化点が未知であったり、構造変化点の個数も標本数に比べて十分に小さければ未知である場合にも簡単に拡張することが可能なので極めて応用上には有効である。また、特に時系列が1次元の場合には共和分検定が単位根に対する検定統計量を与えることを示すことができる。したがって、本稿で導入する方法はトレンド関数に様々な構造変化を組み込んだときの単位根仮説についての尤度比検定統計量を与えてくれる。この統計量は単位根仮説や共和分仮説で考える帰無仮説から生じる全ての制約条件を検定するので、1次元の時系列に対して Perron(1989) が提案した  $t$ -統計量よりも何らかの意味でより強力であることが期待される。また、Perron(1989) が扱えないようなトレンド変化をも簡単に組み込むことができるのでより柔軟性があると考えられる。

次に4節では本稿で提案する統計量の漸近分布の表現を求める。得られた漸近分布は尤度比統計量、ラグランジュ統計量、ワルド統計量について共通の形をしていることがわかった。しかしながら、ここで得られた漸近分布はブラウン運動の汎関数として表現されるので統計学や計量経済学の教科書に登場する  $\chi^2$ -分布などによく知られた分布表を利用することは出来ない。そこで、日本におけるマクロ実証分析で役に立つと判断されるトレンド係数が増加する場合に関して統計量の漸近分布の数表をシミュレーションにより作成したので本稿で使った分布表を報告する。

さらに5節では提案された統計量とその漸近分布の数表を使って日本のマクロ時系列の分析を行った例示的な分析結果を報告する。時系列データとして分析に用いたのは外国為替レート(円・ドル・マルク)及び日本の実質所得・実質消費系列である。検定の結果としてはまず為替レートのデータについては単位根が検出され、共和分関係があることが得られた。他方、実質所得・消費系列については構造変化を考慮すると単位根の存在には否定的な結果が得られた。さらに尤度比統計量を導出した応用として時系列データ分析の方法として有力な赤池の情報量基準(AIC)を非定常時系列に適用する際の注意事項も説明する。そして、本稿の考察から得られた結論はまとめて6節で述べる。本稿で得られた理論的結果の導出は数学付録として7節にまとめておいた。

## 2 多次元時系列と非定常性

### 2.1 多次元時系列における共和分仮説

線形計量経済モデルにおいて内生変数を  $G$  次元ベクトル  $y_t$  とすると線形計量経済モデルの誘導型 (reduced form) は多変量時系列モデル

$$(2.1) \quad y_t = \Gamma z_t^* + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + v_t,$$

で表現される。ただし  $z_t^*$  は  $K^* \times 1$  の厳密な意味での外生変数 (strictly exogenous) ベクトルであることを仮定し、 $\Gamma$  は  $G \times K^*$  係数行列、 $A_1, \dots, A_p$  は  $G \times G$  係数行列、さらに  $v_t$  は  $G \times 1$  の誤差項ベクトルを表している。ここで  $\mathcal{F}_t$  を変数  $y_0, z_1^*, v_1, \dots, z_t^*, v_t, z_{t+1}^*$  から生成される  $\sigma$ -集合体としよう。変数  $y_t$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測 (measurable) となる。ここで誤差項  $v_t$  は条件

$$(2.2) \quad E(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad \text{a.s.},$$

$$(2.3) \quad E(v_t v_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \Omega_t \quad \text{a.s.}$$

を満足するマルチンゲール (martingale) 差分過程であると仮定する。過去の情報  $\mathcal{F}_{t-1}$  が与えられた下で誤差項の条件付共分散行列  $\Omega_t$  は時間の関数であることに注意しておこう。

この多変量時系列モデルの確率的挙動はモデルの自己回帰部分によって決定される。そこで自己回帰部分の固有方程式を

$$(2.4) \quad |\lambda^p I_G - \sum_{i=1}^p \lambda^{p-i} A_i| = 0$$

とおこう。本稿では時間とともに指数的に発散する自己回帰部分を含む時系列モデルは考察しないので次のことを仮定する。

[仮定 A]: 固有方程式を満足する固有値を  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, pG^2$ ) とすると

$$|\lambda_i| \leq 1$$

である。

多変量時系列モデル (2.1) を次のように書き直そう。

$$(2.5) \quad \begin{aligned} y_t &= \Gamma z_t^* + A_1 y_{t-1} + \cdots + (A_{p-1} + A_p) y_{t-(p-1)} - A_p \Delta y_{t-(p-1)} + v_t \\ &= \Gamma z_t^* + B_1 y_{t-1} + \sum_{i=2}^p B_i \Delta y_{t-(i-1)} + v_t. \end{aligned}$$

ここでラグ作用素  $L$  と階差作用素  $\Delta (= 1-L)$  をそれぞれ  $Ly_t = y_{t-1}$ ,  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$  により定める。係数行列は

$$B_1 = \sum_{i=1}^p A_i, \quad B_j = -\sum_{i=j}^p A_i \quad (j = 2, \dots, p)$$

で与えられる。

これまで時系列の実証分析においては時系列データの原系列  $\{y_t\}$  にトレンドがある場合に  $B_1 = I_G$  において、階差系列  $\{\Delta y_t\}$  に対して定常時系列モデルをあてはめることがしばしば行われてきた。一般に階差系列  $\{\Delta y_t\}$  が定常確率過程にしたがうとき原系列  $\{y_t\}$  は和分  $I(1)$  過程にしたがうと呼ばれる。ここで階差系列  $\{\Delta y_t\}$  が定常時系列であることは次の条件で表現される。

[仮定 B]: 固有方程式

$$(2.6) \quad \left| \lambda^{p-1} I_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-i} B_i \right| = 0$$

を満足する固有値を  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, (p-1)G^2$ ) とすると

$$|\lambda_i| < 1$$

である。

次に多次元時系列  $\{y_t\}$  が共和分関係にしたがっていることを特徴づけてみよう。(2.5) 式において係数行列を  $B_1 = I_G + B^*$  とおいて書き直すと

$$(2.7) \quad \Delta y_t = \Gamma z_t^* + B^* y_{t-1} + \sum_{i=2}^p B_i \Delta y_{t-(i-1)} + v_t$$

で与えられる。ここで係数行列  $B^*$  の階数 (rank) を

$$\text{rank}(B^*) = r$$

と書くことにしよう。階数  $r$  により多変量時系列モデル (2.1) で与えられる時系列  $\{y_t\}$  の非定常性は次のように分類することができる。階数  $r = 0$  の時は係数行列  $B^*$  はゼロ行列となり階差系列  $\{\Delta y_t\}$  に対する時系列モデルとなる。さらに仮定 B の条件下では階差系列は定常過程にしたがうことが分かる。次に階数が次元に一致する ( $r = G$ ) 場合には仮定 A の下では原系列  $\{y_t\}$  は単位根を持たないことが以下のようにして分かる。(2.1) における自己回帰表現の多項式を

$$(2.8) \quad A(\lambda) = \lambda^p I_G - \sum_{i=1}^p \lambda^{p-i} A_i$$

とおこう。このとき係数行列  $B^*$  を使って

$$(2.9) \quad A(\lambda) = -\lambda^{p-1} B^* + (\lambda - 1) \left[ \lambda^{p-1} I_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-(i-1)} B_i \right]$$

と書き直すことができる。この表現において  $\lambda = 1$  を代入すれば

$$|A(1)| = |-B^*| \neq 0$$

となる。このことから単位根は固有方程式 (2.4) の根ではありえないことがわかる。さらにここで固有方程式の根として  $\lambda = 1$  の他に  $|\lambda| \neq 1$  となる根が存在しなければ原系列  $\{y_t\}$  は定常性の条件を満足していることがわかる。

階数  $r$  についての最後の可能性は  $0 < r < G$  となる場合である。この時の非定常性の分析は少し複雑になる。そこで、この場合についての結果を次のような命題としてまとめておくことにしよう。命題の証明は 7 節に与えておいた。

**定理 1** : 時系列  $\{y_t\}$  が (2.1) にしたがって仮定 A を満足するとしよう。このとき次の条件 (C) と条件 (D) は同等である。

[条件 C]:  $\lambda_i = 1$  ( $i = 1, \dots, G - r$ ),  $|\lambda_i| < 1$  ( $i > G - r$ ),

[条件 D]: (i)  $r = \text{rank}(B^*)$ ,  $0 < r < G$ ,



(ii)  $|\alpha'_\perp D(1)\beta_\perp| \neq 0$ ,

(iii)  $\lambda_j \neq e^{i\theta}$  ( $\theta \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, pG^2$ ).

ただし  $\alpha_\perp$  と  $\beta_\perp$  は  $G \times G_0$  ( $G_0 = G - r$ ) 行列で階数は  $G_0$  である。また、多項式行列  $D(\lambda)$  は

$$(2.10) \quad D(\lambda) = \lambda^{p-1} I_G - \sum_{i=2}^p \lambda^{p-i} B_i$$

で与えられる。

ここで若干の注意事項を述べておこう。条件 (C) は単位根の存在状態を示し、単位根の数が次元よりも少ないことを意味している。条件 (D-i) は共和分関係の条件として知られている。線形代数の議論から条件 (D-i) の下では

$$B^* = \alpha\beta'$$

となる階数  $r$  の  $G \times r$  行列  $\alpha, \beta$  が存在する。このとき  $G \times G_0$  ( $G_0 = G - r$ ) 行列  $\alpha_\perp$  と  $\beta_\perp$  の各列ベクトルはそれぞれ行列  $\alpha$  と  $\beta$  の各列ベクトルと直交する。

この結果から共和分関係の誤差修正 (error-correction) 表現として知られている関係が得られる。条件 (D-ii) は例えば条件 B の下では一般に成り立つ。このことは仮定 B の下では行列  $D(1)$  が正則となることより明らかである。最後に条件 (D-iii) についての言及しておこう。この条件は季節単位根や負の単位根の存在を排除するものである。一般には季節単位根や負の単位根が存在する可能性を排除できるような簡単な条件を見つけ出すことは困難なようである。<sup>1</sup>

例えば仮定 B は条件 (D-iii) の必要条件でも十分条件でもない。もし、このような単位根の存在が実証的に問題とならないならば仮定 A を修正して始めからこうした単位根を排除しておくことが考えられよう。この場合には仮定 A を次のように修正する必要がある。

[仮定 A']: 固有方程式 (2.2) を満足する固有値は  $\lambda_i = 1$  又は  $|\lambda_i| < 1$  である。

<sup>1</sup>季節性が明瞭に観察される時系列において原系列を直接に分析する場合には季節単位根や季節分関係を巡る問題が重要であるが、本稿では季節性を巡るこれらの問題は扱わない。

例えば Johansen (1991) の定式化では外生変数が定数項のみとした上ではじめから仮定 A' をおいている。定理 1 より次の命題は明らかであろう。

系 1 : 多変量時系列モデル (2.1) において仮定 A' の下では条件 (C) と条件 (D-i), (D-ii) とは同等である。

## 2.2 階数条件の仮説検定

多変量時系列モデル (2.1) における単位根仮説及び共和分仮説の検定方法を考えよう。(2.7) を整理すれば

$$(2.11) \quad \Delta y_t = \beta z_t + v_t,$$

と簡潔に表現することができる。ここで  $z_t$  は  $K \times 1$  の先決変数 (predetermined variables) である。(2.7) 式より先決変数としては変数  $z_t^*, y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-(p-1)}$  を含むものとしているので  $K = K^* + G \times p$  となる。また係数  $\beta$  は  $G \times K$  の回帰係数行列である。したがって (2.12) 式は被説明変数が  $\{\Delta y_t\}$ , 説明変数が  $\{z_t\}$  の多変量回帰 (multivariate regression) モデルとみなすことができる。

ここで係数行列  $\beta$  の階数についての帰無仮説を考えよう。仮説を述べる為に説明変数  $z_t' = (z_{1t}', z_{2t}')$  を  $1 \times K_1$  及び  $1 \times K_2$  の先決変数ベクトルに分割し、係数行列  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  を  $G \times (K_1 + K_2)$  行列に分割しておく。そこで、係数行列  $\beta_2$  の階数条件 (rank condition) を

$$H_1 : \text{rank}(\beta_2) = r$$

と表しておこう。ここで特に  $\beta_2 = B^*, \beta_1 = (\Gamma, B_2, \dots, B_p)$  とおけば仮説  $H_1$  は定理 1 の条件 (D-i) に対応していることは明らかであろう。

多変量解析において知られている係数行列の階数条件仮説はもともと Anderson (1951) によってはじめて考察された問題である。またこの仮説は数学的には計量経済学における線形構造方程式モデルにおけるブロック識別性条件 (block identification hypothesis) と同等となることを示すことができる。後者の仮説の検定問題については最近 Anderson=Kunitomo (1992b) 及び Anderson=Kunitomo (1994) が詳しく検討している。

多変量回帰モデルにおける階数仮説にたいする検定統計量を導いておこう。母係数行列 $\beta$ の最小自乗推定量 (least squares estimator) は

$$(2.12) \quad \hat{\beta} = \sum_{t=1}^T \Delta y_t z_t' \left( \sum_{t=1}^T z_t z_t' \right)^{-1} = \Delta Y' Z (Z' Z)^{-1}$$

で与えられる。ただし、ここで $T$ は標本数、 $\Delta Y$ は変数ベクトル $\{\Delta y_t'\}$ の観測値からなる $T \times G$ の行列、 $Z = (Z_1, Z_2)$ は $K (= K_1 + K_2)$ 個の先決変数 $z_t' = (z_{1t}', z_{2t}')$ の観測値からなる $T \times K$ の行列である。次に最小自乗推定量の行列を分割して

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

としよう。ここで分割された行列はそれぞれ母数行列 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ に対応する行列である。

さらに $H_1$ で与えられる階数条件を考察しよう。 $0 \leq \nu_1 \leq \dots \leq \nu_G$ を固有方程式

$$(2.13) \quad \left| \frac{1}{T} \Theta_T - \nu \Omega \right| = 0$$

に対応する固有根としよう。ただし

$$\begin{aligned} \Theta_T &= \beta_2 A_{22.1} \beta_2', \\ A_{22.1} &= Z_2' Z_2 - Z_2' Z_1 (Z_1' Z_1)^{-1} Z_1' Z_2, \end{aligned}$$

である。このとき階数条件は固有根についての仮説 $H_\nu : \nu_1 = \dots = \nu_{G_0} = 0$ 及び $\nu_{G_0+1} > 0$  ( $G_0 = G - r$ )と数学的に同等であることがわかる。

固有方程式(2.13)に対応する標本の方程式は

$$(2.14) \quad |\Delta Y' (P_Z - P_{Z_1}) \Delta Y - \lambda^* \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y| = 0$$

で与えられる。この式を導く上で関係

$$\hat{\beta}_2 A_{22.1} \hat{\beta}_2' = \Delta Y' (P_Z - P_{Z_1}) \Delta Y$$

を用いたことに注意しておく。ここで記号  $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$  は行列  $Z$  の列ベクトルが張る空間への射影作用素であり、任意の退化しない行列  $Z$  に対して直交する射影作用素は  $\bar{P}_Z = I_T - P_Z$  で与えられる。

具体的に帰無仮説  $H_1$  に対して (2.15) から検定統計量を構成する時には被説明変数 (ベクトル) は  $\Delta y_t$ , 説明変数 (ベクトル) としては

$$z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

$$z_{1t}' = (z_t^{*'}, \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}')$$

を選んでいる。また 3.2 節で説明する帰無仮説  $H_2$  と  $H_3$  に対して (2.14) の固有値から検定統計量を構成するときには説明変数の選び方が少し異なることにあらかじめ注意しておく。

