97－J－5

季節調整法 X-12-ARIMA の特長と問題点

東京大学大学院経済学研究科

国友直人

1997年5月

季節調整法 X-12-ARIMA の特長と問題点*

国友直人†

1997年4月

要約

この小論では米国センサス局の時系列研究グループが開発しつつある季節調整法X-12-ARIMAの中で用いられている統計的方法について, その開発者Findley et.al. (1996)の説明を手がかりとして主として理論的な観点から見たいくつかの論点を議論する．さらに官庁における季節調整の実務的運用においても検討すべきいくつかの関連する問題について言及する.

鍵言葉

季節調整法, センサス局X-11法, センサス局X-12-ARIMA法, 季節自己回帰和分移動平均(SARIMA)過程, 線形回帰モデル, 経済時系列のモデリング.

---

*この小論は季節調整法X-12-ARIMAに関する理論的な論点を整理する目的で総務庁統計局季節調整法検討小委員会1996年11月の会議の席上で報告した内容をもとにさらに加筆・修正して作成した論考である.

†東京大学経済学部.

On Some Characteristics and Problems of X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Method

By Naoto Kunitomo
Faculty of Economics, University of Tokyo
May 1997

Abstract:

This memorandum summarizes the essential features of X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Method developed by the Time Series Group of the U.S. CENSUS and explained by Findley et. al. (1996). We shall mention several characteristics of X-12-ARIMA method and the related practical problems, which the statistical agencies in Japanese government should examine.

1. はじめに

時間の経過とともに観測される時系列データが必ずしも独立な標本の実現値とは見なせず，得られるデータにおける時間的前後関係が重要な役割を演じていると想定してデータの分析を行う必要が生じることがある．統計学ではこのような時系列データの特性を考慮してデータを扱う分野を一般に時系列解析(time series analysis)と呼んでいる．さらに，経済に関する時系列データの解析を扱う分野はしばしば経済時系列分析と呼ばれているが，この分野では近年でも様々な研究が活発に行われている．こうした時間的変動を伴う経済時系列の分析では古くから一つの重要な研究対象として季節性の統計的扱いを巡る問題がとりあげられてきている．特に中央・地方行政当局をはじめとする官庁統計では観測される経済時系列データの季節的変動をあらかじめ取り除いて公表したいと考える理由があるので、季節調整法の研究は官庁統計の実務的問題とも密接に絡んで議論されてきている．歴史的にはこれまでに何らかの方法で観測される時系列から季節性を取り除こうとする様々な方法が提案され，実用に共されてきた．このように観測される経済時系列から季節性を取り除く統計的方法を季節調整法と呼ぶことにするとこれまでに様々な名前の季節調整の統計的方法が検討されてきている．

とりわけ経済時系列の研究分野の動向とあいまって米国のセンサス局を中心として1950年代から60年代初頭にかけて様々な角度からの季節調整法の研究・開発が行われた．当時の動向を文献で振り返ってみると色々な試行錯誤の末に結果として，シスキン氏を中心とするセンサス局の研究グループにより今日，センサス局X-11法と呼ばれている季節調整法が開発されたように理解されよう．当時、官庁統計における季節調整法の開発・検討が国際的規模で行われていた中で我国の政府当局でも様々な検討がなされ，経済企画庁によるEPA法，通商産業省によるMITI法などが開発・実用化されている．その後，官庁統計を巡る環境の変化を経験する中で最近では日本を含め多くの国の官庁統計では実務的にセンサスX-11法がもっともよく用いられるようになっている．

ところでセンサス局法を開発した米国のセンサス局には充実した研究部門があり，長年にわたり官庁統計を巡る様々な問題について統計学的な研究を続けている．センサス局の研究部門で行われている研究は最近では官庁統計を巡る様々な問題に広がりを見せているが，こうした地道な基礎的研究成果の蓄積をふまえ，他方では様々な形で官庁統計の実務面への応用研究も同時に行っている．最近になりようやく日本の官庁統計家やエコノミストの間において新しい季節調整法として注目を浴びるようになっているX-12-ARIMA法の研究・開発もこうした官庁統計の研究・開発を巡る大きな流れの一つとして理解されよう．

この小論ではセンサス局の中に存在する時系列研究グループが開発している季節調整法X-12-ARIMAで用いられている統計的道具立てについて，ようやく一般に公開された未公刊論文Findley et. al. (1996) [1]及び開発者の書いた関連論文を手がかりとして報告者がこれまでに理解できた範囲でその具体的内容について

[1]この論文はインターネット上から読むことが可能のようなので公開といえるかも知れない．しかし学術的研究論文の体裁をとっているのでここでは一応未公開(unpublished)と解釈した．この論文はかなり技術的論文の側面が強いので内容の説明も技術的にならざるをえないことをお断りする．また，1996年10月の時点においてインターネット上から得られたX-12-ARIMA法の利用者マニュアルBureau of Census (1996)及びFindley et. al. (1988,89,90)も参考にした．ただ

解説を加える．同時に，この新しいX-12-ARIMA法におけるいくつかの重要な統計学的問題について報告者の解釈あるいはコメントを述べる．このX-12-ARIMA法は米国のセンサス局における研究グループが開発者であるので，我国の官庁統計家やエコノミストにとってはその開発経緯やその内容について正確に理解することは必ずしも容易ではない．また，開発されインターネット上で公開されているX-12-ARIMA法の基礎となる統計的方法の具体的内容を正確に理解するには，X-12-ARIMA法という名前が示しているように時系列解析と呼ばれる統計学の分野に関するある程度の基礎的知識も必要である．したがって，時系列解析についてあまり接する機会のない官庁統計の実務家やエコノミストを含む方々を主な対象として，季節調整法X-12-ARIMAと呼ばれている計算プログラム体系の基礎となる統計的方法の特長を解説することも多少の意味があろう．特に，今後の内外の季節調整法の取扱いとも絡んでいるので，このX-12-ARIMA法で使われている統計的方法の正確な評価とそこから生じる可能性のある実務的に考察すべき問題点をあらかじめ指摘することは無意味ではないと思われる．そこで本稿では，X-12-ARIMA法の技術的方法についての解釈にもとづきこの季節調整法を官庁統計へ実務的に応用する際において真剣に検討すべきと思われるいくつかの関連した問題についても言及する．

米国センサス局により開発途上のX-12-ARIMA法をインターネット上で開示するという官庁統計での新しい試みにともない，X-12-ARIMA法に関して我国の官庁統計家やエコノミストの間で行われている議論の中には，必ずしもX-12-ARIMA法そのものの内容を十分に把握した上での議論ではないと判断される主張も散見される．この小論が我国の官庁における今後の季節調整法のあり方について検討するに際して議論の参考になれば幸いである．

あらかじめ以下の内容をまとめると次のようである．まず本稿の第2節ではX-12-ARIMA法を巡る議論の出発点として理論的に見たX-11季節調整法の内容について簡単に言及する．次に第3節ではX-12-ARIMA法が基礎としている統計的方法の主要な論点について議論する．さらに，第4節では単純なシミュレーション実験の結果を報告する．第5節では本稿での議論から得られた実務上への意味をまとめる．また，第3節に関連した若干の数理的結果についての導出は付論として第6節に与えておいた．

2. X-11法の特長と問題点

2.1 理論的特長

時系列解析と呼ばれている統計学の分野は現在まで様々な形で発展を遂げてきたが，1940年代から1960年代にかけての米国における研究の一つの大きな流れとして時系列データの記述統計的方法の開発があったと考えられる．現在でも多くの官庁実務家や一部のエコノミストが季節調整を行う方法の基本と考えている移動平均法は基本的にはこうした記述統計的方法の一つとして理解することができよう．この時代の時系列研究の動向とあいまって米国のセンサス局では1950

し，1997年3月の時点でもネットワーク上で利用可能なX-12-ARIMA法のプログラム本体はなおしばしば修正されている．したがって当然のことであるが同一の時系列を用いてもX-12-ARIMAプログラムの異なる版により得られる数値は異なると判断される．

年代から60年代初頭にかけて様々な角度から季節調整法の研究が行われた．この時代の研究はシスキン氏を中心とするセンサス局の研究グループにより当時ようやく可能となりつつあった電子計算機を利用する形でセンサス局X-11季節調整法の開発として実をむすんだと理解されよう．米国商務省のセンサス局が実験用としてX-3季節調整法をはじめて公表してから約5年間かかりX-11法を公表したその研究開発を巡る詳しい経緯及びセンサス局X-11季節調整法の詳細な内容については例えば経済企画庁(1971)，黒川(1979)などが参考となろう．ここでは後の議論と関連してX-11法に関して理論的な面として重要と考えられるいくつかの基本的な事項のみを指摘しておこう．

経済時系列の原系列から季節変動部分を除去する季節調整を行う方法としてはこれまで連環比率法をはじめとしていくつかの統計的手法が提案されている．その中でもセンサス局X-11法における季節調整の基本的方法として移動平均(moving average)に基づく時系列データの平滑化(smoothing)に依拠していると考えられる．