多変量解析における検定の不変性 (Anderson (1984) 第 8 章を参照) を用いて右からの直交変換に対して不変な十分統計量 (sufficient statistics) の関数を考える。すると階数条件仮説に対する検定統計量のクラス  $RT_1$  を関数

$$(2.15) \quad RT_1 = g(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*),$$

により定めることができる。ここで  $0 \leq \lambda_1^* \leq \dots \leq \lambda_{G_0}^*$  は固有方程式 (2.15) を満足する小さい方から取った  $G_0$  個の固有値である。関数  $g(\cdot)$  については  $g(\cdot)$  が滑らかな関数であって次の 3 条件を満足するものとする。

(i)  $g(0, \dots, 0) = 0,$

(ii)  $g(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*)$  は原点  $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{G_0}^*) = (0, \dots, 0)$  において全微分可能である,

(iii)

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \lambda_i^*} \right|_{\lambda_1^* = \dots = \lambda_{G_0}^* = 0} = 1 \quad (i = 1, \dots, G_0).$$

ここで検定統計量に課した以上の制約条件は多分に便宜的なものであることに注意しておこう。より一般的な統計量のクラスを考えることは容易であるが、実用的目的からするとここで導入した検定統計量のクラスは十分に一般的である。統計量  $RT_1$  は様々な実用的な例を含んでいる。Anderson=Kunitomo (1992b) は誤差項  $\{v_t\}$  が正規分布にしたがい、かつ条件付共分散が  $\Omega_t = \Omega$  ( $t = 1, \dots, T$ ) となる均一分散の仮定の下で統計量  $RT_1$  が仮説  $H_1$  に対する尤度比統計量, ラグランジュ乗数統計量, ワ

ルド統計量を含んでいることを示している。仮説  $H_1$  の下で  $(-2) \times (\text{対数尤度比})$  は

$$(2.16) \quad LR_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \log(1 + \lambda_i^*)$$

で与えられる。同様にラグランジュ乗数統計量とワルド統計量はそれぞれ

$$(2.17) \quad LM_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \frac{\lambda_i^*}{(1 + \lambda_i^*)},$$

及び

$$(2.18) \quad W_1 = T \sum_{i=1}^{G_0} \lambda_i^*,$$

となる。

また Johansen (1991) は外生変数が定数項のみのモデルにおいて共和分仮説に対する尤度比統計量を導いているが、その統計量は  $LR$  とほぼ同等であることを容易に示すことができる。Kunitomo (1992) もまた様々な共和分関係の仮説に対する検定統計量を導いている。

以上の議論により導いた統計量の形から3つの統計量(ワルド統計量, 尤度比統計量, ラグランジュ乗数統計量)の間には不等式

$$(2.19) \quad W_1 \geq LR_1 \geq LM_1 \geq 0,$$

が成立することは明らかであろう。この不等式から同一の分布を用いて検定を行うと3つの統計量の中ではワルド統計量は帰無仮説をより棄却する傾向にあり, ラグランジュ乗数統計量は同じ帰無仮説をより受容する傾向があり, 尤度比統計量はその中間になることがわかる。この種の不等式は通常の線形回帰モデルにおいてはよく知られた関係であるが, ここで扱っている問題に関しては自明のことではないと思われる。

ここで特に  $G = 1$  の場合には以上で説明した統計量は極めて単純になることに注意しておこう。回帰分析の標準的用語を用いて被説明変数を  $\Delta y_t$ , 説明変数を  $z_t$  とした残差平方和を  $URSS$  とすれば明らかに  $URSS =$

$\Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y$ となる。全く同様に被説明変数を  $\Delta y_t$ , 説明変数を  $z_{1t}$ とした残差平方和を  $RRSS$  とすれば明らかに  $RRSS = \Delta Y' \bar{P}_{Z_1} \Delta Y$ で与えられる。これらの記号を使うと (2.14) を満たすただ 1 個の固有値は

$$(2.20) \quad \lambda = \frac{RRSS - URSS}{URSS}$$

と表される。したがって、この場合には例えば尤度比統計量 (2.16) は

$$(2.21) \quad LR_1 = T \log\left(\frac{RRSS}{URSS}\right)$$

となる。このような統計量の形は標準的な回帰分析の教科書でよく見かける表現に一致している。

### 3 構造変化と共和分

#### 3.1 トレンドの変化と固有値の挙動

ここで再び多変量時系列モデル (2.1) における外生変数  $\{z_t^*\}$  について考えてみよう。一般に経済時系列の中には時間の変化とともにトレンドが大きく変化していると考えられる変数が少なくない。例えば米国において 1930 年代に観察された実質 GNP や失業率などマクロ変数の変動を観察すると、明らかにそれ以前や以後とは変動のトレンドが異なっていると見ることができよう。また、ここ 30 年間ほどの日本におけるマクロ変数の変動をとっても 1970 年代前半におきた石油危機の前後において多くの変数においてトレンドの変化が観察される。さらに、1980 年代後半から大きな構造的変動が起きているとする見方も有力であろう。

ここで考察すべき問題はこうしたマクロ・データの歴史的変動についての観察に対して、従来の単位根の検定方法はあたかもこうしたトレンドの変化がなかったこととして統計的検定を行っていることである。すなわち、統計的仮説検定の論理では帰無仮説及び対立仮説のいずれにおいても成立している前提、すなわち維持仮説 (maintained hypothesis) としているのであり、こうしたトレンドが長期的に全く変化しないことを暗黙裡に仮定して分析を行うことには大きな問題があると言えるであろう。この問題は一変数の場合について Perron (1989) が行った研究によりはじめて明らかになった。彼の研究によれば想定されたトレンド関数が

固定されたある一つの変化点があるとたとえ真の統計的モデルが定常的であっても Dickey=Fuller (1979) により提案された単位根検定による検定ではしばしば非定常性が検出されてしまうのである。

時系列が多次元の場合にはトレンドの扱いはより複雑になる。複数の時系列におけるトレンドが一様に変化することもありうるが、マクロ金融時系列の中にはトレンドの変化が異なるパターンを示している変数も少なくない。例えばマクロ金融変数の例では貨幣残高や物価指数のトレンドの変動は明らかに実質 GNP のトレンドの変動とは異なっていることが観察される。(例えば図 3.1, 図 3.2 を参照されたい。) また、ほとんどの金利変数では歴史的に正のトレンドはそれほど明瞭には観察されていない。これに対して共和分の検出方法として提案されている方法、例えば Granger=Engle (1987) の方法や Johansen(1991) の方法では定数項のみが説明変数として想定されている。単位根が存在する場合にはこの仮定は時間と共に一定の線形トレンド関数を持つことを意味している。本節ではまず多次元時系列の場合にトレンド関数の変化(あるいは構造変化)を想定することにより検定方法がどのように影響を受けるか考察することにしよう。

いま”真”の時系列モデルはトレンドの回りで定常的に変動していることを想定する。すなわち、固有方程式 (2.4) のすべての根の絶対値は 1 よりも小さいこと仮定しよう。次に変化点  $0 < T_1 < \dots < T_q < T$  に対して変数  $DT_i(t), i = 1, \dots, q$  を

$$DT_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t \leq T_i \\ t - T_i & \text{if } T_i < t \leq T. \end{cases}$$

により定義しよう。全く同様に変化点に対して変数  $DU_i(t), (i = 1, \dots, q)$  を

$$DU_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t \leq T_i \\ 1 & \text{if } T_i < t \leq T. \end{cases}$$

により定義しよう。こうして導入した 2 種類の変数  $DT_i(t)$  と  $DU_i(t)$  によりトレンド関数として  $q$  個の変化点をもつ折線関数を考えることが可能となる。こうした関数は幾つかのマクロ変数のトレンドを近似的に表現することができよう。

まず真の1次元時系列モデルが

$$(3.1) \quad \begin{aligned} y_t = & \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{1i} DU_i(t) + \gamma t + \sum_{i=1}^q \alpha_{2i} DT_i(t) \\ & + \beta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta y_{t-i} + v_t, \end{aligned}$$

となっている状況を考えよう。ただし $\alpha_{ji}$  ( $i = 1, \dots, q; j = 1, 2$ ),  $\beta^*, \beta_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) はスカラーの係数母数である。ここで真のトレンドは $q$ 個の折線で表現されているが、 $q$ を未知として $q_1$  ( $< q$ ) 個の変数を用いてデータ分析を行うことを考えてみよう。このときには最小自乗推定量の挙動について次のような命題が得られる。

**定理 2** : 一変量時系列モデル (3.1) において  $|\beta| < 1$  を仮定する。モデルにおいて  $q$  個のトレンド変数の代わりに  $q_1$  ( $< q$ ) 個のトレンド関数を使った時に得られる  $\beta$  の最小自乗推定量を  $\hat{\beta}$  とする。  $T \rightarrow \infty$  のとき  $\hat{\beta} \xrightarrow{P} 1$  となる。

ここで特に  $q = 1, q_1 = 0$  とするとこの命題は Perron(1989) の定理 1 で得られた結果に一致する。またこの命題の証明の方法も Perron(1989) が用いた方法を直接的に拡張すればよいので省略しておくことにする。この Perron (1989) の定理 1 では 1 次元の単位根仮説において  $G = 1, q = 1, q_1 = 0$  の場合に  $t$ -統計量により単位根仮説を受容してしまうことを示したのであるが、以上のように複数の構造変化点がある場合に拡張することは容易である。また、ここで得られる結果をより精密にして  $T(\hat{\beta} - 1)$  の挙動をより詳しく調べることも可能である。

次に多次元時系列に複数の構造変化点がある場合を考察してみよう。時系列における真のトレンド変数として

$$z_t^{\dagger} = (1, t, DT_1(t), \dots, DT_q(t)),$$

を考えよう。ところが実際には変化点の個数  $q$  は未知であることを考慮して  $q_1$  個 ( $0 \leq q_1 \leq q$ ) 個の変化点を持つ単位根に対するトレンド関数

$$z_t^{* \dagger} = (1, DU_1(t), \dots, DU_{q_1}(t)),$$

を説明変数に用いて分析を行った状況を想定しよう。このときには次の命題を得ることができるが、この命題の証明は 7 節に与えておいた。



**定理 3** : 多変量時系列モデル (2.1) において次のことを仮定する。

(i) 外生変数は変数  $z_t'$  に対して  $z_t' = (z_t', y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}')$ ,  $z_{1t}' = (z_t', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}')$ , とおく。ただし  $q - q_1 \geq 0$ ,  $G - (q - q_1) \geq 0$  である。

(ii) 変化時点については

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T} = \delta_i$$

とおくと  $0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1$  となる。

(iii) 固有方程式 (2.4) のすべての固有値が  $|\lambda_i| < 1$  となる。

このときもトレンド関数を誤って  $z_t^*$  として (2.14) より標本固有値  $0 \leq \lambda_1^* \leq \dots \leq \lambda_G^*$  を求めると  $T \rightarrow \infty$  につれて次のことが成り立つ。

(iv)  $\lambda_i^* \xrightarrow{P} 0$  ( $i = 1, \dots, q_1 + 1$ ),

(v)  $\lambda_i^* \xrightarrow{P} k_i$  ( $i = q_1 + 2, \dots, G$ ).

ただし  $k_i$  は正定数である。

ここで最も単純にトレンドを扱う場合として  $q = q_1 = 0$  をとしてみよう。このことは長期的トレンドが時間の線形関数であるにも係わらず、その可能性を分析において無視した場合に対応している。このときには定理 2 から 1 個の固有値は小さくなるが、他の  $G - 1$  個の固有値については (v) より任意の  $\delta > 0$ ,  $i = q_1 + 2, \dots, G$  に対して

$$T^\delta \lambda_i^* \xrightarrow{P} \infty,$$

となる。このとき、データからは共和分の仮説  $H_1 : r = G - 1$  が受容される可能性が高くなり定常性の対立仮説  $H' : r = G$  は棄却される傾向となる。したがって、時系列データから得られるのは極限では 1 個の単位根であり、共和分関係の個数は  $r = G - 1$  となる傾向がある。

ここで定理 2 で得られた結果は Perron (1989) の定理 1 を多次元に拡張した結果としても見るができる。多次元時系列に複数の構造変化点がある場合にはその分析方法を直接的に拡張することは容易ではない。そこで本節では定式化を Kunitomo (1992) が用いた枠組みに代えることによりトレンド変化による検定方式への影響が一般的に多次元時系列についても成立することを示したのである。したがって、従来から使われている共和分検定の方法についても基本的な問題があることが裏付けられたと考えられよう。

マクロ計量分析への実証的問題としては Perron (1989) は主に米国のデータを使って分析を行った結果、従来の単位根検定による実証分析に関

する信頼性に対して大きな疑問を投げかけたのである。日本のマクロ経済データについては副島(1989)が $t$ -統計量を用いて実質 GDP や実質消費などについて単位根検定を行っているが、これら重要なマクロ変数についてはいずれも単位根仮説に対して否定的な実証結果を報告している。ここで、Perron(1989)が提案した検定方法では先験的に固定された構造変化点が一個存在することを仮定されていたことに注意しておく。この条件を緩めて未知の構造変化点が複数ある場合については小原(1994)が分析を行っている。小原(1994)はより一般的な $t$ -統計量について Kunitomo(1992)が求めた漸近分布の表現を利用して日本の主要なマクロ時系列について Perron(1989)及び副島(1994)が得た実証結果と同様な実証的結論が得られることを報告している。こうした最近に行われているマクロ経済時系列の実証分析からも単位根検定や共和分検定においては構造変化点の扱いが実証的にも無視できない重要な問題であることがわかる。

### 3.2 トレンド変化の下での共和分仮説検定

多変量時系列モデルに構造変化点などを含むトレンドを表現する外生変数が存在する場合の単位根の検定と共和分の検定方法を考えよう。時系列モデルにトレンドが存在する場合にはトレンドと非定常性について幾つかの定式化がありうる。例えば Kunitomo (1992) では  $K^* \times 1$  の外生変数  $z_t^*$  を  $z_t^* = (z_{1t}^*, z_{2t}^*)$  とそれぞれ  $1 \times K_1^*$  及び  $1 \times K_2^*$  に分割して

$$H_1' : \text{rank}(B_1^*) = r, \quad \Gamma_2 = O$$

を考察している。ここで行列  $\Gamma_2$  は変数  $z_{2t}^*$  の係数であり、この仮説は共和分仮説の一種とみなすことが出来よう。2番目のゼロ制約条件を仮説の中に導入した理由は、多次元時系列にランダム・ウォーク (random walk) が存在するとドリフト項の変数  $z_{1t}^*$  により仮説の下でより高次のトレンドが生成されるからである。例えばドリフト項の変数  $z_{1t}^*$  の中に時間に線形な項が存在すれば単位根 (ランダム・ウォーク) は時間の2次のトレンドを生成してしまう。このことは経済時系列の実証分析においては重要であるにも拘らず、必ずしも完全に理解されているとは限らないので1次元の簡単な時系列モデルを用いて例示しておこう。

ここで1次元の変数  $\{y_t\}$  が時系列モデル

$$(3.2) \quad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta y_{t-1} + v_t,$$

にしたがっているものとしよう。このとき、帰無仮説としての単位根仮説は  $H_1' : \beta = 1, \alpha_1 = 0$  である。対立仮説は  $H' : |\beta| < 1, \alpha_1 \neq 0$  とすれば帰無仮説と対立仮説の両方の下でトレンドは時間の線形関数となる。この定式化では時系列のトレンド関数の次数は維持仮説として同一の形をとっている。2番目のゼロ制約を無視した場合には必ずしも帰無仮説と対立仮説の下での時系列モデルにおけるトレンド関数の形は同一ではないので仮説検定の問題は入れ子 (nested) 構造ではないと解釈できよう。さて (3.2) 式を少し変形すれば

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta^* y_{t-1} + v_t,$$

と表現することができる。この表現では係数は  $\beta^* = \beta - 1$  なので単位根仮説は  $H_2 : \beta^* = 0, \alpha_1 = 0$  である。

次に多変量時系列モデルを考えよう。構造変化点などを含むトレンド変数を  $z_{2t}^*$  とすると時系列  $\{y_t\}$  が共和分関係にあることの一つの解釈は  $G \times r$  行列  $\beta$  と  $K_2^* \times r$  行列  $\gamma_2$  が存在して、 $\beta' y_t + \gamma_2' z_{2t}^*$  が定常的となることである。そこで変数  $z_{1t}^*$  を  $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$  とおけば仮説  $H_1'$  の代わりに

$$H_2 : \text{rank}(\Gamma_2, B^*) = r$$

を考えることができる。本稿においては共和分仮説として主にこの仮説の検定問題を考えることにしよう。仮説  $H_2$  に対して考える検定統計量のクラス  $RT_1$  は 2.2 節で導いた固有方程式 (2.14) の根の中から小さい方の  $G_0$  個の根から (2.15) 式で与えられる。ただし説明変数としては外生変数  $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*, z_t^* = (z_{1t}^*, z_{2t}^*)$  に対して

$$z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

$$z_{1t}' = (z_{1t}^{*'}, \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

とする所だけが 2.2 節で説明した統計量  $RT_1$  と異なっているので統計量  $RT_2$  で表しておこう。帰無仮説に対する尤度比統計量 ( $LR_2$ ), ラグランジュ統計量 ( $LM_2$ ), ワルド統計量 ( $W_2$ ) の形は全く同一である。このことから、帰無仮説  $H_2$  に対する様々な統計量は形式的には 2.2 節で説明した方法により同様に計算することができる。そこで本稿では統計量  $RT_2$  と

して上のように説明変数  $z_t' = (z_{1t}', z_{2t}')$  をとる場合を扱うことにしたのである。実はこのような説明変数の選び方についてはほんの僅かに見える違いが漸近分布についての結果に大きな違いをもたらすことが分かっている。また、変化点を含む共和分関係のもう一つの定式化としては  $G \times r$  行列  $\beta$  と  $K^* \times r$  行列  $\gamma$  が存在して、 $\beta' y_t + \gamma' z_t^*$  が定常的となることであろう。この場合は仮説  $H_2$  の代わりに

$$H_2' : \text{rank}(\Gamma, B^*) = r$$

を考えることができる。この仮説の検定は上の変数  $z_{1t}$  から変数  $z_{1t}^*$  を除くことで行うことができる。

ここで特に  $G = 1$  の場合に帰無仮説  $H_2$  の検定問題は 1 次元時系列モデルにおける単位根仮説の問題になっていることに注意しておこう。さらに説明変数として  $z_t' = (1, t)$ ,  $z_{1t}^* = 1$  を取れば時系列モデル (3.2) における仮説  $H_1'$  に一致することがわかる。Dickey=Fuller(1981) が考察したのはこの帰無仮説に対する尤度比統計量である。したがって、ここでの統計量は Dickey=Fuller(1981) の研究の一般化と見ることができる。

さて、本節で導入した帰無仮説  $H_2$  を用いることにより 1 次元の単位根を使って説明した帰無仮説と対立仮説の下でのドリフト項の次数の整合性の問題を自然な形で解決することができる。このことを示すためには実は Granger によって提唱された表現定理 (Engle=Granger(1987)) を少し拡張する必要が生じる。もともと導かれた Granger の表現定理では階差系列  $\Delta y_t$  が定数のみを含む線形確率過程となることが前提とされていた。多変量時系列モデル (2.1) から出発する本稿の枠組みでは以下に示すようにその仮定は必要ない。ここで示す命題は Johansen (1991) により得られた表現定理の結果をさらに修正したものである。命題の証明は 7 節に与えておいた。

**定理 4 :** 変数  $z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$  と置いた多変量時系列モデル (3.1) において仮定 A 及び条件 (D-i), (D-ii), (D-iii) を仮定する。(i) 仮説  $H_2$  の下では確率過程  $\{y_t\}$  は

$$(3.3) \quad y_t = y_0 + C \left( \sum_{s=1}^t v_s \right) + C_1(L)v_t + C_2(L)z_t^*,$$

と表現される。

(ii) 行列  $C$  の階数は  $r$  で

$$(3.4) \quad C = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} D(1) \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$$

で与えられる。

(iii) 行列多項式  $C_i(L)$ , ( $i = 1, 2$ ) は

$$C_i(L) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{ik} L^k$$

と展開でき、有限の正数  $q_3, \rho$ , ( $0 < \rho < 1$ ) が存在して

$$\|C_{ik}\| = O(k^{q_3} \rho^k)$$

と表現される。

(iv) 初期値の影響を除いて時系列の期待値は

$$E[\Delta y_t] = O(\Delta z_t^*),$$

$$E[\beta' y_t + \gamma_2' z_{2t}^*] = O(\Delta z_t^*),$$

と表現される。

ここで特に外生変数として定数項のみしか存在しない場合には  $z_{2t}^* = 1$  であるから  $\Delta z_{2t}^* = z_{1t}^* = 0$  となる。この時には条件 (iv) における右辺はゼロ行列となることがわかる。したがって、この場合にはこの定理 4 は Johansen (1991) に既に得られている結果に一致することが分かる。しかしながら、より一般的に外生変数が存在する場合にはこうした単純な結果は修正されなければならない。上の表現定理において特に重要なことは (3.3) 式の最後の項である。仮説  $H_2$  の下では最初に仮定されたドリフト変数  $z_{2t}^*$  及びトレンド変数  $z_t^*$  は同一の次数となる。例えば変数  $z_{2t}^*$  の中に時間の線形関数があっても移動平均 (MA) 表現 (3.3) に現れるトレンドはやはり時間の線形関数より高い次数の項は生成されない。Kunitomo (1992) で導入したトレンド関数を含む共和分仮説の下での MA 表現はより複雑となる。

さらに、構造変化点などを含むトレンド変数  $z_t^{*'}$  においてトレンド変数が共変動している仮説を導入することができる。必ずしも  $\Delta z_{2t}^* = z_{1t}^*$  とせず、トレンド変数を  $z_t^{*'} = (z_{1t}^{*'}, z_{2t}^{*'})$  とおこう。このときトレンド関数の変動に関して

$$H_3 : \text{rank}(\Gamma_2) = r$$

という仮説を考えることができる。この仮説では単位根は仮定されていないので共和分関係と呼ぶよりもトレンド変数の共変動関係という方がふさわしいと見ることができよう。こうした仮説  $H_3$  に対して考える検定統計量のクラス  $RT_3$  もまた固有方程式 (2.14) の根の中から小さい方の  $G_0$  個の根から (2.15) 式で与えられる。ただし説明変数としては外生変数

$$z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

$$z_{1t}' = (z_{1t}^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

とする所が統計量  $RT_2$  と異なっているので、この統計量を  $RT_3$  で表しておこう。帰無仮説に対する尤度比統計量 ( $LR_3$ ), ラグランジュ統計量 ( $LM_3$ ), ワールド統計量 ( $W_3$ ) も全く同様に定義することができる。

## 4 検定統計量の分布

### 4.1 統計量の漸近分布

本節では帰無仮説の下での検定統計量の漸近分布を考察する。誤差項  $v_t$  は条件 (2.2) 式及び (2.3) 式を満足するマルチンゲール差分過程であって、条件付共分散行列  $\Omega_t = E(v_t v_t' | \mathcal{F}_{t-1})$  は例えば確率変数  $z_1^*, y_1, \dots, z_{t-1}^*, y_{t-1}, z_t^*$  の関数であってもよいものとしておこう。ここで条件付期待値の条件  $\mathcal{F}_{t-1}$  は時刻  $t-1$  において利用可能な情報集合である。また、表現 (2.11) における先決変数  $z_t$  の中には過去の被説明変数  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ , あるいはその階差系列  $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}, \dots, \Delta y_{t-(p-1)}$  を有限個含んでいることに注意しておこう。

統計量の漸近分布を導く為には変数  $\{z_t\}$  及び誤差項  $\{v_t\}$  について幾つかの条件が必要である。そこでまず本節で使う幾つかの条件を説明しておこう。

(i) 確率変数列  $\{z_t, v_t\}$  及び増大する  $\sigma$ -集合体  $\mathcal{F}_t$  に対して  $z_t$  は  $\mathcal{F}_{t-1}$ -可測,  $v_t$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測とする。行列  $D_T^*$  は  $\mathcal{F}_0$ -可測であって外生変数列  $\{z_t^*\}$  は条件

$$(4.1) \quad D_T^{*-1} \sum_{s=1}^{[Tt]} z_s^* z_s^{*'} (D_T^*)^{-1} \rightarrow \int_0^t m(s) m(s)' ds \equiv M(t),$$

を満足するものとしよう。ここで  $m(s)$  は  $\mathcal{F}_0$ -可測で  $s$  の関数であり、行列  $M(t)$  は正定符号行列である。また条件

$$(4.2) \quad \max_{t=1, \dots, T} z_t^{*'} (D_T^* D_T^{*'})^{-1} z_t^* \rightarrow 0$$

を満足するものと仮定する。

(ii) 確率変数列  $\{v_t\}$  は  $E(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$  (a.s.),  $E(v_t v_t' | \mathcal{F}_{t-1}) = \Omega_t$  (a.s.) であって

$$(4.3) \quad \sum_{s=1}^{[Tt]} [\Omega_s \otimes D_T^{*-1} z_s^* z_s^{*'} (D_T^{*'})^{-1}] \xrightarrow{P} \Omega \otimes M(t),$$

を満足する。ここで  $\Omega$  は一定の行列であり、この条件は漸近的には条件的共分散行列と外生変数とが無相関となることを意味している。また  $a \rightarrow \infty$  のとき

$$(4.4) \quad \sup_{s=1, 2, \dots} E[v_s' v_s I(v_s' v_s > a) | \mathcal{F}_{s-1}] \xrightarrow{P} 0$$

としよう。この条件は誤差項がリンドバーク条件を満足する十分条件である。

(iii) 条件付共分散行列については条件

$$(4.5) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Omega_t \xrightarrow{P} \Omega$$

において  $\Omega$  が正定符号行列となることを仮定する。

(iv) 外生変数  $\{z_t^*\}$  については次のような追加的な条件を課する必要がある。ある  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) が存在して  $T \rightarrow \infty$  となるにつれて、

$$(4.6) \quad \Psi_T = \frac{1}{T^\delta} \text{tr} (Z_{-s}^{*'} \bar{P}_{Z^*} Z_{-s}^*)$$

は高々  $s, s'$  の多項式で抑えられる。ただし、行列  $Z_{-s}^*$  は第  $t$  行が  $z_{t-s}^*$  となる  $T \times K^*$  の行列である。

以上で言及した条件の中で (i), (ii), (iii) についての具体的な意味とよく知られている他の条件との関係については Anderson=Kunitomo (1992a)

が詳しく議論している。よく統計学や計量経済学の教科書で仮定しているような状況、例えば  $\{v_t\}$  が互いに独立で条件付分散共分散が一定の行列  $\Omega$  となることを始めから仮定すればこれらの条件は自動的に満足していることは容易にわかる。ここで強調することは通常の教科書で採用している仮定をかなり緩めても実証的には大きな問題が生じないという事実である。統計的方法が漸近的にこうした性質を備えている時には漸近的頑健性を持っていると呼ぶことがある。本稿で提案した統計量はこうした性質を備えているのである。

条件 (iv) は Kunitomo(1992) が用いたある意味では特殊な仮定であり、さらに緩めることは可能と思われるが、ここではその問題については考察を加えない。例えば外生変数として多項式トレンドを表す  $z_t^* = (1, t, \dots, t^r)'$  や折線関数を表す変数  $DT_i(t)$  や  $DU_i(t)$  を含む変数の場合にもこの条件を満足していることが確認できる。したがって、本稿で用いる例については以上の条件を満足しているとみなすことができよう。

ここで仮定した条件の下で本稿で導入した統計量の漸近分布を求めよう。ここで用いるのはマルチンゲール過程に対する汎関数中心極限定理 (functional central limit theorem)、あるいは不変原理 (invariance principle) と一般的に呼ばれている内容である。汎関数中心極限定理は Billingsley (1968) による弱収束の研究から系統的に研究されているが最近の単位根問題においてはなくてはならない分析道具である。その主な理由は単位根仮説の下では通常の統計学や計量経済学で用いられている漸近正規性や漸近  $\chi^2$  分布にもとづく漸近理論が成立しないからである。単位根が存在する場合にはランダム・オウーク要素は漸近的にブラウン運動と呼ばれる連続確率過程に収束 (弱収束) することをを用いる必要がある。したがって、単位根が存在する場合には検定統計量の分布は  $T \rightarrow \infty$  のときにはブラウン運動の関数 (汎関数) で表現されることになる。条件 (i),(ii),(iii),(iv) の下で以下の結果が得られる。漸近分布の導出は7節でより詳しく説明しておいた。

**定理 5 :** 確率変数列  $\{v_t, z_t^*\}$  について条件 (i)-(iv) を仮定する。また行列  $\Omega$  及び  $M(1)$  は正則行列として、さらに  $z_{1t}^*$  が  $\Delta z_{2t}^*$  に含まれること仮定する。このとき帰無仮説  $H_2$  の下で統計量のクラス  $RT_2$  の極限分布は共通であって



$$(4.7) \quad RT_2^* = \text{tr} \left( \tilde{N}' \left[ \tilde{M}^{-1} - \begin{pmatrix} M_{11}(1)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \right] \tilde{N} \right),$$

と表現される。ここで連続確率過程  $\{B(t)\}$  は  $G_0$ 次元のブラウン運動であり、行列  $\tilde{M}, \tilde{N}$  は

$$(4.8) \quad \tilde{M} = \int_0^1 \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix}' ds,$$

$$(4.9) \quad \tilde{N} = \int_0^1 \begin{pmatrix} m(s) \\ B(s) \end{pmatrix} dB(s)',$$

と表現される。また  $M_{11}(1)$  は  $K_1^* \times K_1^*$ の行列で

$$(4.10) \quad M_{11}(1) = \int_0^1 m_1(s)m_1(s)' ds,$$

と表現される。

**系 2** : 定理 5 と同様の仮定をおく。変数  $z_{1t}$  から変数  $z_{1t}^*$  を除いて作った統計量のクラス  $RT_2$  の極限分布は帰無仮説  $H_2'$  の下で共通で

$$(4.11) \quad RT_2^{**} = \text{tr} \left( \tilde{N}' \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \right),$$

と表現される。

ここで共和分仮説の下ではブラウン運動  $B(t)$  の次元は  $G_0 (= G - r)$  であることに注意しよう。共和分仮説の下では内生変数  $y_t$  の間に  $r$  個の共和分関係が成り立っているので独立に取ることの出来るランダム・ウォーク項の数は  $G_0$  となる。

特に  $G = G_0$  とするとこの共和分仮説の下での漸近分布は多次元の (単純) 単位根仮説の下での統計量の漸近分布となるが、この場合には Kunitomo (1992) の定理 2 の結果に一致する。さらに外生変数として定数項 (すなわち  $z_t^* = z_{2t}^* = 1$  の場合) のみをとる場合には二次形式についての簡単