一般に原系列に移動平均をかけることを定義しておこう．原時系列$\{Y_t\}$から調整系列$\{X_t\}$を

$$X_t = \sum_{i=-m}^{m} w(i) Y_{t+i} \tag{2.1}$$

により変換する操作を移動平均と呼ぶことにする．ここでウエイト係数(あるいはフィルタ関数) $\{w(i), i=-m,\cdots,m\}$ は通常は観測される時刻tには依存せず，また基準化して$\sum_{i=-m}^{m} w(i) = 1$を満足するように選ぶものとしておこう．このときフィルタ関数は原系列$\{Y_t\}$からその加重和によって調整系列$\{X_t\}$を作り出すことから，この関数$w(i)$を線形フィルタ関数と呼ぶことができよう．一般的にはこのウエイト係数は様々な形が考えられるが特に条件$w(i) = w(-i)$を満たす場合を対称フィルター，それ以外の場合を非対称フィルターと呼んでおこう．例えば移動平均型の季節調整の基本と考えられている12カ月移動平均法とは通常は$m = 6$かつ$w(-6) = w(6) = 1/24, w(i) = w(-i) = 1/12$ $(i = 0,\cdots,5)$ とする線形フィルタ関数を用いる季節調整法を意味している[2].

センサスX-11法では基本的にはこうした移動平均により原系列から季節調整系列を作り出していると解釈することができる．しかしながら，実際の計算プログラム上ではその計算手続きは極めて複雑であり，途中の計算過程で様々な形の線形フィルタ関数を何度も用いている[3]．そのように何度も移動平均フィルターを繰り返し用いて計算する複雑な手続きを行う理由としては時間とともに変化すると想定されるトレンド関数と季節性を安定的に推定するためである考えられよう．また，X-11法の具体的な計算過程はセンサス局の研究スタッフ等が長年にわたり蓄積した経験に基づいて研究・開発した結果であり，その開発過程では様々な試行錯誤があったと考えられる．ここではセンサスX-11法における移動平均フィルターの利用について理論的観点から重要と考えられるいくつかの問題にしぼり述べておこう．

---

[2]移動平均による季節調整についての基本的説明は例えば溝口・刈屋(1983)を参照されたい．より正確には上の(中心化)12項移動平均は13項移動平均である．

[3]センサスX-11法における具体的な計算手続きの詳細については黒川(1979)あるいは経済企画庁(1971)を参照されたい．

ヘンダーソンの移動平均

時間とともに変化するトレンド関数を推定するために使われている重要な線形フィルタ関数としてヘンダーソンの対称移動平均がある．ここでヘンダーソンの$2m+1$項移動平均とは

$$
\begin{aligned}
(2.2) \qquad w(i) \;&=\; c_m[(m+1)^2-i^2][(m+2)^2-i^2][(m+3)^2-i^2] \\
&\qquad \times[3(m+2)^2-16-11i^2]
\end{aligned}
$$

で与えられる線形フィルタ関数を意味している．ただしc_mはmに依存する定数である．この移動平均にあらわれる係数は制約条件

$$\sum_{i=-m}^{m} w(i)=1,\ \sum_{i=-m}^{m} i^2 w(i)=0, w(i)=0\ (m+1\leq |i| \leq m+3)$$

のもとで3次階差

$$\sum_{i=-m}^{m} (\Delta^3 w(i))^2$$

を最小化する解として得ることができる[4]．フィルタ関数の対称性を仮定することから条件

$$\sum_{i=-m}^{m} i\, w(i)=0,\ \sum_{i=-m}^{m} i^3 w(i)=0$$

を得ることができる．また階差記号Δは$\Delta w(i)=w(i)-w(i-1)$を意味しているので3次階差は

$$\Delta^3 w(i)=\Delta^2(w(i)-w(i-1))=w(i)-3w(i-1)+3w(i-2)-w(i-3)$$

を意味している．もし原系列$\{Y_t\}$に対して時間の3次関数$P_3(t)$で表されるトレンドと互いに独立で期待値ゼロ，分散一定の誤差$\{\epsilon_t\}$から構成される加法的モデル

$$(2.3) \qquad y_t=P_3(t)+\epsilon_t$$

が仮定できれば，3次階差をとることによりトレンドが除去されるので，ヘンダーソン移動平均を用いることにより残された残差項の分散をある意味で小さくしていると解釈できることになろう．すなわち，この移動平均を利用する目的は簡単な加法モデルの仮定の下で局所的に3次曲線を推定していると見なすことができるので，トレンドが3次曲線で近似できるような滑らかな場合にはトレンド関数の推定をうまく行うことができることが期待されよう．

非対称移動平均

原系列$\{Y_t\}$に対して移動平均を用いる時には結果として得られる調整系列では末端の部分が欠けることになる．例えば原系列$\{Y_t\}$が期間$t=1,\cdots,T$に得られるときに$2m+1$項移動平均を用いると最初と最後のm項の移動平均値を計算することができない．すなわち，例えば時刻$t=T-k\ (k=0,\cdots,m-1)$にお

[4] ここで述べている導出はKenny=Durbin (1982) により得られた方法である．

ける移動平均は$X_t = \sum_{i=-m}^{k} w(i) Y_{t+i}$としてしか計算することができない．したがって，この場合には線形フィルタ関数を用いても対称性の条件$w(i) = w(-i)$を満たすことができないので非対称移動平均を用いることになる．センサスX-11法では期初及び期末の原データに対してはここで仮にマスグレウブの移動平均と呼ぶ非対称フィルターを用いているとみなすことができる．この線形フィルタ関数は次のようにして対称フィルター$\{w(i)\}$から導かれると考えられる．原系列$\{Y_t\}$に対して時間の1次関数$P_1(t)$のトレンドと互いに独立で正規分布にしたがう期待値ゼロ，分散一定の誤差$\{\epsilon_t\}$から構成される加法的モデル

$$y_t = P_1(t) + \epsilon_t$$

を仮定した上で

$$E[\sum_{i=-m}^{m} w(i) y_{t+i} - \sum_{i=-m}^{m-d} v_d(i) y_{t+i}]^2 \tag{2.4}$$

を最小にするようにフィルタ関数$\{v_d(i)\}$を決めることができる．ここでの最小値を与える解を具体的な表現は複雑になるが[5]，マスグレイブの移動平均による非対称フィルタ関数についてはヘンダーソンの移動平均などセンサスX-11法で用いている対称移動平均に対するある種の最適近似の議論があると見ることができよう[6]．

非線形フィルタ関数

季節調整法の議論ではよく知られているように経済時系列データの処理では異常値(outlier)の処理(あるいは少し意味が異なるが特異項(extremes)の処理)が必要となることがある．ここではセンサス局X-11法における特異項の処理に関連して特に線形フィルターの選択を行っていることを指摘しておこう．このX-11法では計算途中でトレンド・循環成分項としてC_tおよび不規則成分項としてI_tを何度も推定している．そして推定された2つの成分の変動比$\bar{I}/\bar{C}$により次のステップで適用するヘンダーソン移動平均の項数mを$m = 9, 13, 23$の中から選択している．この操作は推定される時系列における不規則変動成分の相対的大きさにより次ぎに推定するトレンドの滑らかさをコントロールしていると理解することができよう．ところで，時系列解析ではよく知られているように移動平均を繰り返してある系列に適用すると結果としては最初の系列に対してはある種の線形フィルターを適用していることを意味してことになる．これがフィルタ関数の線形性から生じる著しい性質である．ところが，X-11法で使われている移動平均はいま言及した異なる項数の選択操作などにより原系列に対しては若干の非線形性(すなわち非線形フィルタ関数)が入っていると解釈することができる[7]．したがって，

[5]Findley et. al. (1996)の付論(A.3)式で与えられる．

[6]より正確にはここで議論している正当化はX-12-ARIMAの中にある改良X-11プログラムにおいて用いられている移動平均である．Findley et. al. (1996)付論によればこの移動平均はほぼ原X-11法で使われている非対称移動平均に一致する．この例や他のいくつかの点においてX-12-ARIMA法の中の改良X-11法は原X-11法と必ずしも一致しない．例えば1996年11月時点において利用可能なX-12-ARIMAプログラムにおけるX-11デフォルト・コマンドを用いて加法型季節調整を行うと原X-11プログラムの結果と比べ無視できない差が生じている．こうした点については日本銀行(1996)の中の1.3節での記述に見られるように誤解が生じているようである．

[7]ここで非線形性が全体としてどの程度かが問題となる．というのは後で言及するようにX-12-

センサスX-11法における操作を線形モデルで近似できるか否かについてはなお基本的な疑問が残ることになろう.

2.2 X-11法に対する批判

ここでX-11法は1950年代から1960年代初頭頃までにセンサス局の実務的立場から当時利用可能な主として記述統計的な時系列解析を基礎に開発された方法であることに再び言及しておこう. その具体的手続きについては2.1節で説明したようないくつかの理論的な正当化の試みがなされているが, 時系列解析を巡る最近の統計学的な立場からはこうしたX-11法における計算手続きについて明確な理論的根拠を与えることは困難である考えられる. このセンサス局X-11法については, これまでに理論的あるいは実証的立場からいくつかの批判がなされている.

統計学者からはその理論的基礎の脆弱性について批判することができよう. 例えば移動平均法は前節で述べたように基本的には加法モデルを前提とすればデータの平滑化に関するある種の正当化の議論を立てることが可能なことがある. ここで加法型モデルとはある時刻tにおける原系列Y_tをトレンド・循環変動項をまとめて表すC_t, 季節変動項を表すS_t, 曜日効果を表すTD_t, 不規則変動項を表すI_tの和, すなわち

$$y_t = C_t + S_t + TD_t + I_t \tag{2.5}$$

としてとらえる季節性モデルである. ところが, 現実にはセンサスX-11法では季節性モデルとして乗法型モデル

$$y_t = C_t \times S_t \times TD_t \times I_t \tag{2.6}$$

を仮定して季節調整を行うことが多い. さらに, 理論的観点からは最終的に推定された不規則成分としての残差は時刻が異なると互いに無視できない相関, すなわち推定されたI_sとI_t $(s \neq t)$の自己相関が検出されるなどのこともこれまでに議論されている.

他方では, 日本の一部のエコノミストなどからは季節調整法の運用上の問題について理論的な視点とは異なる種類の批判がこれまでなされてきている. 特に最近ではX-12-ARIMAプログラムをインターネット上で得ることが容易になったのでX-12-ARIMAプログラムを現実に観測されている日本の時系列データを使った結果をもとにいくつかの論点が出されている. その主な点を要約すると第一に時系列データに対して移動平均をかける時に生じる直近値を含む末端処理の方法により季節指数の推定値が不安定になる可能性についての指摘が挙げられている. また, 第二にセンサス局X-11法が備えている曜日効果や休日効果の検出方法が十分でなく, 閏年の調整も不十分であるとのことについての指摘なども最近になり提起されている.

しかしながら, 少なくとも日本のデータに関する限りこうした主張がどの程度まで客観的に確認できるのか否かについては、少なくとも学術的意味において

ARIMA法におけるRegARIMAモデルは線形時系列モデルであるからである. 季節調整法における非線形性についてはGhysels=Granger=Siklos (1995)の最近の研究が論争的である. ちなみに四半期時系列の処理用のX-11Qプログラムではヘンダーソン5項移動平均のみトレンド推定に用いている. しかし, この場合でも特異項の処理から非線形性が生じると考えられる.

明確な形で公表されている研究の蓄積が不十分の為になお十分に議論されていないと思われる.

3. X-12-ARIMA 法の理論的特長

3.1 X-12-ARIMA 法の流れ図

季節調整法 X-12-ARIMA の構造は Findley et. al. (1996) が示している流れ図 (付録の図1を参照) によりその概略を要約することができる. この流れ図に基づくと X-12-ARIMA プログラムによる季節調整の具体的な手続きはおおよそ次のように簡単に要約することができよう.

(i) 観察される時系列の原データ $\{Y_t; 1 \leq t \leq T\}$ からまず RegARIMA モデルと呼ばれている統計的モデリングを用いて将来の予測値 (forecasts), 過去の逆予測値 (backcasts) を作り出す. また, 同じモデルの中の回帰 (regression) モデルを用いて季節調整に先だって様々な事前調整を行い, 事前調整系列 $\{Y_t^*; -H+1 \leq t \leq T+H\}$ を作り出す. ここで $H\ (\geq 1)$ は事前に設定する予測期間である. この事前調整としては異常値・変化点の検出, 閏年調整, 曜日効果調整, 休日調整などの項目を挙げることができる. この RegARIMA モデルを用いる統計的モデリングではモデルの診断と呼ばれる一連の操作により様々なモデルの選択を行うことができる.

(ii) 次に予測値と逆予測値を含む事前調整された系列 $\{Y_t^*\}$ に対し改良された X-11 プログラムにより季節調整を行い, 季節調整系列 $\{X_t; 1 \leq t \leq T\}$ が作り出される. この部分は従来から利用可能な X-11 法プログラムを手直しした改良 X-11 プログラムにより実行されるが, 基本的には原 X-11 法と同一の手続きで行われると見なすことができよう.

(iii) 最後に診断と呼ばれる部分により季節調整を行った結果を評価する. この目的の為に季節調整系列の推定から求められた不規則変動の推定値としての残差系列からスペクトル密度関数などを含め調整系列の安定性に関する新しい指標などいくつかの統計量を計算することができる[8].

このX-12-ARIMA 法では流れ図とその簡単な説明から明かなようにこれまでの X-11 法と比べると新たに RegARIMA モデルと呼ばれている統計的モデリングがもっとも特長的なそして重要な役割を演じている. そこでこの統計的モデルを説明しておこう.

いま1次元の時系列データを生成する確率変数の組 (離散時間の確率過程と呼ばれる) を $\{y_t\}$ としよう. この確率過程 $\{y_t\}$ が r 個の説明変数 $\{x_{it}\}$ を伴い次のような簡単な線形時系列表現を持つことを想定する.

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,(y_t - \sum_{i=1}^{r}\beta_i x_{it}) = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t\,. \tag{3.1}$$

[8] この X-12-ARIMA プログラムでは (i)-(iii) についての詳細な手続きの他にも様々なオプションを選ぶことにより様々な統計量を求めることが可能である. その詳細についてはマニュアル (Bureau of Census (1996)) を参照されたい.

ただし時系列y_tに対してラグ(遅れ)記号Bは時系列($By_t = y_{t-1}$)を対応させる操作で定義される．季節周期を表す$s =$ (4あるいは12), 係数の次数p, d, q, P, D, Qはあらかじめ決められた非負整数をとるものとしよう．また

$$\phi_p(z) = 1 - \phi_1 z \cdots - \phi_p z^p \;, \Phi_p(z) = 1 - \Phi_1 z \cdots - \Phi_p z^P \;,$$

$$\theta_q(z) = 1 - \theta_1 z \cdots - \theta_q z^q \;, \Theta_Q(z) = 1 - \Theta_1 z \cdots - \Theta_Q z^Q.$$

はzについての多項式を表している．したがって$\Phi(B^s), \Theta(B^s)$はB^s $(B^s y_t = y_{t-s})$の多項式である．さらにβ_i $(i = 1, \cdots, r)$, ϕ_i $(i = 1, \cdots, p)$, Φ_i $(i = 1, \cdots, P)$, θ_i $(i = 1, \cdots, q)$, Θ_i $(i = 1, \cdots, Q)$は利用可能な時系列データから統計的に推定される未知母数である．誤差項$\{a_t\}$は期待値ゼロ, 分散σ^2 (σは未知母数とする)であり，各tについて互いに独立な確率変数列として与えられる．

この(3.1)式で表現されるRegARIMAモデルは統計モデルとしては線形回帰(linear regression)モデルと季節ARIMA(時系列)モデルの混合型統計モデルの一つとして理解される．ここでARIMAとはARIMA(autoregressive integrated moving average 自己回帰和分移動平均)モデルの略であるが，同時に季節(seasonal)ARIMAモデルをも含んでいると見なすことができる．(3.1)式において$D = 0, \Phi_P = \Theta_Q = 1$とおけばARIMAモデルとなるので，特に(3.1)式で表現される季節ARIMAモデルは季節性を含むARIMAモデルの特殊な場合であり，より少ない数の母数で季節性を含む経済時系列の変動を表現する意味での節約型の時系列モデルと見ることもできる．また，時系列解析ではこの季節ARIMAモデルを簡単に説明する為に$(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$と表すのが開発者のBox=Jenkins(1976)以来の慣例になっている．

3.2 季節ARIMAモデルによる予測

センサスX-12-ARIMA法においてRegARIMAモデルを用いる部分を巡る論点を整理する為にまずRegARIMAモデルにおいて回帰部分を除いて考えてみよう．そこで，まず(3.1)式において$\beta_i = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$と仮定してみよう．まず時系列の変動を(離散時間)確率過程により記述しようとするとき季節ARIMAモデルと呼ばれている統計的時系列モデルは線形時系列モデルとしての構造から生じるいくつかの際だった特長がある．

季節ARIMA過程の特長

一般に時間とともに変動する季節性を統計的モデルにより記述しようとする試みはこれまで様々に考えられてきたが，その中で(3.1)で与えられている季節ARIMA(季節自己回帰和分移動平均)モデルは乗法的季節モデルの一種と見ることができる．この統計的時系列モデルでは以下のようなことが基本的に想定されていると見ることができる．

(A1) 確率過程$\{y_t\}$は正規(Gaussian)過程である．
(A2) 確率過程$\{y_t\}$は線形過程である．
(A2) 確率過程$\{y_t\}$は$d > 0, D > 0$のとき非定常和分過程である．

ここで使われている統計用語の意味を簡単に説明しよう．いま得られた一次元時系列データを$\{Y_t; t = 1, \cdots, T\}$としよう．正規過程とはこのデータが正規分布にしたがう確率変数列$\{y_t; t = 1, \cdots, T\}$の実現値と見なされることを意味し

ている．ここで通常の統計学的状況と異なるもっとも重要な点は観察される時系列を作り出すこの確率変数列は必ずしも互いに独立ではなく，時間にともない確率的な意味で互いに従属関係性を持つと見なすことである．次に，$\{y_t\}$ が線形過程であるとはここでは誤差項 $\{a_t\}$ と観察される確率変数 $\{y_t\}$ との間には簡単な線形関係が成立することを意味している．さらに，確率過程 $\{y_t\}$ が d 次の非定常 (non-stationary) 和分過程であるとは原系列 $\{y_t\}$ から d 回の階差 $\Delta^d y_t$ をとると定常 (stationary) 過程となることを意味している[9].