な計算から Johansen(1991) の得た結果に一致することを示すことができる。共和分仮説については前節で言及したように Kunitomo (1992) は本稿とは異なる仮説を考察しているが、この場合には検定統計量の極限分布の表現は上の定理の結果に比べるとより複雑になる。

さらに  $G = G_0 = 1$  とおけばトレンド変化を含む 1 次元の単位根仮説に対する検定統計量の漸近分布が得られる。定理 4 で得られた漸近分布の形は統計量のクラス  $RT$  について共通なので、例えばトレンド変化を含むときの単位根仮説に対する尤度比検定統計量の漸近分布も (4.7) で与えられることがわかる。一次元の時系列の場合には 1 個の変化時点が既知の場合に Perron(1989) が  $t$ -統計量の漸近分布を求めている。より一般の場合の  $t$ -統計量の漸近分布の表現は Kunitomo(1992) が与えている。一般にトレンドに構造変化点があるときには単位根仮説はいくつかの係数制約条件を課することを意味していると考えられる。したがって、尤度比統計量の方が  $t$ -統計量よりも何らかの意味で検出力があると考えられよう。こうしたことから定理 4 の結果は単位根仮説の検定にも役立つことが期待できよう。実は既に線形トレンドに変化点がない場合について Dickey=Fuller(1979) は尤度比統計量を導いている。ここで導いた結果は彼らの結果をより一般的な状況に対して拡張したものと見なすこともできよう。

単位根が存在しない場合には極限分布の議論は標準的なものとなり、ブラウン運動による表現は必要なくなる。この場合での仮説  $H_3$  に対する検定統計量の漸近分布については Anderson=Kunitomo(1994) が用いた方法を少し修正することにより次のような結果が得られる。

**定理 6** : 確率変数列  $\{v_t, z_t^*\}$  について条件 (i)-(iii) を仮定する。また行列  $\Omega$  及び  $M(1)$  は正則行列とする。帰無仮説  $H_3$  の下では統計量のクラス  $RT_3$  の極限分布は共通であって自由度  $(G-r)(K_2^*-r)$  の  $\chi^2$ -分布となる。

## 4.2 構造変化点を含む場合の極限分布

ここで実証分析に有用と思われる極限分布の幾つかの例を考えよう。一般に極限分布はブラウン運動の汎関数なので通常の分布表としては特

殊な例を除いて存在しない。ここでは簡単な場合についてシミュレーションにもとずいて数値的に計算した分布関数を与えておく。

例 4.1: 第 2 節で考察した形の変化点が存在して変化点個数が  $q$  である状況を考えよう。仮説  $H_2$  に対する統計量  $RT_2$  を  $RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$  で表す。また尤度比統計量, ラグランジュ統計量, ワルド統計量をそれぞれ  $LR_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ ,  $LM_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ ,  $W_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ , で表そう。区間  $[0, T]$  における変化時点を  $0 < T_1 < \dots < T_q < T$  とすると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T} = \delta_i,$$

となることを仮定する。ただし変化点が極限において退化しない条件  $0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1$  が必要である。外生変数については

$$z_t^* = (1, DU_1(t), \dots, DU_q(t), t, DT_1(t), \dots, DT_q(t)),$$

$$z_{1t}^* = (1, DU_1(t), \dots, DU_q(t))$$

とおこう。ここでブラウン運動の次元は  $G_0$  である。例えば  $q = 1$  の場合には  $4 \times 4$  行列  $M(1)$  は具体的に計算すれば

$$\begin{aligned} M(1) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1_{(\delta_1, 1]} \\ s \\ (s - \delta_1)1_{(\delta_1, 1]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1_{(\delta_1, 1]} \\ s \\ (s - \delta_1)1_{(\delta_1, 1]} \end{pmatrix}' ds \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - \delta_1 & \frac{1}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} \\ 1 - \delta_1 & 1 - \delta_1 & \frac{1 - \delta_1^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} & \frac{1}{3} & \frac{(1 - \delta_1)^2(2 + \delta_1)}{6} \\ \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2}{2} & \frac{(1 - \delta_1)^2(2 + \delta_1)}{6} & \frac{(1 - \delta_1)^3}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となる。

ここで構造変化点が一個の場合 ( $q=1$ ) の極限分布について比較的詳しい数表を表 4.1 に与えておいた。極限分布を求める為に行ったシミュレーションの回数は 8,000 回であり区間  $[0, 1]$  を 1,000 等分して連続確率過程を離散近似した。我々が行った様々な実験の結果からは求められた分布のパーセント点は少なくとも上の 2 桁は信頼できる数値と判断できる。(表

4.1) この数表で記号 $\delta_1$ は構造変化点を表しているが、煩雑さを避けるために0.1きざみで分布を計算した。また $G_0$ はブラウン運動の次元である。

本節で報告する数表には統計量クラス $RT_2$ の漸近分布とともに固有方程式を満足する小さい方の $G_0$ 個の固有値の中での最大固有値にもとづく統計量のクラスとして

$$(4.12) \quad RT_2(\lambda_{G_0}^*) = g(\lambda_{G_0}^*)$$

の漸近分布も同時に掲載している。例えば統計量 $LR_2(\lambda_{G_0}^*)$ は

$$(4.13) \quad \begin{aligned} LR_2(\lambda_{G_0}^*) &= T \log(1 + \lambda_{G_0}^*) \\ &= T \sum_{i=1}^{G-r} \log(1 + \lambda_i^*) - \sum_{i=1}^{G-(r+1)} \log(1 + \lambda_i^*) \end{aligned}$$

であることから帰無仮説 $H_2$ の対立仮説

$$H_2'' : \text{rank}(\Gamma_2, B^*) = r + 1$$

に対する尤度比統計量になっていることは明らかであろう。この統計量は特に $G \geq 2$ のときにデータ分析において有益な情報を与えてくれる。

さて、例4.1ではトレンド関数の変化時点は既知と仮定して統計量の極限分布が求められた。変化時点が未知である場合においては次のように与えられた検定統計量を変更すればよい。

例4.2: 例4.1において変化時点 $T_i$  ( $i = 1, \dots, q$ )が未知の場合には検定統計量は

$$\sup_{0 < \delta_1 < \dots < \delta_q < 1} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$$

として定義することができよう。この統計量を $\max_{\delta_1, \dots, \delta_q} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$ で表すことにする。この統計量は変化時点を既知として計算した統計量から容易に計算できるので変化時点が未知の時に単位根や共和分を検定することが可能となる。そこで構造変化点が一の場合( $q=1$ )の極限分布について比較的詳しい数表(表4.2)を与えておいた。シミュレーションの方法は例4.1と同様で連続確率過程を離散近似して分布表を作成した。

例4.1の他にも実証分析で応用することができる様々なトレンド関数を考察することが可能である。その極限分布は煩雑になるのでここでは報告しないが例4.1と例4.2において $q=2$ の場合における検定統計量の極限分布の数表はKunitomo=Sato(1994)が与えているので参照されたい。

例 4.3: 日本のマクロ金融データではトレンド関数に非線形が見られることがある。こうした状況に対応するトレンド関数としては例えば外生変数として

$$z_t^* = (1, DU_1(t), DT_1(t), DT_2(t), t, QT_1(t), QT_2(t)),$$

$$z_{1t}^* = (1, DU_1(t), DT_1(t), DT_2(t))$$

を使うことが考えられる。ここで関数  $QT_i(t), i = 1, 2$  は

$$QT_i(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t \leq T_i) \\ (t - T_i)^2 & (T_i < t \leq T) \end{cases}$$

で定められる 2 次関数である。この場合の統計量  $RT_2$  を  $RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$  で表しておこう。

例 4.3 ではトレンド関数の変化時点は既知と仮定して統計量の極限分布が求められた。変化時点が未知であるとみなされる場合においては例 4.2 のように与えられた検定統計量を変更すればよい。次の例 4.4 における検定統計量の漸近分布の数表も Kunitomo=Sato(1994) が与えている。

例 4.4: 例 4.2 と同様に例 4.3 においても変化時点が未知の場合には検定統計量は

$$\sup_{0 < \delta_1 < \delta_2 < 1} RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$$

として定義することができるのでこれを  $\max_{\delta_1, \delta_2} RT_2(2; \delta_1, \delta_2)$  で表しておこう。

本節の締めくくりとして、ここで示したアプローチを用いることにより実はより一般的な状況を考察することができることに言及しておこう。4.2 節で示したように多次元時系列において構造変化点、あるいはトレンド変化点が複数ある場合でも 3.2 節で導いた統計量の構成方法を使えば単位根検定や共和分検定を行うことができる。もし、変化点の位置を事前に指定したく無ければ 4.2 節のように統計量を構成すればよい。ところで、複数の変化点を考察する場合には変化点の個数をいかに選ぶかが問題となろう。本節のアプローチからは変化点の最大個数が有限であることを仮定すれば直接的に検定方式を導くことができる。例えば例 4.2 を再び考察してみよう。

例 4.5: 例 4.2 において変化時点の個数が有限として最大可能性を  $q_0$  としよう。固定された  $q$  ( $q \leq q_0$ ) 個の変化点に対して検定統計量は

$\max_{\delta_1, \dots, \delta_q} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$  で与えられる。変化点の数が未知なので個数  $q$  を動かした統計量として

$$RT_2(1; q_0) = \max_{0 \leq q \leq q_0} \max_{\delta_1, \dots, \delta_q} RT_2(1; \delta_1, \dots, \delta_q)$$

を定義することができよう。

1 節においても言及したように単位根検定や共和分検定を行う為にこれまでに様々な検定統計量が提案されてきた。また、主要なマクロ経済時系列についての実証結果は必ずしも検定統計量に依存せずに一様な結果は得られていないと判断される。本稿が展開した方法を系統的に用いることによりその原因を理解することができることが期待されよう。

## 5 マクロ経済データ分析への応用

### 5.1 検定結果

本節では 2 種類のデータ・セットを使って前節で説明した検定を行った結果を報告する。第一のデータ・セットとしては代表的な金融時系列として外国為替レートを用いた。ここで使用したのは 1993 年 8 月 2 日-1994 年 10 月 27 日において東京の外国為替市場で観察されたドル・円・レート及びドル・マルク・レートで、日次為替レート・データとして外国為替市場が開かれて取引の行われた毎日の終値を用いた。第二のデータ・セットとしては代表的なマクロ経済時系列として 1955 年第 2 四半期-1993 年第 1 四半期における日本の実質 GDP と実質個人消費のデータを用いた。利用したデータは国民経済計算で報告されている季節調整済の四半期データである。また、実際の分析ではいずれの場合も初期値として最初の 11 個のデータを固定し、さらに原系列の対数変換値を分析に用いた。

#### 為替レート

定常性の検定を行う前に自己回帰項部分のラグの次数  $p$  を決定する必要がある。為替レートのデータを用いて推定した結果からあまり高次のラグ係数は有意とはならなかった。そこで  $p = 2$  としてまず単位根についての尤度比検定を行った。表 5.1 は 3 節で説明したように無制約残差平方和 (URSS), 制約付残差平方和 (RRSS) 及び尤度比統計量の値をまとめたものである。ドル・円レートのデータでは構造変化点が 1 個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 18.7991$  であった。

ドル・マルクレートのデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 22.8215$  であった。これに対して数表 4.2 で与えられている極限分布の 90 パーセント点は 23.74 である。したがって、10 パーセント有意水準でも円ドルレートとマルクドルレートが単位根過程となる仮説は棄却できなかった。構造変化点が無いことを仮定しても同様の結果が得られた。

次に共和分検定の結果は表 5.2 にまとめておいた。2次元為替レートのデータでは構造変化点が1個あるとき変化点に関する尤度比検定統計量の最大値は  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; G_0 = 1) = 13.7605$ ,  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; G_0 = 2) = 48.4236$  であった。ここで  $LR_2(1; \delta_1; G_0 = 1)$  は帰無仮説  $H_2: r = 1$  の対立仮説  $H_{2A}: r = 2$  に対する尤度比統計量,  $LR_2(1; \delta_1; G_0 = 2)$  は帰無仮説  $H_2: r = 0$  の対立仮説  $H_{2A}: r = 2$  に対する尤度比統計量である。これに対して数表 2 で与えられている極限分布の 90 パーセント点は  $G_0 = 1$  の場合には 23.74,  $G_0 = 2$  の場合には 42.88 である。したがって、10 パーセント有意水準で共和分仮説を棄却できなかった。ちなみに、このデータでは 2 個の固有値の大きい方から求めた統計量  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1; \lambda_2^*) = 34.5631$  の値も 95 パーセント点 33.43 よりも大きかった。この統計量  $LR_2(1; \delta_1; \lambda_2^*)$  は帰無仮説  $H_2: r = 0$  の対立仮説  $H_{2A}: r = 1$  に対する尤度比統計量であるので、この統計量の数値も数表 4.1 から共和分仮説と整合的となった。したがって、2次元データから推定された単位根の次元  $G_0$  は 1 となり、共和分関係が検出された。

実は為替レートのデータの場合には分析結果はいずれもラグのとり方や変化点の選び方には結果はあまり依存しないことがわかっている。このことは二つの残差平方和はトレンドに変化点が無いと見なして検定を行った結果とほとんど違いが生じないことを意味している。したがって、これまでに開発されている既存の検定方式を使うことによっても十分に信頼できる結果が得られると考えられよう。

### 所得・消費

ラグの次数  $p$  はデータが四半期データであることを考慮して 5 とした。そこでまず単位根についての検定を行ってみたが、この例の場合もラグの次数の選び方によってはほとんど検定結果はかわらなかった。ここで比較の為に最近の実証分析でよく使われている Dickey=Fuller(1979) の統計量を計算すると単位根は所得と消費ともに棄却できなかったが、この結果は以前に行われた結果と整合的である。次に表 5 として 1 個の変化点 ( $\delta_1$ ) がある場合の無制約残差平方和 (URSS), 制約付残差平方和 (RRSS)

及び尤度比統計量の値をまとめた結果を表 5.3 で報告しておくことにする。この表からすぐにわかる問題は変化点の位置により検定結果が大きく異なることである。したがって、検定結果も変化点の取り方による大きく左右される。また変化点が端点に近い場合には統計量は変化点がないと仮定した場合に近くなっていることも観察されている。直観的には変化点として 1973 年前後にとるのが適当とも考えられるが、例えば変化点として 1976 年頃を選ぶと検定統計量が極めて小さくなる。この場合には 2 つの残差平方和が見かけ上であまり変わらない数値をとることが直接の原因であるが、トレンド変化点の位置を誤ると検定そのものに大きな影響を与えることが例証されていると解釈する事ができよう。したがって、構造変化点の選択に依存しない統計量の有意点を用いる必要があると考えられる。

実質 GDP のデータでは構造変化点が 1 個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 28.8146$  であった。また実質消費のデータでは構造変化点が 1 個あるとき変化点に関する検定統計量の最大値は  $\max_{\delta_1} LR_2(1; \delta_1) = 32.1064$  であった。これに対して数表 4.2 で与えられている極限分布の 90 パーセント点, 95 パーセント点, 97.5 パーセント点はそれぞれ 23.74, 25.54, 27.56 である。したがって、5 パーセント有意水準では実質 GDP と実質消費についての単位根仮説は棄却された。このような単位根検定の結果は前にも言及した副島 (1994) や小原 (1994) が得た実証結果と整合的である。