ここで例えば和分過程 (integrated process) を $d = D = 1$, さらに係数を $\phi_p(z) = \Phi_p(z) = \theta_q(z) = \Theta_Q(z) = 1$ とおけば，(3.1) は

$$(1 - B)(1 - B^s)y_t = a_t \tag{3.2}$$

と簡単化される．この過程は原系列 $\{y_t\}$ から1次階差 $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} (= z_t)$ をとり，得られる1次階差系列からさらに季節1次階差 $\Delta_s z_t = z_t - z_{t-s} (= w_t)$ をとると互いに独立な正規誤差をあらわす確率変数が得られることを意味している．(3.2) では平均部分をあらわす係数が無いのでゼロとおいていることとなり，和分過程である原系列 $\{y_t\}$ におけるトレンド及び季節要素は時間とともに変化するがある種の確率法則にしたがう確率的トレンド及び確率的季節要素を持つと理解される．すなわち，このモデルではX-11法におけるヘンダーソンの移動平均をとる際に想定される多項式トレンドのように時間とともにある決まった形をとるのではなく，トレンド及び季節要素は時間とともに確率的に変動するようにとらえられている．例えばデータの数をTとすると簡単な計算から固定された初期値 y_0 から出発した y_T の分散は一定ではなくほぼ T^4 に比例すると考えられる．このように和分過程では将来の時系列水準の不確定性が時間とともに急速に増大する性質を特長として備えている．

さらに季節SARIMAモデルについては，その定常部分ARMA部分の固有値に関してある種の技術的な制約をおく必要が生じる．ここで次のような4つの固有方程式を考えよう．

$$|\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} \lambda^{p-i}\phi_i| = 0 \ , \tag{3.3}$$

$$|\lambda^q - \sum_{i=1}^{q} \lambda^{q-i}\theta_i| = 0 \ , \tag{3.4}$$

$$|\lambda^P - \sum_{i=1}^{P} \lambda^{P-i}\Phi_i| = 0 \ , \tag{3.5}$$

$$|\lambda^Q - \sum_{i=1}^{Q} \lambda^{Q-i}\Theta_i| = 0 \ . \tag{3.6}$$

このとき次のことも想定される．

---

[9] 例えば $d = 2$ として説明すると形式的には $\Delta^2 = (1 - B)^2 = 1 - 2B + B^2$ と書ける．そこで原系列 $\{y_t\}$ の2次階差を $z_t = \Delta^2 y_t = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}$ とおくときに，$\{z_t\}$ の期待値・分散及び z_s と z_t $(s \neq t)$ の共分散の構造が時間の経過とともに確率的意味で不変な性質を有していることを意味している．この場合には原系列 $\{y_t\}$ については期待値・分散・共分散などは時間の経過とともに不変とはなり得ない．

(仮定A4) 4つの固有方程式(3.3)-(3.6)を満足する固有値をλ_i $(i=1,\cdots,p+P+q+Q)$ とすると $|\lambda_i|<1$であり，かつ方程式(3.3)と(3.4)，方程式(3.5)と(3.6)に共通根は無い。

ここで述べた条件(A1)-(A4)をおくことによりここで考察する季節ARIMAモデルは時系列モデルとしてのいくつかの特長を備えている．例えば仮定(A4)は定常部分を$(1-B)^d(1-B^s)^D y_t = w_t$ と表すときにw_rとw_t $(r<t)$ の相関は時間差$|t-r|$が大きくなるとともに小さくなる弱相関を持つ時系列であることを意味している．統計的時系列モデルとしてはこうしたいくつかの仮定をおくことにより比較的容易に観察データから統計的モデルが含む係数や分散などをあらわす未知母数の統計的推定を可能にしてくれる．また，推定された母数を使えば，統計的時系列モデルにもとづく予測を容易に行うことができる．

留意事項

統計的時系列解析ではこれまで既に季節ARIMAモデルはMA過程を巡る多少の技術的議論を除けば時系列モデルとしては比較的扱いやすいことが知られている．しかしながら，経済時系列の季節調整の手段として直接的に適用しようとする場合には，現実に適用される経済時系列においてこの統計モデルがはじめから想定している事項の現実性を問題とする必要があろう．また，この統計モデルの作り方から原理的に対処しにくい可能性のある観測時系列に見られる現象にも言及しておく必要があろう[10].

(i) 非線形現象

線形モデルによる非線形現象の扱いは一般的には容易でない．経済時系列における非線形現象の例としては例えば景気変動の転換，上下変動における非対称的変動，あるいは長期的トレンドの急激な変化などをよく知られた例として挙げることができよう．こうした現象をある程度まで線形ARIMAモデルで表現することは可能であると考えられるが，例えば景気循環の転換点を予測することは興味のある事項ではあるが，同時にきわめて困難であり，これまで必ずしも十分な成果を挙げているとは考えにくい．また，少なくとも例えばここ25年ほどの間をとれば日本のマクロ変数の変動では急激な時系列のトレンド変化を経験していることについては多くのエコノミストの意見が一致するところであろう．

(ii) 非ARIMA季節性

季節ARIMAモデルは確率的トレンドと季節性を同時に表現する単純な統計的時系列モデルとして分析者にとり便利である．しかしながら，多くの実務家やエコノミストは季節調整が必要な理由として季節性は時間とともに不変ではないと考えているようなので，どの程度まで季節ARIMAモデルによる表現がその議論と整合的な否かは明かではない．例えば何らかの非線形的的な季節変動が考

[10]本節ではいくつかの理論的な"可能性"を指摘する．ここで挙げる問題(あるいは論点)をより具体的に調べる方法としては例えば次のようなことが考えられよう．例えば(ii)で挙げている具体的問題をとればX-11法で抽出したトレンド(循環)・プラス・季節要素を季節ARIMAモデリングでうまく再現できるか，あるいは逆に人工的に発生したトレンド(循環)・プラス・季節要素をX-11でどの程度まで再生できるかなどを調べることが考えられる．特に関連して4節でも言及するようにシミュレーション・データによる分析は有益な情報をもたらすであろう．ただし，こうした分析にはある程度の人的・時間的資源が必要であることから，これまでまだ十分になされていないと判断している．

えられるとするとこうした可能性における統計的モデリングの有効性を調べておく必要が生じよう．また，X-11法において想定される季節性と季節ARIMAモデルで想定される季節性とは必ずしも同一とは考えられないので，どの程度までX-12-ARIMA法におけるRegARIMAモデリングが有効と考えられるかが問題となろう．

(iii) 異常値・変化点

異常値の理解は様々であるが，正規分布の仮定に強く依存する統計的モデルにもとづく統計的モデリングでは非正規分布的な変動に対処しにくくなる可能性がある．そこで与えられた時系列の変動が正規確率変数の変動としてとらえることが困難な場合にはその非正規性を異常値として処理してしまうことが考えられる[11]．このことは変動性の大きい経済時系列(例えば産業レベルのデータなど)の季節調整などでは特に実証的に検討する必要があろう．

予測方法の特長

経済時系列分析において季節ARIMAモデリングが用いられるもっとも大きな要因としては，この方法により与えられた時系列データからその将来値の予測(forcasts)を比較的容易に行うことができる点にあるといってもよい．ここでは現在・過去の値から将来の値を予測する方式としての季節ARIMAモデリングの特長として次に挙げる主な点に言及しておく[12]．