単位根の存在について否定的な結果を得たので共和分関係は無いものと考えられる。そこで次にトレンドの共変動を表現する帰無仮説  $H_3$  の検定を行ってみた。具体的な仮説としてはいくつかの形が考えられるが構造変化点が 1 個ある共変動として変数  $z_t^* = (1, t, DT_t(\delta_1))$  及び変数  $z_{1t}^* = 1$  を用いて計算した統計量の数値を表 5.4 にまとめておく。ここでの仮説は定数項を除いてトレンド関数が共変動していることを意味しているが、変化点を固定したときの自由度は  $L = 1$  である。表 5.4 における尤度比統計量を含めた検定統計量の値は漸近分布の  $\chi^2$ (自由度 1) と比較して極めて小さな数値をとっているのでトレンド関数の共変動仮説を棄却できないと考えられる。<sup>2</sup>

ここでの実質 GDP と実質消費の系列についての分析結果は次のようにまとめることができる。1 次元時系列の単位根検定により構造変化点を

<sup>2</sup>変化時点を動かした場合の統計量の最大値は 2.4588 である。この統計量から統計的検定を行うには  $\chi^2$  分布の有意水準をかえる必要もあるが仮説  $H_3$  を棄却できないのは明らかである。



含むときには両方ともに単位根仮説は統計的に棄却され、変化するトレンド関数を持つ定常時系列モデルが適当であるように判断される。また、検出された構造変化点を含むトレンド関数には仮説  $H_3$  を満たす意味での共変動関係（回帰関係）が検出された。このトレンドに共変動関係が存在すると所得と消費に長期的な関係が存在することになるので一種の”長期の消費関数”と解釈することも可能である。また、その他に行った多くの計算結果からの経験的事実としては直接に共和分仮説をトレンドの共変動関係と区別することが難しいこともわかった。

## 5.2 情報量基準と経済時系列分析上の問題点

前節までは経済時系列における非定常性の検定問題を考察した。こうした統計的検定は経済理論に関するある種の制約条件を経済データから検定していると考えられるのでその意味では経済時系列の変動に関して何らかの情報を提供しているといえることができる。

しかしながら、より実際的かつ政策的な観点からは現実に観察される経済時系列の分析に基づいて将来値の予測を行うことなどにより大きな関心があることも少なくない。こうした将来の時系列値の予測の観点からは観察データを統計的にもっともよく表現する統計モデルを構築することが重要となる。構造変化点を含む次元線形時系列モデルでは情報量基準は残差から簡単に計算できる。ここで念の為に情報量基準について簡単に説明しておこう。説明変数の数を  $k$  とすれば定常時系列モデルにおける赤池の情報量基準 (AIC) は

$$AIC = T \log \frac{(\text{残差平方和})}{T} + 2k$$

で与えられることはよく知られている。

単位根が存在しないときには複数のトレンド関数に線形関係が存在する仮説  $H_3$  の場合もほぼ同様に AIC を導くことができる。時系列の次元を  $G$ ,  $G_0 = G - r$ ,  $K_2^* - r > 0$  とすると仮説  $H_3$  の下では制約の数は

$$L = G_0(K_2^* - r)$$

のなる。したがって赤池の情報量基準 (AIC) は

$$AIC(r) = AIC(G) + T \sum_{i=1}^{G_0} \log(1 + \lambda_i^*) - 2L$$

で与えられる。ただし  $L > 0$  であって、 $\lambda_i^*$  ( $i = 1, \dots, G_0$ ) は被説明変数ベクトルを  $\Delta y_t$ , 説明変数ベクトルを

$$z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

$$z_{1t}' = (z_{1t}^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}')$$

と選んだ時に方程式 (2.14) の根の中から小さい方から選んだ  $G_0$  個の固有値である。さらに  $AIC(G)$  は定常時系列モデルに対する AIC であり

$$AIC(G) = T \log \left| \frac{\Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y}{T} \right| + 2G(K^* + pG)$$

で定義される。

さて線形時系列モデルに単位根が存在する場合には情報量基準を修正する必要があることに注意しておこう。<sup>3</sup>ここで定理 5 で導いた極限分布  $RT^*$  の期待値を  $k^*$  で表現しておこう。この期待値を使って一次元時系列に単位根が存在する下では相対的信息量基準は

$$AIC' = T \log \frac{(\text{残差平方和})}{T} + 2(k - k^*)$$

とすることが考えられる。ここで  $k^*$  は制約条件の下での尤度比統計量の期待値であるが、定常時系列モデルの場合にはこの項は  $\chi^2$ -分布の期待値になる。したがって通常の公式では第二項は説明変数の数に対応することになる。構造変化点を含むモデルを用いた AIC は例えば表 5.2 の残差平方和から計算することができる。変化点が固定されている場合には母数の数が固定されているので AIC の動きは残差平方和の動きに対応する。表 5.3 から明らかかなように定常性を仮定するか否かにかかわらず変化点の位置は 1973 年前後に検出されている。

次に単位根を含む多次元時系列モデルに対する情報量基準を説明しておこう。共和分仮説  $H_2$  の下では共和分の個数を  $r (= G - G_0)$  とすると制約条件の数は

$$L = G_0 \times (K_2^* + G_0)$$

個である。再び定理 5 で導いた極限分布  $RT_2^*$  の期待値を  $k^*$  とすると相対的信息量基準は

<sup>3</sup>通常の AIC の導出では推定量の漸近正規性から第 2 項を導くが、単位根が存在する場合には推定量はこの性質を持たないので AIC を修正する必要がある。いくつかの修正が考えられるがその詳しい議論は省略する。

$$AIC(r)' = AIC(G) + T \sum_{i=1}^{G_0} \log(1 + \lambda_i^*) - 2k^*$$

で与えられる。ただし  $\lambda_i^*$  ( $i = 1, \dots, G_0$ ) は被説明変数ベクトルを  $\Delta y_t$ , 説明変数ベクトルを

$$z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}'),$$

$$z_{1t}' = (z_{1t}^{*'}, \Delta y_{t-1}', \dots, \Delta y_{t-(p-1)}')$$

と選んだ時に方程式 (2.14) の根の中から小さい方から選んだ  $G_0$  個の固有値である。

ここで導いた修正された基準を次のように解釈することが可能である。自己回帰部分が定常条件を満たすとき  $G_0 = 0$  となるの  $AIC(r)'$  は  $AIC(G)$  に一致する。  $0 < r < G$  の時にはもし標本から計算された固有値が小さければ右辺の第一項は小さくなく、第二項は負の値を取るのので  $AIC(r)'$  は  $AIC(G)$  よりも小さくなるのが期待される。これに対して、標本から計算された固有値が大きければ右辺の第二項よりも大きくなるのでかえって  $AIC(r)'$  は  $AIC(G)$  よりも大きくなってしまうことになるのである。このような意味では修正された  $AIC$  は直観的な議論と整合的であるように判断されよう。

しかしながら、ここで強調しておくべきことはここで説明した情報量基準は単位根が存在しない複数モデルの比較、あるいは単位根が存在する複数モデルの比較のみに意味を持つことである。すなわち、定常性あるいは非定常性を仮定してラグ次数や変化点の選択に用いることができるのである。この意味においては情報量基準はデータの分析に際して有用ではあるが、本稿の一つの目的である非定常性の検出問題には限定的な有用性しかないと言えるであろう。

また、本節で報告した経済時系列データを用いて行った分析から問題点もまた明らかとなっている。多次元の経済時系列に対して情報量基準を適用すると、低次の自己回帰項を含む線形時系列モデルが採択されることがある。この場合には時系列分析に期待するような経済時系列の動的変動に関する含意が豊かな分析結果を必ずしももたらしてくれない。このことの一つの解釈としては多次元時系列の場合ひは高次次数モデルをそれほど多くないデータから推定すると統計的には有意でない多くの係数推定値が得られることによると考えられる。<sup>4</sup>このような場合にはトレ

<sup>4</sup>変化点が未知の場合や変化点の個数が未知の場合における情報量基準は興味のある話題であるが本稿では議論を省略する。

ンド関数の共変動仮説を始め様々な制約条件を導入して母数の数を減らす必要がある。こうした問題は経済時系列をこれまで統計的時系列分析でよく用いてきた線形時系列モデルでとらえようとするにも問題があるとする解釈もありうるであろう。例えば構造変化の問題をとってみても変化点は時系列における一種の非線形性を表現していることが妥当であろう。非線形時系列分析において単位根や構造変化点を含む非定常性をどのように解釈し、実証分析に結びつけるかは最近になりようやく関心を呼んでいる問題であり、今後の大きな課題であるように考えられる。こうした問題についての分析は別の機会に報告したい。

## 6 結論

経済時系列の計量分析においては最近になって確率的な意味での非定常性が問題となり、実証分析においてもしばしば単位根検定や共和分検定が行われるようになってきている。本稿ではまずこうした既存の統計的検定方法によりマクロ経済時系列や金融時系列から直接的に確率的非定常性を検出することには基本的に再検討すべき統計的問題があることを指摘した。

マクロ経済データや金融データを使って単純な線形統計的時系列モデルを当てはめると、しばしば線形定常時系列モデルよりもある種の非定常時系列モデルの方があてはまりのよいことが報告されている。単位根検定と呼ばれている統計的検定を用いるとしばしば単位根（ランダム・ウォーク）の存在が統計的に否定できない。しかしながら従来の統計的検定方法ではトレンドの扱いが機械的で単純化し過ぎていることが多いと判断することができよう。特に所得や消費を始めとする多くのマクロ経済変数の長期的変動では時々大きな構造的な変化が起こると見ることはそれほど奇異な見方とは考えられない。むしろ少なくとも戦後の日本におけるマクロ変数の変動を観察する場合には比較的自然的な考え方であろう。これまで単純な形で単位根検定を行うと単位根が棄却されないことについての比較的妥当な解釈としては既に存在する非定常性の検定では第2節に示したようにトレンドの変化が決定的な影響を及ぼす可能性があることをより真剣に検討すべきであるように判断される。少なくとも、日本のマクロ経済時系列に関する限りこの問題について多くの実証研究を再検討すべきであるように結論される。

次に本稿では経済時系列における確率的トレンドの有無をデータから検証しようとする場合の統計的方法として特に共和分関係が存在する場合についての新しい検定統計量とそれにもとづく検定方法を提唱した。本稿の枠組みでは共和分の次元 $r$ がゼロの場合には共和分仮説は単位根仮説に一致するので、多次元時系列から構成される検定統計量の特殊な場合として構造変化を含む単位根仮説に対する尤度比検定統計量などを求めることができる。本稿で得られた1次元の統計量はPerron(1979)が提案している $t$ -統計量などに対しても検出力が大きいことが期待できる。したがって、本稿で提案した検定統計量は多次元時系列における共和分仮説の検定問題のみでなく1次元時系列における構造変化を含んだ単位根検定にも役立つはずである。ここで得られた統計量の漸近分布は帰無仮説の下でブラウン運動の汎関数として表現されるので既存の数表を利用することは可能ではない。そこでシミュレーションにより漸近分布のパーセント点を求めておいた。これらの分布表は様々な実証分析において役立つことが期待できよう。

さらに本稿ではここで提案する方法を用いることにより様々な検定方式を統一的に理解できることを示したつもりである。例えば5.3節で言及したように原理的には多次元時系列において構造変化時点が未知であって構造変化点の個数も未知の場合にも単位根検定や共和分検定を考えることができるので様々な分析で有用な方法を与えてくれることが期待できる。他方、こうした分析を系統的に行うことは他のアプローチでは極めて困難であるように判断される。

最後に本稿で提案した検定方法及び情報量基準を用いて若干の日本のマクロ時系列データの分析を行った。本稿で報告するデータ分析は実証的な意味においては不完全で準備的なことは否めないが、構造変化を含む時系列に対して単純な単位根検定や共和分検定を行うことには問題が多いことが明らかになったように判断できる。すなわち単純な統計的時系列モデルを定式化した上で検定方法を機械的にマクロ金融時系列に適用することには多くの問題があるようである。時系列データ分析への含意としては機械的に統計的な単位根検定を適応してゆくよりも、むしろモデル構築の際には”注意深く”情報量基準などを用いて経済構造に関する様々な知識を利用してゆくことの方が実用的な観点からもより重要であるように結論づけられよう。

## 7 数学付録

定理 1 の証明:

[i] (D)  $\Rightarrow$  (C): 条件 (D-i) の下で 2 つの行列  $\alpha, \beta$  を構成する各列ベクトルと直交するベクトルから階数  $G_0 (= G - r)$  の 2 つの行列 ( $G \times G_0$ ) をとることができる。そこで行列多項式  $A(\lambda)$  に対して左と右からそれぞれ正則行列  $(\alpha, \alpha_\perp)', (\beta, \beta_\perp)'$  を乗じると (2.9) より固有方程式は

(7.1)

$$\begin{aligned} & |(\lambda - 1)(\alpha, \alpha_\perp)' D(\lambda)(\beta, \beta_\perp) - \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \beta' \beta & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1}| \\ &= (\lambda - 1)^{G_0} |(\alpha, \alpha_\perp)' D(\lambda)((\lambda - 1)\beta, \beta_\perp) - \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \beta' \beta & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。この方程式には  $G_0$  個の単位根があることは明らかである。次に多項式行列  $A(\lambda)^*$  を

$$A(\lambda)^* = (\alpha, \alpha_\perp)' D(\lambda)((\lambda - 1)\beta, \beta_\perp) - \begin{pmatrix} \alpha \alpha' \beta \beta' & O \\ O & O \end{pmatrix} \lambda^{p-1}$$

とおいて  $\lambda = 1$  を代入すると,

$$A(1)^* = \begin{pmatrix} -\alpha \alpha' \beta \beta' & \alpha' D(1) \beta_\perp \\ O & \alpha'_\perp D(1) \beta_\perp \end{pmatrix}$$

となる。ここで条件 (D-ii) より  $|\alpha'_\perp D(1) \beta_\perp| \neq 0$  となることから  $|A(1)^*| \neq 0$  となる。さらに条件 (D-iii) を用いれば仮定 A の下で条件 (C) が導かれる。

[ii] (C)  $\Rightarrow$  (D): 逆に条件 (C) を仮定すると条件 (D-i) が成立する。なぜならば、もし  $r = 0$  あるいは  $r = G$  とすると (2.9) を用いた議論より矛盾が生じる。また条件 (D-ii) と (D-iii) は [i] の証明から明らかである。□

定理 3 の証明:

一般性を失うことなく真の時系列モデルの自己回帰部分の次数  $p = 2$  としよう。 $p > 2$  の時にはマルコフ表現を用いて  $p = 2$  の場合に議論を還元

することができる。固有方程式のすべての根の絶対値は1よりも小さいので、階差系列  $\{\Delta y_t\}$  は定常過程

$$(7.2) \quad \Delta y_t = \Gamma \Delta z_t^\dagger + A \Delta y_{t-1} + \Delta v_t,$$

と表そう。(ただし係数行列は  $A = A_1$  である。) このとき真のトレンド関数は

$$\Delta z_t^\dagger = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ DU_1(t) \\ \vdots \\ DU_q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_t^* \\ z_t^{**} \end{pmatrix}$$

となるが、変数ベクトル  $z_t^{**}$  は上式の右辺で定義した。ここで変数ベクトル

$$a_t = \begin{pmatrix} 1 \\ DU_1(t) \\ \vdots \\ DU_q(t) \\ t \\ DT_1(t) \\ \vdots \\ DT_q(t) \end{pmatrix},$$

変数に対応する標準化行列を

$$D_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{T}} I_{q+1} & O \\ O & \frac{1}{\sqrt{T}} I_{q+1} \end{pmatrix},$$