(i) 線形予測

現在までに利用可能な情報をできるだけ有効に用いて将来の値を予測することが統計的予測法の基本である．季節ARIMAモデルは線形時系列モデルであるので将来の時系列の値が時系列モデルにしたがい発生すれば将来の値は現在・過去の線形和と(現在時点では)予想できない将来の誤差の和となる．したがって，現在時点での将来の値の最適な予測値は現在・過去のデータの線形結合となると考えられることから，比較的容易に実際の予測を行うことができる．すなわち，いま観測可能な系列$\{y_t\ 1 \leq t \leq T\}$から得られる将来時点$T+h$ $(h \geq 1)$の最適な予測値を$\hat{y}_{T+h|T}$と表わすと初期値の扱いを無視すれば

$$\hat{y}_{T+h|T} = \sum_{i=0}^{T-1} c(h,i) y_{T-i} \tag{3.7}$$

という形になる．ここで$c(h,i)$は季節ARIMAモデルに含まれる未知母数および予測期間hに依存する係数なので，その具体的な形は季節ARIMAモデルの形および予測時点の選び方に依存する．また季節ARIMAモデルの下ではこの(3.7)にしたがう予測値をモデルの構造から逐次的に次々に作り出すことができる．ここで，将来の予測値は現在・過去の観測される時系列の線形結合で表されていることが最大の特長である．予測値を作り出すウエイト$\{c(h,i)\}$は季節ARIMAモデルの母数を現在・過去の利用可能なデータより推定することにより計算すること

[11]ただしFindley et.al. (1996)では必ずしもこのように説明はしていない．

[12]時系列の予測問題を含めてBox=Jenkins(1976)が始めたいわゆるボックス・ジェンキンズ法の内容について詳しくは例えば山本(1987)を参照されたい．過去の一時期，一部の日本の経済学者の中にはボックス・ジェンキンズ法を時系列分析と同一視する向きもあったが，最近の時系列解析ではこの方法はなお重要ではあるが一部分にすぎない．

ができる．むろん，時系列が実際に将来にどのような値になるか事前に正しく予測はできないので，確率過程が和分過程のように原系列の水準が非定常的な場合にはこのようにして与えられる予測量の精度は将来への予測期間 h が長くなるにつれて急速に減少する．これは結局は将来の予想されない誤差が積み重なることから予測値の信頼性が低くなると考えられることによるのである．

(ii) 局所的予測

将来時点の予測値は現在・過去の線形和となるが，季節ARIMAモデルを想定する場合にはそのウエイト $\{c(h,i)\}$ の大きさは直近のデータの比重が相対的には大きく，遠い過去の比重(すなわち i が大きいときの $c(h,i)$ の値) は指数的に減衰して小さくなる．全体としては将来の予測量は現在・過去の観測データ系列の"滑らかな"関数で与えられる．したがって，記述統計的な時系列解析において導き出された様々な直観的な予測方法を含む予測方法を簡単に提供してくれる意味において分析者には便利である．例えば移動平均過程ARIMA(0,1,1) の場合には最適な予測方式は指数平滑化法と呼ばれてきた直観的な方法に一致することが知られている．また，自己回帰 (autoregressive) モデルの場合 ($q=Q=0$) には予測量は予測開始時点を含む少数の時刻の観測量のみに依存するのに対して，移動平均 (moving average) 項 ($q>0, Q>0$) を含むARIMAモデルの場合には予測量は全ての時刻の観測量に依存するという特長がある．

3.3 X-12-ARIMA フィルタ関数

非対称フィルタ関数の利用

季節調整法X-12-ARIMAにおいてRegARIMAモデリングを用いると推定された季節ARIMAモデルを用いて予測値を得ることができる．したがって，原時系列データを将来まで外挿し，事前調整系列に対して対称移動平均フィルタ関数を適用することが原理的には可能となる．このことからX-12-ARIMA法ではX-11法よりもより適切に原時系列に対して移動平均フィルターを適用することができると一部のエコノミストは主張しているようである[13]．しかしながら，こうした主張は単に見かけ上だけのものであり季節ARIMAによる予測値を用いた事前調整系列に対称フィルタ関数を適用すると結果的には直近部分の原時系列データに対する移動平均フィルタ関数はいくつかの特長があると考えられる．念の為にその結果を以下のようにまとめておくが，その導出および簡単な例は付論に与えておいた．

命題 1 *: 原系列 $\{Y_t; t=1,\cdots,T\}$ から季節ARIMAモデルを推定し，さらにその予測値を含めた原系列に対して対称移動平均 $\{w(i)\}$ を適用した結果，もとの原系列 $\{Y_t\}$ に対しての移動平均は (a) 非対称移動平均, (b) モデル依存型移動平均, (c) データ依存型移動平均, (d) 非線形移動平均, という性質を持つ.*

ここで，上の命題で用いた言葉を説明すると，モデル依存型移動平均とは移動平均の項数と形が適用される季節ARIMAモデルに依存して決まるという意味で

[13] このような観点からX-12-ARIMA法の有効性を説明している例として例えば日本銀行調査統計局(1996)の2ページの解説を挙げておく．

ある．データ依存型移動平均とは移動平均を構成する係数がたとえ季節ARIMAモデルが同一であっても与えられた時系列データそのものに依存するという意味である．さらに，非線形移動平均とは移動平均を構成する係数と与えられる時系列とが線形の関係ではないことを意味している．移動平均について生じるこれらの性質は時系列解析の標準的議論を用いると当然の帰結であるが，季節調整法の利用者にとっては必ずしも自明なことではないようなので付論では特に簡単な例を用いてより具体的に説明しておいた．この命題から導かれる実務的な意味としては、まずここでX-12-ARIMA法におけるフィルタ関数はX-11法におけるフィルタ関数とは原理的に異なる性質を含んでいることを挙げることができる．そしてX-12-ARIMA法において非対称フィルタ関数を利用して安定した季節指数を得るには季節ARIMAモデルの正しい識別(モデルのidentificationと呼ばれている)と安定した母数の推定が重要であることが確認されよう．また，時系列の末端に対する移動平均値は予測期間に依存するのでその選択も重要となることなども挙げることができよう．

逆予測

季節ARIMAモデルを用いて将来値を予測する方法の特質は現在・過去の利用可能なデータから利用不可能な過去の値$\{Y_t; t \leq 0\}$を予測するという逆予測(backcasting)においてもほぼ成り立つと考えられる．この逆予測の方法はもともとBox-Jenkins(1976)が定常過程ARMA(autoregressive moving average)モデルの効率的な推定を行う為に開発した方法であるが，その有効性についてはなお論争的である．X-12-ARIMA法では逆予測値を用いることにより原時系列における初期の数項に対しても形式上は対称フィルタ関数を適用することが可能となっている．

3.4 線形回帰部分

X-12-ARIMA季節調整法の内容を理解する鍵となっているRegARIMAモデリングについて季節ARIMAモデルに続いて線形回帰分析(regression analysis)の利用方法の特長について次に考えてみよう．

変数変換

X-12-ARIMA法では季節ARIMAモデルの識別及び推定・予測に先だってしばしば原系列に対して対数変換などの変数変換が行われる．こうした変数変換を行う主な理由としては多くの経済時系列データで時間の経過にともない時系列の変動幅が拡大する傾向などが観察されることを挙げることができよう．こうした現象を時間の経過にともなう分散の不均一性として理解すると，通常の季節ARIMAモデルは線形時系列モデルであるので，変動幅の不均一性の下ではモデルの識別や推定が困難となることが知られているのでそれなりの合理性があると言える[14]．ただし，変数変換に関連しては例えば対数変換を用いてRegARIMAモデリングを行う場合にはX-11法プログラムにおいてデフォルト選択となっている乗法型の季節調整ではなく変換値に対して加法的季節調整を行うのがより自然と考えられることを指摘しておこう．というのは理論的にはこのように選択する方が季節

[14] こうした問題について詳しくは例えば山本(1987)を参照されたい．

ARIMAモデルにおける季節性のモデルとX-11法における季節性のモデルがより整合的であるように判断されるからからである．

ところで，変数変換に関連して例えば国民経済計算などの日本の長期マクロ・データでは対数変換した系列では季節成分のばらつきは時間とともに縮小するような傾向も見られる．この場合には対数変換以外の変数変換を行うことも考える必要が生じるかもしれない．X-12-ARIMA方では統計家の間でBox-Cox変換などとして知られている対数変換以外の変換も行うことができる．しかしながら，対数変換ではない変換を用いると結果的には乗法的ないし加法的ではない時系列の分解を行ってることになる．季節性のモデルとしては乗法的モデルないし加法的モデルの他にも様々な可能性があるが，これまでの所ではあまりそのパフォーマンスは知られていないといってもよいのでより難しくなってしまう問題がある．

時系列成分と回帰成分の分離可能性

一般的には線形回帰モデルと季節ARIMAモデルは相異なる2つの統計的モデルであるので様々な形で組み合わせることができる．X-12-ARIMA法の中で用いているRegARIMAモデルは次のように理解できよう．固有値に関する仮定(A4)を用いて方程式(3.1)を書き直せば

$$y_t = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_{it} + u_t \ , \tag{3.8}$$