とおこう。このとき  $T \rightarrow \infty$  につれて

$$D_T^{-1} \sum_{t=1}^T a_t a_t' D_T^{-1} \rightarrow M^*$$

となる。このとき右辺の行列  $M^*$  は正定符号となることが容易にわかる。

次に階差系列  $\{\Delta y_t\}$  をトレンド部分と確率的部分とに分解して  $\Delta y_t = \xi(t) + \psi(t)$  としよう。ただし

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \Gamma \Delta z_{t-i}^{\dagger},$$

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \Delta v_{t-i},$$

である。ここで

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y &= \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_Z \Xi \\ &+ \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_Z \Psi + \frac{1}{T} \Psi' \bar{P}_Z \Xi + \frac{1}{T} \Psi' \bar{P}_Z \Psi \end{aligned}$$

と分解する。(7.3)式においては $\Xi (T \times K)$ と $\Psi (T \times G)$ はそれぞれベクトル $\xi(t)'$ と $\psi(t)'$ から作られた行列である。右辺の4項の中で第2項と第3項は容易に $o_p(1)$ であることがわかるので漸近的には無視することができる。第4項については漸近的に

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Psi' \bar{P}_Z \Psi &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Psi' \Psi \\ &= \sum_{i,i'=0}^{\infty} A^i \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta v_{t-i} \Delta v'_{t-i'} \right) A^{i'} \\ &= 2F\Omega F' = \Omega^* > 0 \end{aligned}$$

となる。ただし

$$F = \sum_{s=0}^{\infty} A^s$$

で与えられる。第1項については $z'_i = (z_i^*, y'_{t-1})$ なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_Z \Xi &= \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_{Z^*} \Xi \\ &- \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} (Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} Y_{-1})^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} \Psi \end{aligned}$$

と分解して考えることができる。ここで $z_{1t} = z_t^*$ なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_{Z_1} \Xi &- \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_Z \Xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \Xi' \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1} (D_{2T}^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1})^{-1} D_{2T}^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} \Xi \frac{1}{\sqrt{T}} \end{aligned}$$



と変形できる。そこで  $((q - q_1) + (G - (q - q_1))) \times G$  の基準化行列を  $D_{2T}^{-1}$  として

$$D_{2T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T\sqrt{T}} E_1' \\ \frac{1}{\sqrt{T}} E_2' \end{pmatrix}$$

を選んでおく。ところで  $(q + 1) \times (q + 2)$  の行列  $J_1 = (O, I_{q+1})$  に対して

$$E_2' F \Gamma J_1 \begin{pmatrix} O \\ I_{q-q_1} \end{pmatrix} = O$$

とすることができる。ここで  $\{a_t\}$  に関する議論を用いると、 $T \rightarrow \infty$  のときに

$$(7.5) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} D_{2T}'^{-1} Y_{-1}' \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1} = M_{22.1} > 0$$

$$(7.6) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \Xi' \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1} = N_{2.1}$$

となるような正定符号行列  $M_{22.1}$  及び行列  $N_{2.1}$  が存在することがわかる。また簡単な計算から行列  $N_{2.1}$  の階数は  $q - q_1$  となる。そこで次に

$$\frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_{Z^*} \Xi = \frac{1}{T} \Xi' \Xi - \frac{1}{T} \Xi' Z^* D_T^{*-1} \left( D_T^{*'-1} Z'^* Z^* D_T^{*'-1} \right)^{-1} D_T^{*'-1} Z'^* \Xi$$

より

$$(7.7) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Xi' \bar{P}_{Z^*} \Xi = F \Gamma C_1^* \Gamma' F',$$

となる非負定符号行列  $C_1^*$  が存在する。このことから

$$(7.8) \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_{Z^*} \Delta Y = \Omega^* + C_2^*,$$

となる非負定符号行列  $C_2^*$  が存在することがわかる。

さらに

(7.9)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{T} \Delta Y' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Delta Y \\
&= \frac{1}{T} \Xi' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Xi \\
&+ \frac{1}{T} \Xi' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Psi + \frac{1}{T} \Psi' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Xi + \frac{1}{T} \Psi' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Psi
\end{aligned}$$

を評価することを考えよう。全く前と同様にして第2項と第3項は  $o_p(1)$  である。また第4項は

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Psi' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Psi = \Omega^* - \Omega^* = O$$

である。したがって

(7.10)

$$\begin{aligned}
& \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Delta Y'_{-1} (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Delta Y'_{-1} \\
&= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \Delta Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1} \left( D_{2T}^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} Y_{-1} D_{2T}^{-1} \right)^{-1} \\
&\quad \times D_{2T}^{-1} Y'_{-1} \bar{P}_{Z^*} \Delta Y_{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \\
&= N_{2.1}^{*'} M_{22.1}^{-1} N_{2.1}^* \\
&= C_3^*
\end{aligned}$$

という非負定符号行列  $C_3^*$  に収束する。特に  $G - q_1 - 1 \geq 0$  のとき行列  $N_{2.1}^*$  の階数は  $(q - q_1) + (G - q - 1)$  となる。したがってこのとき行列  $C_3^*$  の階数は

$$\text{rank}(C_3^*) = G - q_1 - 1$$

となる。また  $G - q_1 - 1 < 0$  のときには行列  $C_3^*$  の階数はゼロである。

以上の考察から固有方程式

$$\left| \frac{1}{T} \Delta Y' (\bar{P}_{Z_1} - \bar{P}_Z) \Delta Y - \lambda^* \frac{1}{T} \Delta Y' \bar{P}_Z \Delta Y \right| = 0$$

の確率極限は

$$\left| C_3^* - \left( \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \lambda^* \right) (\Omega^* + C_2^*) \right| = 0$$

で与えられる。(7.10)式において $G \times G$ 行列 $C_3^*$ の階数は $\max G - q_1 - 1, 0$ なので定理の結果を得る。□

定理4の証明:

(i) 仮定の下で定理1の証明より固有方程式

$$|A(\lambda)^*| = 0$$

のすべての根の絶対値は1よりも小さい。したがって、行列 $A(\lambda)^*$ に対応するラグ多項式を

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \Pi(L) &= \frac{1}{\lambda^p} A(L^{-1})^* \\ &= (\alpha, \alpha_\perp)' [I_m - \sum_{i=2}^p B_i L^{i-1}] ((1-L)\beta, \beta_\perp) - \begin{pmatrix} \alpha' \alpha \beta' \beta & O \\ O & O \end{pmatrix} L \end{aligned}$$

により定めれば、行列多項式 $\Pi(L)$ は反転可能である。ここで行列多項式 $A(\lambda)$ に対するラグ多項式を

$$A(L) = I_G - \sum_{i=1}^p A_i L^i$$

とおこう。このとき(2.9)と同様に式を変形すると簡単な計算から

$$(\alpha, \alpha_\perp)' A(L) ((1-L)\beta, \beta_\perp) = (1-L)\Pi(L)$$

と書き直すことができる。行列多項式 $\Pi(L)$ は反転可能であるから

$$(7.12) \quad \Delta y_t^* = ((1-L)\beta, \beta_\perp) \Pi(L)^{-1} (\alpha, \alpha_\perp)' (\Gamma z_t^* + v_t),$$

により時系列 $\{\Delta y_t^*\}$ を定めることができる。このとき

$$(\alpha, \alpha_\perp)' A(L) \Delta y_t^* = (\alpha, \alpha_\perp)' \Delta (\Gamma z_t^* + v_t)$$

となるので $\{\Delta y_t^*\}$ から構成された $\{y_t^*\}$ はもとの確率過程 $\{y_t\}$ に一致する。したがって、行列多項式を

$$(7.13) \quad C(L) = ((1-L)\beta, \beta_\perp) \Pi(L)^{-1} (\alpha, \alpha_\perp)',$$

により定めることができる。ここで形式的に  $L = 1$  を代入すれば

$$\begin{aligned} C &= C(1) \\ &= (O, \beta_{\perp}) \begin{pmatrix} -\alpha' \alpha \beta' \beta & \alpha' D(1) \beta_{\perp} \\ O & \alpha'_{\perp} D(1) \beta_{\perp} \end{pmatrix}^{-1} (\alpha, \alpha_{\perp})' \\ &= \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} D(1) \beta_{\perp})^{-1} \alpha' \end{aligned}$$

となる。この表現から  $G \times G$  行列  $C$  の階数は  $r$  となることがわかる。行列多項式  $\Pi(L)^{-1}$  を展開した  $L^k$  の係数はある正数  $q_2, 0 < \rho < 1$  が存在して  $O(k^{q_2} \rho^k)$  となるので収束する。(例えば Anderson=Kunitomo(1992a) の付録の議論を参照されたい。) 仮説  $H_2$  の下では行列  $(\Gamma_2, B^*) = \alpha(\gamma'_2, \beta')$  となるので

$$C\Gamma_2 = O$$

である。

(ii) 次に (i) より

$$\begin{aligned} C(L) - C &= (1 - L)(\beta, O)\Pi(L)^{-1} (\alpha, \alpha_{\perp})' \\ &+ (O, \beta_{\perp})[\Pi(L)^{-1} - \Pi(1)^{-1}] (\alpha, \alpha_{\perp})' \end{aligned}$$

と書けることに注意する。さらに

$$\Pi(L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^k L^k$$

と展開すると、 $\Pi_k = O(k^{q_2} \rho^k)$  である。したがって

$$\begin{aligned} \Pi(L)^{-1} - \Pi(1)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^k L^k - \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k \\ &= (1 - L) \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^j \right] L^k \end{aligned}$$

と変形される。ここである正数  $q_3$  が存在して

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^j \right\| = O(k^{q_3} \rho^k)$$

となることが容易にわかる。したがって行列多項式を

(7.14)

$$C_1(L) = (\beta, O)\Pi(L)^{-1}(\alpha, \alpha_\perp)' + (O, \beta_\perp) \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=k+1}^{\infty} -\Pi^j \right] L^k (\alpha, \alpha_\perp)'$$

とおけば、行列多項式  $C_1(L)$  は定理 3(iii) のように展開できることがわかる。トレンド部分については  $C\Gamma_2 = O, z_{1t}^* = \Delta z_{2t}^*$  であることに注意すると、

$$(7.15) \quad \begin{aligned} C(L)\Gamma z_t^* &= C(1)\Gamma_1 z_{1t}^* + C_1(L)(\Gamma_1 \Delta z_{1t}^* + \Gamma_2 \Delta z_{2t}^*) \\ &= (1-L)(C(1)\Gamma_1 z_{2t}^* + C_1(L)(\Gamma_1 z_{1t}^* + \Gamma_2 z_{2t}^*)) \end{aligned}$$

となるので、右辺のラグ多項式をまとめて  $(1-L)C_2(L)$  とおくことにより  $C_2(L)$  を定義すればよい。これから行列多項式  $C_2(L)$  も定理 3(iii) のように展開できることがわかる。

(iii) 最後にラグ多項式  $A(L)$  を変形して

$$A(L) = -\alpha\beta' + (1-L)A^*(L)$$

とおこう。ただし

$$A^*(L) = I_G + \alpha\beta' - \sum_{i=2}^p B_i L^{i-1}$$

である。この表現を使って  $\alpha' A(L)y_t$  を求めると

$$-\alpha' \alpha \beta' y_t + \alpha' A^*(L) \Delta y_t = -\alpha' \Gamma_1 z_{1t}^* + \alpha' \Gamma_2 z_{2t}^* + \alpha' v_t$$

となる。仮定より  $\gamma_2' = (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Gamma_2$  となるので、共和分部分の期待値について

$$(7.16) \quad E(\beta' y_t + \gamma_2' z_{2t}^*) = (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' A^*(L) E(\Delta y_t) + (\alpha' \alpha)^{-1} \alpha' \Gamma_1 \Delta z_{2t}^*$$

なる関係を得る。これより定理 3(vi) が示される。□

**定理 5 の導出:**

帰無仮説の下での漸近分布の導出は Kunitomo (1992) の定理 4 の証明を

少し修正することにより可能となる。簡単の為に  $p = 2$  としておく。帰無仮説の下で統計量のクラス  $RT_2$  の分布は漸近的に

$$(7.17) \quad RT_2' = \text{tr} \left\{ U' \left( \bar{P}_{ZD} - \bar{P}_Z \right) U \Sigma^{-1} \right\}$$

と同等になる。ここで変数ベクトルは  $z_t' = (z_t^{*'}, y_{t-1}', \Delta y_{t-1}')$ ,  $z_{1t}' = (z_{1t}^{*'}, \Delta y_{t-1}')$  とおいた。  $T \times G_0$  の行列  $U$  と  $G_0 \times G_0$  の行列  $\Sigma$  は

$$U = V \alpha_{\perp}, \Sigma = \alpha_{\perp}' \Omega \alpha_{\perp}$$

で与えられる。また (4.11) の右辺に表れる行列  $D$  は  $(G + K_2^*) \times (r + (K_1^* + (p-1)G))$  に分割できて、  $r \times r$  の行列  $|\alpha^*| \neq 0$  を使って

$$D = \left\{ \left( \begin{array}{c} \beta \\ \gamma_2 \end{array} \right) \alpha^*, \left( \begin{array}{c} I_{K_1^* + (p-1)G} \\ O \end{array} \right) \right\}$$

で与えられる。

ここで行列  $(Y_{-1}, Z_2^*)$  の射影行列を 3 つに分割して行列  $F_1 = Y_{-1}\beta + Z_2^* \gamma_2$ ,  $F_2 = Y_{-1}\alpha_{\perp} + Z_2^* \gamma_{2\perp}$ ,  $Z_2^*$  による射影行列に分解できることに注意する。いま  $F_3 = \Delta Y_{-1}$  として行列  $F = (F_1, F_2, F_3)$  とおこう。このとき Kunitomo (1992) の定理 2 の証明と同様にすると

$$\begin{aligned} U' \bar{P}_Z U &= U' \left( \bar{P}_{Z^*} - \bar{P}_{Z^*} F (F' \bar{P}_{Z^*} F)^{-1} F' \bar{P}_{Z^*} \right) U \\ &\cong U' \left( \bar{P}_{Z^*} - \bar{P}_{Z^*} P_{F_2} \bar{P}_{Z^*} \right. \\ &\quad \left. - \bar{P}_{Z^*} (F_1, F_3) \left( (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z^*} (F_1, F_3) \right)^{-1} (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z^*} \right) U \end{aligned}$$

となる。ここで定理 3 より

$$\bar{P}_{Z^*} F_2 \cong \bar{P}_{Z^*} S_{-1} C(1)' \alpha_{\perp} = \bar{P}_{Z^*} S_{-1}^*$$

と表現される。ただし  $T \times G$  行列  $S_{-1}$  の第  $t$  行は  $y_{t-1}'$  であり、  $T \times G_0$  行列  $U$  の第  $t$  行は  $u_t' = v_t' C(1)' \alpha_{\perp}$  で与えられる。また便宜上の為初期値として  $v_0 = v_{-1} = \dots = O$  を仮定しておこう。

全く同様に

$$U' \bar{P}_{ZD} U \cong U' \left( \bar{P}_{Z_1^*} - \bar{P}_{Z_1^*} (F_1, F_3) \left( (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z_1^*} (F_1, F_3) \right)^{-1} (F_1, F_3)' \bar{P}_{Z_1^*} \right) U$$

で与えられる。ここで仮定の下で  $\{\Delta Y_{-1}\}$  は定常確率過程  $\{\Delta y'_{t-1}\}$  の系列を並べて作った  $T \times G_0$  行列なので