と表すことができる．ただし，この回帰モデルの表現における誤差項$\{u_t\}$は

$$u_t = (1-B)^{-d}(1-B^s)^{-D} \times \phi_p(B)^{-1}\Phi_P(B^s)^{-1}\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t \tag{3.9}$$

で与えられる．ここでこの誤差項$\{u_t\}$の形がこのRegARIMAモデルのもっとも特長的な点である．(3.8)式においては$(1-B)^{-d}(1-B^s)^{-D}$は形式的な表現であることに注意しておこう．よく知られているように例えば$(1-B)^{-1}$をBについて形式的に展開しても収束はしないので，この意味としては$\{u_t\}$は和分$I(d+D)$過程[15]

$$(1-B)^d(1-B^s)^D u_t = \phi_p(B)^{-1}\Phi_P(B^s)^{-1}\theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t$$

である．ここで(3.8)は線形回帰モデルとしては誤差項が非定常過程となる非標準的モデルとなることが最も大きな特長である．

こうした時系列表現(3.8)に対して統計的時系列分析では別の時系列表現

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)((1-B)^d(1-B^s)^D y_t - \sum_{i=1}^{r}\beta_i x_{it}) = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t \tag{3.10}$$

が用いられることがあることに注意しておこう．ここで留意すべき問題の一つはこのように(3.10)で表現された確率過程$\{y_t\}$では$d+D>0$のときには大域的トレンドの挙動は(3.1)(あるいは(3.8))とは大きく異なることである．一般的に時系列の季節ARIMAモデリングではドリフト項と呼ばれている非確率トレンドと非定常確率過程部分の定式化が重要である．非定常ARIMA部分と線形回帰成分

[15]より正確には$\{u_t\}$の移動平均が$I(d+D)$過程であるが，季節階差を巡る統計的問題はより技術的になるので本稿では議論しないこととする．

という二つの部分の定式化により時系列のトレンド部分の挙動が決定されるのでこれまでに様々な統計的モデリングが試みられてきているのである．

特にここで説明しているRegARIMAモデリングにおけるトレンド関数のとらえ方はX-11法におけるトレンド関数のとらえ方とはだいぶ異なると考えられることが実務的な観点からも注目に値するところであろう．こうした相異なる両者を機械的に結びつけようとするとかなりの無理が生じると考えられるので，その帰結について十分な検討が必要となる．さらに，トレンド関数のとらえ方に関連したRegARIMAモデルの統計的推測について生じる問題については3.5節で例示する．

回帰係数の固定性

X-12-ARIMA法におけるRegARIMAモデリングの大きな特色は季節調整に先だって事前調整として曜日変動・休日変動・閏年変動の処理や異常値の処理を行うことである．この際には線形回帰モデルを用いて曜日効果・休日効果の大きさなどを推定することになる．したがって，これらの効果は回帰係数の大きさにより推定する必要性から必然的に線形回帰モデルを推定する期間における回帰係数は固定されることになる．これに対してX-11法における曜日変動への対処は移動平均を用いた季節調整の過程で推定された不規則成分に対して線形回帰モデルのあてはめることよりより間接的に処理していると見ることができよう[16]．X-12-ARIMA法ではこれらの効果の処理はいわば原系列から直接に曜日効果・休日効果・閏年効果などの影響を線形回帰モデルを用いて推定している所が相違点である．したがって，RegARIMAモデリングで設定される季節ARIMAモデルはX-11法における移動平均の代わりをしていると見なすこともできよう．

こうしたことから，例えば日本における土曜日の営業効果が典型的であるが，曜日効果・休日効果・閏年効果などを計測する場合には推定された係数値が時間の経過とともに安定しているか否かが問題となろう．したがって，こうした効果が線形回帰推定により無視できない程度に検出された場合にはその母数の安定性を調べる必要性が生じるであろう．特に，原系列データが比較的長期間にわたる場合に線形回帰モデルにおける母数の安定性を調べておく必要が大きいように思われる．

変数変換と曜日効果・閏年効果

実際に季節ARIMAモデルを推定する場合にはしばしば対数変換が用いられる．原系列$\{y_t\}$に対する対数変換して曜日効果・閏年効果を推定する操作は次のように理解することができよう．いまN_t^*/N_tを時刻t時点の観測値について日数比で表現した閏年効果[17]，D_{jt}は曜日効果をあらわす為の変数で，時刻tのデータが存在するj曜日$(j=1,\cdots,7)$の日数とする．このとき(3.8)にもとづいて

$$\log y_t = \log \frac{N_t}{N_t^*} + \sum_{i=1}^{6} \beta_i (D_{it} - D_{7t}) + u_t \ , \tag{3.11}$$

とあらわすことができる．未知母数$\{\beta_i \ (i=1,\cdots,6)\}$を観測データを用いて推

[16]より詳しくはCensus of Bureau (1967), あるいは黒川(1979) を参照されたい．

[17]ここではFindley et. at. (1996) の(14)にもとづきRegARIMAモデルにおけるデフォルト選択の場合を説明している．

定した後で，(3.11) 式より原系列に戻ってみると

$$y_t = d_t \times y_t^*$$

と書けることになる．ただし

$$d_t = \frac{N_t}{N_t^*}\exp\{\sum_{i=1}^{6}\beta_i(D_{it} - D_{7t})\}$$

及び

$$y_t^* = \exp\{u_t\}$$

である．ここで (3.11) では曜日効果は基準日数 (例えば日曜日) からの差を表す変数 $D_{it} - D_{7t}$ により計測されることに注意しておこう．したがって曜日効果・閏年効果が取り除かれた事前調整済系列を $\{y_t^*\}$ により定義すれば，当然のことであるが曜日効果や閏年効果は原系列 $\{y_t\}$ のスケールを変換した値として認識されることになる．したがって，もし統計的に有意な係数が推定されれば多くの場合には事前調整済系列 $\{y_t^*\}$ は原系列 $\{y_t\}$ に比較してより滑らかな時系列変動を示すことが予想されよう．

変化点解析の方法

X-12-ARIMA 法における RegARIMA モデリングでは異常値や変化点の解析方法として3種類の方法が標準的に用意されている．具体的な異常値あるいは変化点の形態としては

(a) 一時点における異常値,

(b) ある時点における水準の突然変化,

(c) 一定期間内での水準の変化,

を挙げることができよう．これらの変化点はいずれも RegARIMA モデルにおける回帰変数として処理されるが，いずれの変化点の形態も原系列水準自体の変化としてとらえていることが特長である．

しかしながら，少なくとも日本のマクロ経済時系列に関する限り，例えば長期間におけるマクロ変数の変化におけるトレンドの傾きの変化などの扱いについてはあらかじめよく検討しておく必要があろう．こうした変化点の扱いが典型的ではあるが，一般に変化点の多くは一種の非線形現象として理解できることが少なくない．したがって，傾きの変化などに例示されるように分析者がある種の非線形現象を分析に織り込もうとする必要がある場合には X-12-ARIMA 法による扱いには限界があることを認識しておく必要があろう．すなわち，どの程度までこうした問題を無視することができるかを検討しておく必要があろう．

また，X-12-ARIMA 法における RegARIMA モデリングでは異常値や変化点の存在についての統計的な有意性の検出方法としては回帰係数の $t-$検定を用いている．さらに変化点が未知の場合や複数ある場合にも $t-$検定統計量の系列による変化時点の検出方法を提案している．しかしながら，3.5 節の例で示すようにこうした異常値 (一点のみでの変化) や変化点の検出方法は正規分布の仮定にかなり依存していると考えられる．また，時系列構造が存在する場合の検出方法についての統計的な正当化はこれまでの所必ずしも明らかではない．

3.5 統計的推定と診断を巡る問題

本節ではRegARIMAモデルの統計的推定を巡る問題に言及する．特に，現在の所まで利用可能なX-12-ARIMA法の説明には統計学的な問題点がなお残っていると考えられることについても説明する[18].

RegARIMAモデルの推定方法

X-12-ARIMA法の説明文献によればRegARIMAモデルの統計的推定には基本的には誤差項が互いに独立な正規分布にしたがうと想定した上で最尤法(maximum likelihood method)が用いられていると考えられる．誤差項の正規性の仮定のもとでは一般的には尤度関数は

$$(3.12)\ L(\omega|data) = (2\pi)^{-T/2}|\mathbf{\Sigma}(\omega)|^{-1/2}\exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\omega)(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)\}$$

で与えられる．ここで$\mathbf{y}=(y_t)$は$T\times 1$の観測時系列ベクトル，$\mathbf{\Sigma}(\omega)$は$T\times T$の共分散行列，$\beta=(\beta_i)$，は$r\times 1$の回帰係数ベクトル$\mathbf{X}=(x_{ti})$は$T\times r$の線形回帰部分の説明変数行列である．線形回帰部分の推定には誤差項の共分散構造$\mathbf{\Sigma}(\omega)$を所与とした一般化最小自乗(GLS)法が用いられていると考えられる[19]．ここで季節ARIMAモデルに含まれる母数，$\phi_i,\Phi_i,\theta_i,\Theta_i$などをまとめて母数ベクトル$\omega$で表したことに注意しておく．$\{y_t;t=1,\cdots,T\}$の共分散行列$\mathbf{\Sigma}$は母数を含まない場合もありうるが，もし未知母数$\omega=(\omega_{\mathbf{i}})$を含む場合にはその母数推定と線形回帰部分の母数推定を交互に収束するまで繰り返し推定を行っているようである．この場合には線形回帰部分の推定は

$$(3.13)\qquad \hat{\beta}=(\mathbf{X}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\omega)\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\omega)\mathbf{y}$$

で与えられる．この繰り返しが数値的に収束すれば実質的に最尤推定を行っているとみることができる．統計モデルの仮定が正しければ少なくとも季節ARIMA部分の推定については原時系列が定常あるいは非定常であることに依存することなく時系列解析の標準的議論を用いることにより漸近的には正当化されている．

もっとも，この場合でも季節ARIMAの正しい識別が無いと推定が不安定になる可能性がある．特に高次の複雑な移動平均(MA)過程や自己回帰移動平均(ARMA)過程の推定では問題が発生することが知られている．この他にも技術的問題ではあるが，統計的時系列解析の分野では古くから非線形最適化における収束問題やARMA部分の識別問題と関連した過剰階差問題などが議論されてきている．

また，統計的時系列解析では誤差項の分布や構造に推定や予測の結果が強く依存する統計モデルを実際に大規模に利用する場合には少なくとも仮定からの小さな逸脱に対しては結果がある程度まで安定的であることが望ましいことはいうまでもないことである[20].

---

[18]Findley et. al. (1996)の説明はやや曖昧な部分があり以下の論点については開発者の意見は今のところ十分に明らかとは言えない．特に変化点の扱いは実務的観点からも重要なので近い将来により明確化されること，あるいはX-12-ARIMA法の関連部分が改良されることを期待する．

[19]Findley et. al. (1996)の4.1節によれば一部の手続きでは最小自乗推定量を用いているとの記述も見られる．最小自乗推定量を用いる場合には附論の例から明らかなように統計的な問題が生じると思われる．

[20]統計学では推測の頑健性と呼んでいる．ただしこれを完全に追求することは生産的な議論でなくなるおそれもあるので，ある程度のめあすは示されるべきだというコメントである．

推定を巡る問題点

前節で述べた非定常時系列を巡る二つの定式化 (3.1) と (3.8) において線形回帰部分の統計的推測には一見するとなお若干の疑問点があると考えられるのでその問題に言及しておこう．というのは実務家には見落とされがちな X-12-ARIMA 法の回帰分析部分で利用している統計的推定と検定の意味や季節 ARIMA モデルの正しい識別の重要性を理解する一助となると考えるからである．ここでは例としてレベル・シフト変数を用いて説明しておこう．レベル・シフト変数 z_t は $z_t = -1\ (1 \leq t \leq T_1)$, $z_t = 0\ (T_1 < t \leq T)$ により定義される．

命題 2 : 原系列 $\{Y_t; t = 1, \cdots, T\}$ に対して *RegARIMA* モデル *(3.1)* を仮定する．
(i) 原系列に対して最小自乗法を用いてレベル・シフト変数の係数を推定するとしよう．もし階差次数が $d \geq 1$ あるいは $D \geq 1$ であるとすると推定量は一致性をもつとは限らない．
(ii) レベル・シフト変数の係数を最尤推定法，あるいは一般化最小自乗法により推定する．もし階差次数が $d = D = 1$ とすると係数推定量の分布は *2* 個の時点における誤差項の分布のみにより決定される．

この命題で述べた結論はより一般的に原系列水準の変化をあらわす変数について成立すると考えられるが，付論ではレベル・シフト変数の簡単な例を用いて説明しておいた．こうした統計的推測を巡る統計的議論は特に実務家にはあまり直観的ではないが，論点は確率過程が非定常的な和分過程を仮定すると線形回帰部分の一部分の合理的推定が困難になることである．RegARIMA モデル (3.1) を書き換えると

$$
\begin{aligned}
(3.14) \qquad & \phi_p(B)\Phi_P(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,y_t = \\
& \phi_p(B)\Phi_P(B^s)\,(1-B)^d\,(1-B^s)^D\,(\sum_{i=1}^{r}\beta_i x_{it}) + \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t
\end{aligned}
$$

となるが，回帰変数として定数項やレベル・シフト変数などの変化点項が存在するときには右辺第一項は退化してしまうと考えられる．

むろんここで実際に観察される時系列データは有限個なので大きなレベル・シフトの存在などを正しく検出できることを否定しているわけではない．しかし，不用意にこうしたダミー変数であらわされる変化点の推定を行うときには統計的推測が不安定になりうる可能性を否定できないことを示唆している．

赤池情報量 (AIC) によるモデル選択

一般に RegARIMA モデルは極めて多くの可能性を含む統計的モデルと見ることができる．したがって，多くの可能性の中から与えられた時系列データに照らして適当なモデルを絞り込み，選択する必要がある．統計学ではこれまでこうしたモデルの識別やモデルの選択について多くの統計的基準が提案されてきている．こうした中でも赤池の情報量基準 (Akaike's Information Criterion, 略して AIC) を最小化する基準[21]は多くの実際的な問題に役だってきた統計的基準として広く知られている．そこで AIC にもとづいて適当な RegARIMA モデルを選択することが有力な方法として考えられよう．ここで AIC 最小化基準を用いて RegARIMA

[21] Akaike (1973) により提唱されたモデル選択の基準である．

モデルを選択する場合には簡便な方法としてまず先に季節ARIMA部分を識別し，識別された季節ARIMA部分を所与として次に線形回帰部分を識別することが考えられる．ただし，AICの考え方により忠実であろうとすればこの操作を繰り返して最適なRegARIMAモデルを探すことになろう[22].

ここでRegARIMAモデリングとの関連でAICについて次のことに注意しておこう．AIC最小化の基準は時系列が線形定常確率過程として近似できる場合については統計学者の間でかなりの議論があったものの，かなり有力な方法としては広く認識されている．しかしながら，このことは対象とする時系列が非定常確率過程や変化点が未知の時系列解析で同様のことが成り立つと認識されていることを必ずしも意味していない．実はこうした問題は最近の時系列解析でもかなり難しい先端的な研究と関連していることに注意すべきであろう．

さらに，通常の統計的時系列解析では当然のことであるが時系列モデルの安定性は前もって仮定されている．正しい統計的モデルが想定できる場合にはむろんより多くの観測データを用いることにより効率的な推定や予測を行うことができる．ところが，経済時系列においては経済構造の変化の可能性を考慮すると安定した時系列構造を想定して推定と予測を行うときに観測期間が長く，データ数が多ければ多いほど良いとは必ずしも言いきれない側面も存在する．経済時系列の分析では時系列モデルの安定性とデータ期間との間に一種のトレード・オフの関係があると考えられる．したがって，想定される時系列構造の安定性を検討しつつ統計的推測に必要なデータ期間を選ぶ必要があろう．

3.6 X-12-ARIMA法における分解成分

季節調整法X-12-ARIMAの内容を検討してゆくと次のような素朴な疑問に突き当たることになる．季節調整ではどこまで原系列を修正することが妥当といえるだろうか？まず時刻tの原系列を$\{Y_t\}$, とすると伝統的な経済時系列の分析では原系列の構成要素としてトレンド変動項$\{T_t\}$, 循環変動項$\{C_t\}$, 季節変動項$\{S_t\}$, 不規則変動項$\{I_t\}$に分解することが行われてきた．通常の季節調整を巡る議論ではこのとき何らかの方法で季節変動項$\{S_t\}$を推定して取り除いた系列を季節調整済系列と呼んでいる．ここでの季節変動項の意味は何らかの意味で12カ月の周期を持つ変動項として理解されよう．ここでこれらの変動項に加えてさらに曜日変動・休日変動項$\{TD_t\}$, 閏年変動項$\{LP_t\}$, 異常値(あるいは変化点)項$\{CP_t\}$も十分に考慮する必要があるとしよう．原時系列$\{y_t\}$に対して仮に加法的モデルが仮定できる[23]とすると原系列は

$$y_t = T_t + C_t + S_t + TD_t + LP_t + CP_t + I_t \tag{3.15}$$

と分解される．与えられたデータからのトレンド項を始めとする各項の推定値を

[22]現在利用可能なX-12-ARIMAプログラムのデフォルト選択では適当な季節SARIMAモデルを標本期間における予測の自乗誤差などいくつかの選択基準にもとづいて選んでいるのでX-11-ARIMA法として知られている方法と基本的には同様である．Findley et.al. (1996)ではどの基準でモデルを選んだらよいかについては明確に説明していないので分析する各自が選択の基準を選ぶ必要があろう．もちろん一般には選択基準の選び方により得られる結果は異なる．

[23]ここではより複雑な項が無いことを仮定している．すなわち統計学の用語では交互作用項がすべて無いことを意味する．

$\hat{T}_t, \hat{C}_t, \hat{S}_t, \hat{TD}_t, \hat{LP}_t, \hat{CP}_t, \hat{I}_t$ とすると季節調整系列$\{x_t\}$の一つの定め方は

$$x_t = y_t - (\hat{S}_t + \hat{TD}_t + \hat{LP}_t + \hat{CP}_t) = \hat{T}_t + \hat{C}_t + \hat{I}_t \tag{3.16}$$

とする方法であろう．したがってこうした季節調整系列の定義からは曜日・休日変動項$\{TD_t\}$, 閏年変動項$\{LP_t\}$, 異常値(変化点)項$\{CP_t\}$などを無視(ないし軽視)した季節調整系列は正しくない系列と見なされることになる[24].