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} U' \bar{P}_{Z^*} \Delta Y_{-1} &= \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} U' \bar{P}_{Z_1^*} \Delta Y_{-1} \\ &= O \end{aligned}$$

となることは明らかである。そこで漸近的には

$$\begin{aligned} (7.18) \quad RT_2' &\cong \text{tr}\{U' (\bar{P}_{Z_1^*} - \bar{P}_{Z^*} + \bar{P}_{Z^*} P_{F_2} \bar{P}_{Z^*}) U\} \\ &\cong \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z_1^*} U\} - \text{tr}\{U' (\bar{P}_{Z^*} - \bar{P}_{Z^*} F_2 (F_2' \bar{P}_{Z^*} F_2)^{-1} F_2' \bar{P}_{Z^*}) U\} \\ &\cong \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z_1^*} U\} - \text{tr}\{U' \bar{P}_{Z^*, S_{-1}^*} U\} \\ &= \text{tr}\{U' P_{Z^*, S_{-1}^*} U\} - \text{tr}\{U' P_{Z_1^*} U\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで上式の第1項が

$$\text{tr}\{U' (Z^*, S_{-1}^*) D_T^{-1} \left( D_T^{-1'} (Z^*, S_{-1}^*)' (Z^*, S_{-1}^*) D_T^{-1} \right)^{-1} D_T^{-1} (Z^*, S_{-1}^*)' U\}$$

と書き換えられるに注意する。さらに基準化行列としては  $(K^* + G_0) \times (K^* + G_0)$  行列

$$D_T^{-1} = \begin{pmatrix} D_T^{*-1} & O \\ O & \frac{1}{T\sqrt{T}} I_{G_0} \end{pmatrix}$$

を使うことにしよう。ここで Kunitomo (1992) の定理 1 を適用すると (7.18) の第一項は

$$\text{tr}(\tilde{N}' \tilde{M}^{-1} \tilde{N})$$

に収束することがわかる。第2項も同様の議論を適用すれば定理の結果が得られる。□

## 参考文献

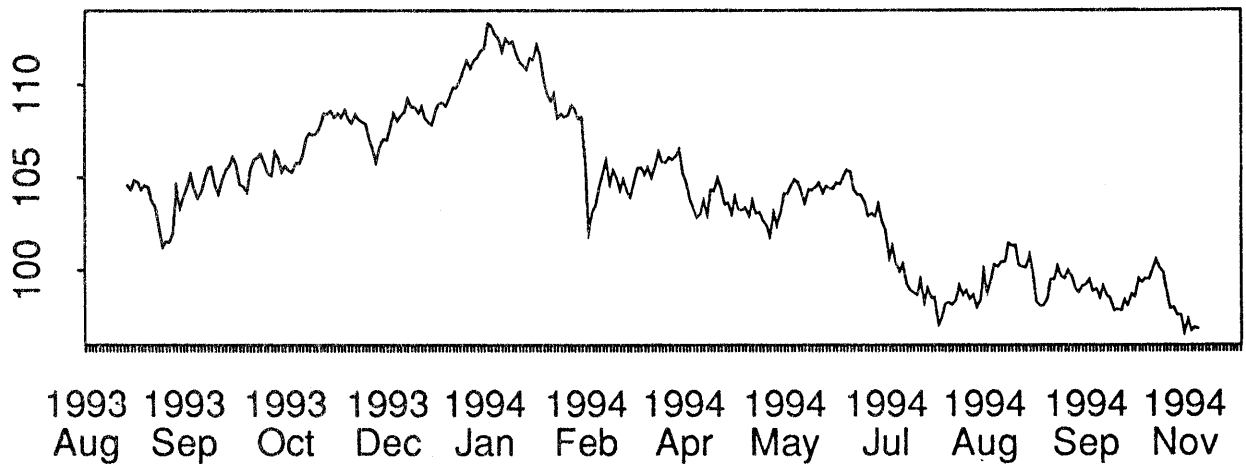
- [1] Anderson, T. W. (1951). Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 327-351.
- [2] Anderson, T. W. (1984). An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, Second Edition, John-Wiley.
- [3] Anderson, T. W. , and Kunitomo, Naoto (1992a). Asymptotic distributions of regression and autoregression coefficients with martingale differences, *Journal of Multivariate Analysis*, **40**, 221-243.
- [4] Anderson, T. W., and Kunitomo, Naoto (1992b). Tests of overidentification and predeterminedness in simultaneous equation models, *Journal of Econometrics*, **54**, 49-78.
- [5] Anderson, T. W., and Kunitomo, Naoto (1994). Asymptotic robustness of tests of overidentification and predeterminedness, *Journal of Econometrics*, **62**, 383-414.
- [6] Dickey, D.A. and W.A.Fuller (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.
- [7] Dickey, D.A. and W.A.Fuller (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica*, **49**, 4, 1057-1072.
- [8] Engle, R. and Granger, C.W.J. (1987). Cointegration and error correction: representation, estimation, and testing, *Econometrica*, **55**, 2, 251-276.
- [9] Fuller, W.A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John-Wiley.



- [10] Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, 59, 6, 1551-80.
- [11] 副島豊 (1994). 日本のマクロ変数の単位根検定, 「金融研究」日本銀行金融研究所 (近刊).
- [12] Kunitomo, N. (1992). Tests of unit roots and cointegration hypotheses in econometric models, Discussion Paper No.92-F-7, Faculty of Economics, University of Tokyo. *Japanese Economic Review*(近刊), Blackwell.
- [13] Kunitomo, N. and Sato, S. (1994). Tables of limiting distributions useful for unit roots and cointegration tests with structural changes, In preparation.
- [14] 小原英隆 (1994). Unit roots test with unknown trend breaks: A Theory and Application to Japan and U.S. macro time series, (未公開).
- [15] Perron, P. (1989). The Great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis, *Econometrica*, 57, 6, 1361-1401.
- [16] Phillips, P.C.B. and Ouliaris, S. (1990). Asymptotic properties of residual based tests for cointegration, *Econometrica*, 58, 1, 165-193.
- [17] Phillips, P.C.B. and P. Perron (1988). Testing for a unit root in time series regression, *Biometrika*, 72,2,335-46.

図3.1

為替レート: US ドル - 円 (東京)



為替レート: US ドル - ドイツ・マルク (東京)

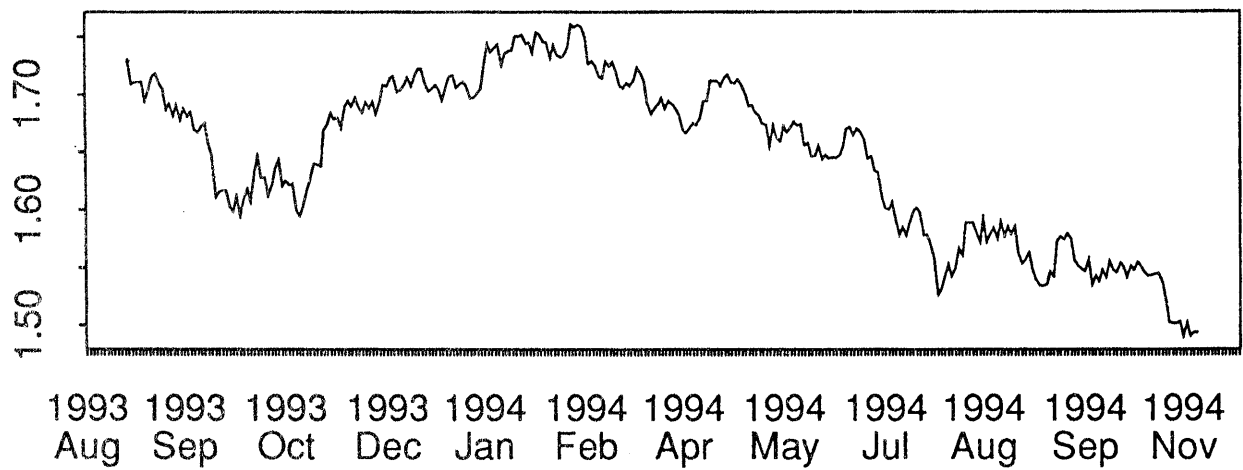


図3.2 (a)

GDP (上) 消費 (下)

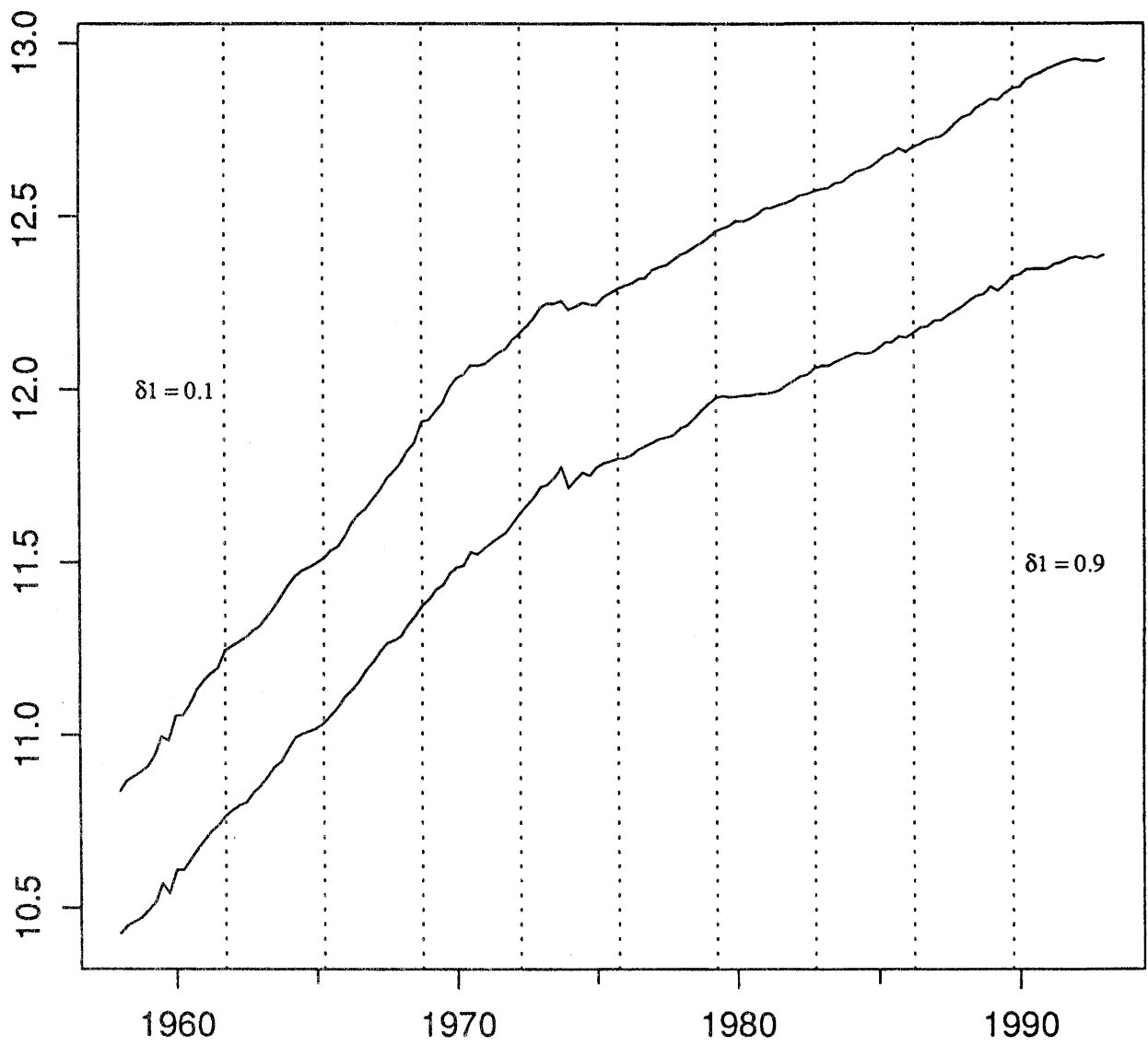
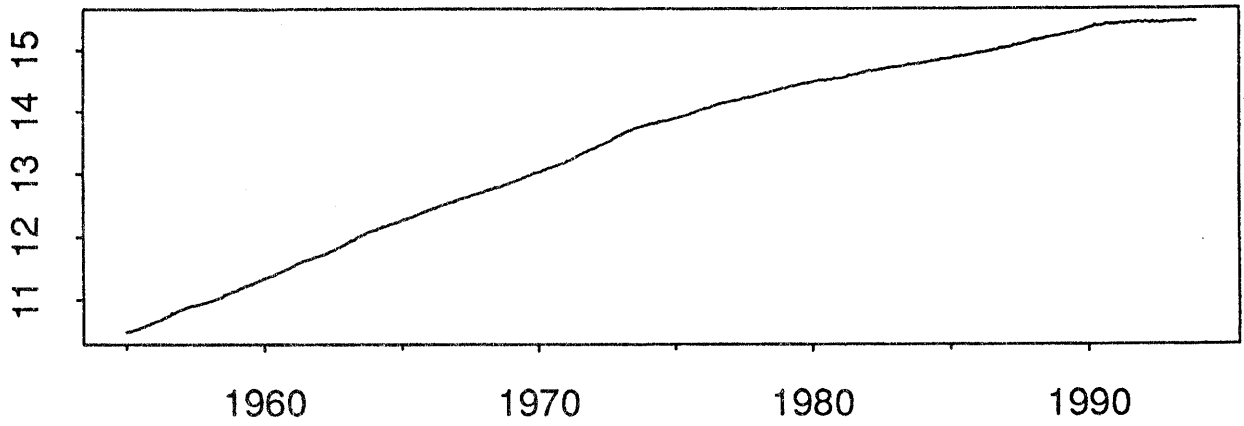


図3.2 (b)

M2+CD



GDP デフレーター

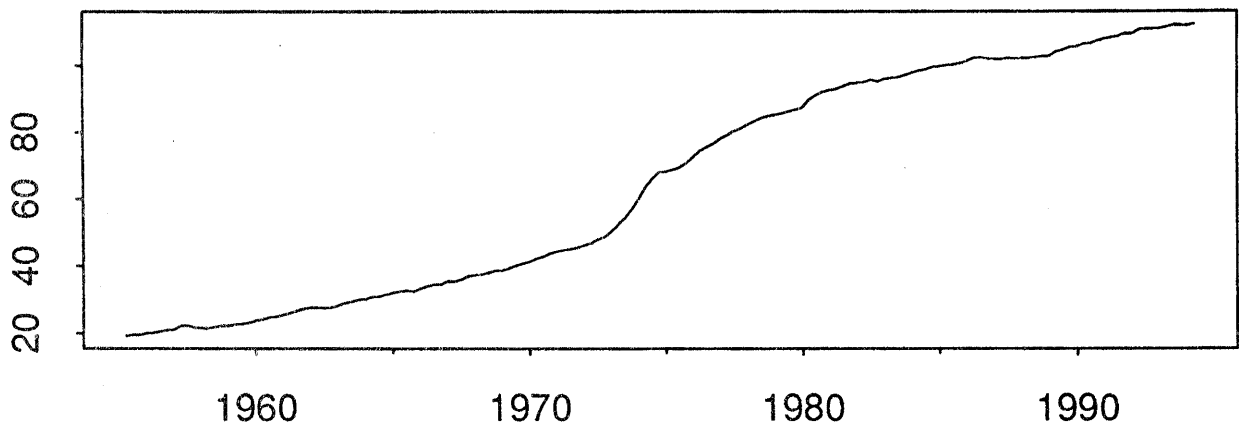


表 4.1 極限分布表 ( $q = 1$ )

(i)  $RT_2 (G_0 = 1)$

$\delta_1$	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	2.119	2.653	3.123	3.866	7.501	13.477	15.563	17.820	20.203	8.173	3.886
0.2	2.682	3.183	3.801	4.562	8.552	14.833	16.956	18.798	21.170	9.211	4.132
0.3	3.181	3.742	4.470	5.346	9.530	15.841	18.210	20.349	23.019	10.193	4.257
0.4	3.756	4.450	5.108	5.940	10.005	16.361	18.669	20.770	23.548	10.699	4.240
0.5	3.956	4.569	5.198	6.055	10.214	16.560	18.660	20.675	22.955	10.840	4.159
0.6	3.719	4.315	5.025	5.865	10.114	16.296	18.387	20.647	22.908	10.712	4.167
0.7	3.172	3.819	4.451	5.243	9.327	15.737	17.853	20.051	22.921	10.036	4.213
0.8	2.594	3.204	3.831	4.582	8.548	14.792	16.923	19.295	21.929	9.233	4.159
0.9	2.108	2.697	3.169	3.822	7.454	13.260	15.426	17.517	19.862	8.108	3.835

(ii)  $RT_2 (G_0 = 2)$

$\delta_1$	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	9.824	11.013	12.150	13.580	19.897	28.356	31.302	33.541	36.798	20.572	5.872
0.2	10.979	12.247	13.492	15.128	21.801	30.384	33.531	36.127	39.403	22.406	6.133
0.3	12.191	13.726	15.115	16.657	23.483	32.314	35.496	38.251	42.102	24.133	6.308
0.4	13.094	14.566	15.860	17.448	24.346	33.738	36.565	39.352	42.935	25.092	6.391
0.5	13.176	14.634	15.976	17.693	24.591	33.757	36.829	39.445	42.799	25.271	6.361
0.6	12.803	14.428	15.731	17.258	24.241	33.575	36.397	39.123	42.672	24.909	6.382
0.7	12.370	13.572	14.866	16.469	23.430	32.348	35.343	37.754	41.118	24.046	6.257
0.8	11.048	12.415	13.608	15.109	21.846	30.631	33.752	36.386	39.684	22.505	6.188
0.9	9.820	10.976	11.980	13.476	19.650	28.315	31.315	34.147	37.381	20.411	5.935

(iii)  $RT(\lambda_{G_0}^*) (G_0 = 2)$

$\delta_1$	1%	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	99%	Mean	S.D.
0.1	6.195	6.982	7.840	8.951	13.758	20.523	23.004	25.192	27.643	14.342	4.626
0.2	7.035	7.880	8.740	9.857	14.808	21.719	24.284	26.529	29.282	15.400	4.778
0.3	7.842	8.724	9.639	10.766	15.651	22.692	25.240	27.622	30.637	16.308	4.841
0.4	8.105	9.029	9.893	11.040	16.067	23.431	25.797	27.849	30.599	16.725	4.910
0.5	8.084	8.995	9.989	11.053	16.182	23.262	25.818	28.078	30.760	16.758	4.865
0.6	8.025	9.010	9.835	11.047	15.986	23.031	25.600	28.176	31.160	16.605	4.889
0.7	7.775	8.655	9.474	10.592	15.663	22.711	25.026	27.252	30.057	16.287	4.806
0.8	7.060	7.874	8.718	9.865	14.938	21.906	24.355	26.926	29.659	15.500	4.847
0.9	6.118	6.982	7.814	8.827	13.557	20.416	22.810	25.123	27.988	14.191	4.669

表 4.2 変化時点が未知の時の極限分布表 ( $q = 1$ )

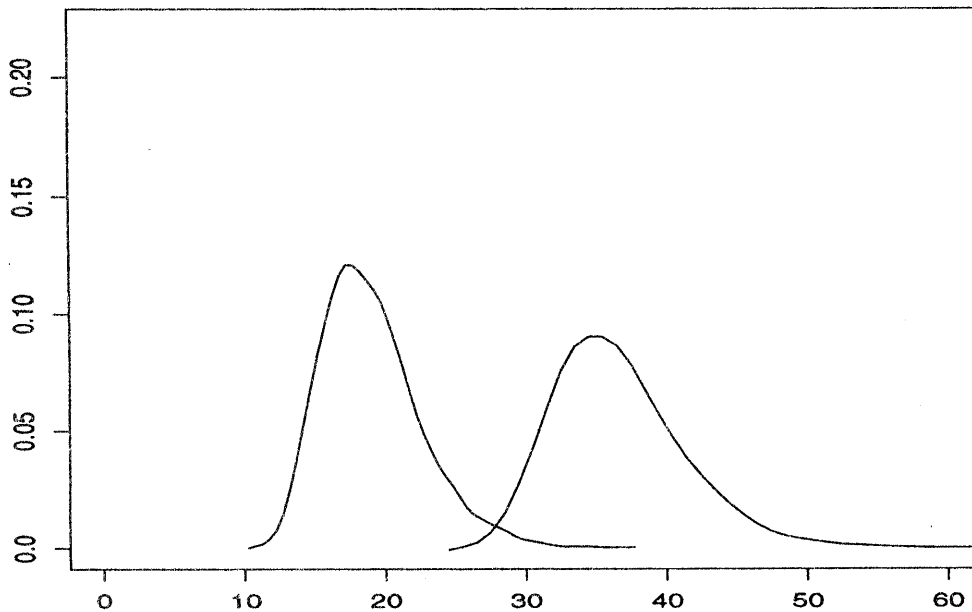
(i)  $\max RT_2$

	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	Mean	S.D.
$G_0=1$	13.464	14.054	14.896	18.571	23.744	25.539	27.558	19.035	3.581
$G_0=2$	29.041	29.965	31.107	35.989	42.884	45.207	47.521	36.592	4.708
$G_0=3$	48.066	49.276	50.650	56.899	65.216	68.182	70.643	57.532	5.812
$G_0=4$	71.149	72.515	74.301	81.294	90.627	94.003	96.885	81.980	6.543
$G_0=5$	97.713	99.306	101.217	109.707	120.495	124.300	127.674	110.462	7.708

(ii)  $\max RT(\lambda_{G_0}^*)$

	2.5%	5%	10%	50%	90%	95%	97.5%	Mean	S.D.
$G_0=1$	13.464	14.054	14.896	18.571	23.744	25.539	27.558	19.035	3.581
$G_0=2$	19.981	20.691	21.661	25.645	31.337	33.430	35.464	26.176	3.920
$G_0=3$	26.107	26.857	27.871	32.215	38.174	40.257	42.031	32.688	4.149
$G_0=4$	32.021	32.870	33.932	38.379	44.758	46.867	49.207	38.953	4.364
$G_0=5$	37.840	38.740	39.833	44.677	51.282	53.808	56.249	45.272	4.702

図 4.1 推定された  $\max RT_2$  の極限分布



(左:  $G_0 = 1$ , 右:  $G_0 = 2$ )

表 5.1 単位根検定 — 為替レート ( $p = 2$ )

US ドル - 円				US ドル - ドイツ・マルク			
$\delta_1$	LR	URSS	RRSS	$\delta_1$	LR	URSS	RRSS
0.05	8.2229	0.0114	0.0118	0.05	5.3233	0.0114	0.0116
0.1	11.8329	0.0114	0.0118	0.1	11.5485	0.0112	0.0116
0.15	12.4798	0.0113	0.0118	0.15	19.0659	0.0109	0.0117
0.2	14.4460	0.0113	0.0118	0.2	18.4411	0.0110	0.0117
0.25	13.7825	0.0112	0.0118	0.25	18.2762	0.0110	0.0116
0.3	13.2549	0.0112	0.0117	0.3	22.8215	0.0108	0.0117
0.35	18.6610	0.0110	0.0117	0.35	20.6517	0.0108	0.0116
0.4	18.7991	0.0111	0.0118	0.4	20.3671	0.0108	0.0116
0.45	11.6554	0.0114	0.0119	0.45	14.9890	0.0111	0.0116
0.5	12.1527	0.0114	0.0118	0.5	10.3565	0.0112	0.0116
0.55	11.4826	0.0114	0.0119	0.55	11.0726	0.0112	0.0116
0.6	11.5083	0.0114	0.0119	0.6	6.4159	0.0114	0.0116
0.65	12.1815	0.0114	0.0119	0.65	5.1138	0.0114	0.0116
0.7	13.1485	0.0114	0.0119	0.7	3.3655	0.0115	0.0117
0.75	13.8358	0.0114	0.0119	0.75	6.0013	0.0115	0.0117
0.8	13.1132	0.0114	0.0119	0.8	3.0852	0.0116	0.0117
0.85	13.3962	0.0114	0.0119	0.85	4.8952	0.0115	0.0117
0.9	12.2612	0.0114	0.0119	0.9	4.0973	0.0115	0.0117
0.95	11.7729	0.0114	0.0119	0.95	2.7235	0.0115	0.0116

表 5.2 共和分検定 — 為替レート ( $p = 2$ )

$\delta_1$	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	LR( $G_0 = 1$ )	LR( $G_0 = 2$ )	LM( $G_0 = 1$ )	LM( $G_0 = 2$ )	W( $G_0 = 1$ )	W( $G_0 = 2$ )
0.05	0.0203	0.0420	5.9566	18.1454	5.8970	17.8383	6.0169	18.4602
0.1	0.0305	0.0658	8.9064	27.7642	8.7738	27.0434	9.0418	28.5132
0.15	0.0309	0.1014	9.0019	37.5994	8.8664	36.1258	9.1402	39.1647
0.2	0.0391	0.1012	11.3504	39.8811	11.1355	38.3344	11.5708	41.5218
0.25	0.0379	0.1002	10.9981	39.2758	10.7963	37.7653	11.2050	40.8774
0.3	0.0351	0.1260	10.2162	45.3435	10.0419	43.1649	10.3946	47.6911
0.35	0.0475	0.1225	13.7248	47.9401	13.4115	45.7233	14.0480	50.3192
0.4	0.0476	0.1242	13.7605	48.4236	13.4455	46.1560	14.0853	50.8597
0.45	0.0258	0.1193	7.5488	40.9162	7.4533	39.0088	7.6459	42.9668
0.5	0.0252	0.1112	7.3552	38.5619	7.2645	36.8825	7.4473	40.3584
0.55	0.0232	0.1201	6.7899	40.3733	6.7126	38.4609	6.8684	42.4310
0.6	0.0225	0.1047	6.5900	36.0609	6.5172	34.5685	6.6639	37.6519
0.65	0.0242	0.0854	7.0902	31.3433	7.0060	30.2921	7.1758	32.4502
0.7	0.0215	0.0794	6.3083	28.9274	6.2415	28.0181	6.3760	29.8818
0.75	0.0332	0.0837	9.6760	33.4724	9.5196	32.3845	9.8359	34.6149
0.8	0.0230	0.0804	6.7285	29.6106	6.6526	28.6726	6.8055	30.5954
0.85	0.0288	0.0772	8.3930	30.4097	8.2752	29.4930	8.5131	31.3693
0.9	0.0239	0.0763	7.0017	28.7656	6.9196	27.9025	7.0852	29.6691
0.95	0.0201	0.0764	5.8951	27.6968	5.8368	26.8550	5.9542	28.5789

表 5.3 単位根検定 — 所得・消費 ( $p = 5$ )

実質 GDP				実質消費			
$\delta_1$	LR	URSS	RRSS	$\delta_1$	LR	URSS	RRSS
0.05	18.8843	0.0159	0.0181	0.05	21.9292	0.0177	0.0207
0.1	12.6797	0.0166	0.0181	0.1	17.2255	0.0183	0.0207
0.15	16.0018	0.0163	0.0183	0.15	18.2663	0.0182	0.0207
0.2	15.3319	0.0162	0.0181	0.2	18.6215	0.0180	0.0206
0.25	18.3584	0.0156	0.0177	0.25	23.0714	0.0172	0.0203
0.3	27.6683	0.0143	0.0174	0.3	24.3195	0.0167	0.0199
0.35	14.9298	0.0144	0.0160	0.35	16.9494	0.0167	0.0188
0.4	28.8146	0.0138	0.0169	0.4	32.1064	0.0152	0.0191
0.45	16.4191	0.0147	0.0166	0.45	17.9438	0.0155	0.0176
0.5	6.6378	0.0169	0.0177	0.5	7.0500	0.0183	0.0192
0.55	6.7007	0.0169	0.0178	0.55	6.0274	0.0189	0.0197
0.6	7.4405	0.0170	0.0179	0.6	6.0762	0.0188	0.0196
0.65	8.8806	0.0170	0.0181	0.65	10.1811	0.0189	0.0203
0.7	9.2234	0.0170	0.0181	0.7	10.4614	0.0189	0.0204
0.75	10.5363	0.0169	0.0182	0.75	11.6834	0.0189	0.0205
0.8	10.0556	0.0169	0.0182	0.8	13.1217	0.0188	0.0206
0.85	13.2018	0.0166	0.0183	0.85	14.3732	0.0187	0.0207
0.9	12.6687	0.0167	0.0183	0.9	14.0921	0.0188	0.0208
0.95	10.6052	0.0168	0.0181	0.95	14.2124	0.0189	0.0209

表 5.4 共変動検定 — 所得・消費 ( $p = 5$ )

$\delta_1$	$\lambda_1^*$	$\lambda_2^*$	LR( $G_0 = 1$ )	LR( $G_0 = 2$ )	LM( $G_0 = 1$ )	LM( $G_0 = 2$ )	W( $G_0 = 1$ )	W( $G_0 = 2$ )
0.05	0.0091	0.0970	1.2827	14.3344	1.2769	13.7428	1.2885	14.9634
0.1	0.0081	0.0541	1.1380	8.5686	1.1335	8.3716	1.1426	8.7724
0.15	0.0080	0.0570	1.1257	8.9397	1.1212	8.7227	1.1302	9.1648
0.2	0.0081	0.0743	1.1308	11.2307	1.1263	10.8729	1.1354	11.6057
0.25	0.0087	0.1422	1.2283	19.9699	1.2230	18.7724	1.2337	21.2779
0.3	0.0083	0.2633	1.1639	34.1215	1.1592	30.5483	1.1688	38.2966
0.35	0.0085	0.4144	1.1912	50.0799	1.1862	42.4996	1.1963	59.6312
0.4	0.0123	0.4579	1.7210	54.8819	1.7105	45.9991	1.7315	66.3018
0.45	0.0176	0.1199	2.4588	18.4271	2.4375	17.5347	2.4804	19.3880
0.5	0.0136	0.0513	1.9045	8.9649	1.8917	8.7782	1.9174	9.1575
0.55	0.0099	0.0311	1.3937	5.7126	1.3868	5.6402	1.4006	5.7863
0.6	0.0070	0.0247	0.9799	4.4252	0.9765	4.3801	0.9833	4.4711
0.65	0.0026	0.0170	0.3692	2.7474	0.3687	2.7270	0.3697	2.7681
0.7	0.0022	0.0170	0.3167	2.6947	0.3164	2.6744	0.3171	2.7153
0.75	0.0039	0.0160	0.5468	2.7866	0.5457	2.7679	0.5479	2.8056
0.8	0.0065	0.0160	0.9186	3.1562	0.9156	3.1356	0.9216	3.1770
0.85	0.0135	0.0198	1.8909	4.6542	1.8783	4.6147	1.9036	4.6942
0.9	0.0136	0.0293	1.8992	5.9700	1.8865	5.8991	1.9120	6.0422
0.95	0.0093	0.0355	1.3077	6.2208	1.3017	6.1301	1.3138	6.3135