このように経済時系列を構成要素に分解するとき季節調整法X-12-ARIMAにおける季節調整系列は次のような特長を持つと言えるであろう．第一に循環部分をあまり明示的には扱わないので基本的には$T_t + C_t$は一つの項TC_tと理解している．第二には曜日・休日変動項$\{TD_t\}$, 閏年変動項$\{LP_t\}$, 異常値(変化点)項$\{CP_t\}$などの項は固定係数の線形回帰モデルで分析に先だって除去する．したがってこれらの効果に関するある意味での"時間的不変性"を仮定して第1段階でこれら3項をまず推定する．この推定に際してはトレンド変動成分及び季節変動成分の双方が"季節ARIMAモデル"で完全に記述されることが仮定される．第三にはトレンド・循環項TC_t及び季節項$\{S_t\}$は季節調整法X-11と同一の形の時間に関する可変性を仮定して第2段階で推定する．そして，最後にこうして2つの異なる段階により推定された各項をもとに季節調整値を計算することになる．

こうした，季節調整についての基本的な考え方にもとづいて考えられた2段階推定により推定された各項がX-11法によるよりもどのような意味で時系列の成分分解をよりよく推定しているかを吟味する必要があると考えられる[25].

4. 簡単なシミュレーション例

歴史的に得られた経済データを用いて季節調整法を評価することの重要性はいうまでもないことであるが，官庁におけるデータ作成当局との係わりやエコノミストによる経済の現状分析を巡る様々な問題と絡んでくるので必ずしも客観的な評価をしにくい場合もあろう．

こうした問題をある程度回避する評価方法としては理論的な考察とともに人工的なシミュレーション・データによる評価方法が考えられる．そこで，以下では簡単なメカニズムにより発生したデータに対してX-12-ARIMA(デフォルト版)プログラムとDECOMPプログラム[26]により抽出した季節要素を例示しておこう．

図2は簡単な折れ線であらわされるトレンド項にホアイト・ノイズと呼ばれている互いに独立な正規確率変数の実現値を加法的につけ加えて作ったシミュ

---

[24] ここで挙げた変動項は明らかにその周期は季節変動に一致しない．例えば閏年変動項はほぼ4年の周期，曜日効果はほぼ28年(336月)の周期を持っているので閏年効果と曜日効果を原系列から除去すると効果除去前と除去後で季節調整済系列の和として定められた年集計数値は異なることになる．したがって，こうした効果を除去した系列は季節調整済系列と呼ぶよりはむしろ季節効果等調整系列とでも呼ぶ方が無用な混乱は避けられるかもしれない．

[25] この論点について既に言及している例を挙げるとトレンド成分と季節成分の解釈は2つの段階で必ずしも同一のものとして理解できないので，2つの推定段階の結果として推定された季節効果や曜日効果などが明確に分離されていない可能性もありうる．例えば大きな曜日効果などが推定された時には季節成分との相関を分析することなどが考えられる．

[26] 統計数理研究所の赤池弘次氏のアイデア(赤池(1989))を同研究所の北川源四郎氏が実現したプログラムである．日本語による解説は北川(1993)にある．ただし，ここではX-12-ARIMA法の結果との比較の都合上でトレンドと独立した循環部分の存在を無視して，パラメターを$k=2, l=1, m=0$と設定して計算した．云うまでもないことであるがDECOMPプログラムにもいくつかのオプションが存在するので設定の仕方で異なる結果が得られる．

レーション系列である．この系列を原系列としてプログラムX-12-ARIMAおよびDECOMPにより抽出された(つまり推定された)季節成分をそれぞれ図3と図4に示しておいた．この場合には定義から真の季節性はゼロということが始めからわかっている場合であり，2つの図よりともに誤った季節性を検出していることを読み取ることができよう．しかしながら，図3と図4を比べると季節性の検出に関する誤りの程度はプログラムDECOMPの方がはるかに小さいことも読み取ることができよう．

云うまでもないことであるが，ここで言及した数値例はあくまで簡単な例を用いた季節調整法を巡る一つの問題の提起である．ここで想定した以外の状況でX-12-ARIMA法が優れた性能を示す可能性を否定するものでも無い．ここでの報告例は，現時点ではどのような状況で優れているか，あるいはそうではないかについて十分な証拠が存在しないことを例示するのが主な目的である．

5. X-12-ARIMA法の評価と暫定的結論

本稿では主として理論的観点からX-12-ARIMA季節調整法について重要と思われる主要な論点に問題提起を試みた．これまでの議論からX-12-ARIMA法の評価とその運用について暫定的ではあるがいくつかの結論を導くことができるので，最後にそれを列挙しておく．

第一に季節調整法X-12-ARIMAはこれまで官庁でよく使われてきた季節調整法X-11を改善する興味深い試みである．しかしながら，現在までに与えられている一次資料からはこれまでX-11法の問題点として批判されている点について原理的(あるいは理論的)にどこまで解決しているかについてはまだ十分に判断することはできないというのが偽らざる暫定的結論である．また，与えられている一次資料から判断する限り利用している統計的方法の正当化について若干の検討すべき課題があると判断した[27]．

第二にはX-12-ARIMA法を実務的に運用してゆく為には個々の系列に対する線形回帰部分及び季節ARIMA部分が安定した構造を持つことを前提にした上で正しく識別(identification)することが重要となる．しかしながら，統計的モデルの安定性については経済時系列の場合には構造変化の可能性を相当に考慮する必要性がある．したがってデータの利用期間を大きくすれば安定性について良い結果が得られるとは必ずしも言えないと考えられる．そこで季節ARIMAモデルの識別に際してはモデルを規定するパラメター(p, d, q, P, D, Q)及び線形回帰モデルにおける変数$\{x_{it}, i = 1, \cdots, r\}$の選択とともに，安定した統計的モデルの推定の観点から利用できるデータ観測期間$[1, T]$とするときに予測に用いる季節ARIMAモデルの推定期間$[T_1, T]$及び予測量の構成期間$[T, T + H]$の長さの選択も課題となろう．

さらにX-12-ARIMA法を利用しようとする立場からはRegARIMAモデリングにより適当な統計的モデルを選択する際に識別方法については赤池情報量基準(AIC)などの統計的基準がありえよう。しかしながら，非定常確率過程や時点が未知の変化点が存在する場合には実務的にはもちろん理論的にもかなり明確化されていない若干の論点がある．このことは，現状では実際のモデル識別の操作が極めて分析者の主観的判断にまかされる可能性を否定できなくなるので，そのこ

[27]いうまでもないことであるが，本稿でとりあげた問題について米国センサス局やその他で既に十分に検討済みである可能性を否定するものではない．

との意味と対処について十分に議論を積み重ねることが必要であろう．ちなみに，統計学の研究者の間でもモデル識別の基準について完全な合意は形成されていない[28]．

さらに第二の論点から導かれることであるが，X-12-ARIMA法を採用する場合には今後は統計作成当局がRegARIMA部分の処理方法について明確な説明を加えることが避けられなくなることである．この場合には常にその統計的選択の根拠を他から批判にさらされる可能性があることを予め考慮しておくことが必要であろう．また，ある時期に利用可能なデータの集合をもとにRegARIMAモデルを識別できることは時期がかわれば同一のモデルが識別されることを保証するものではない．したがって，持続的に正しいRegARIMAモデルを識別する努力が要求されよう．

ところで季節ARIMAモデルの識別の困難性を回避する一つの簡単な可能性は自己回帰(autoregressive)モデリングへの回帰と赤池情報量基準(AIC)の活用であろう．統計的時系列解析における季節ARIMAモデルを巡る通常の議論では移動平均過程の役割はより節約的モデル化や過剰階差への簡単な対応として導入されていることも少なくない．他方で，経済時系列の変動では非線形的変動の可能性や母数の変化(構造変化)の可能性が十分に考慮されなくてはならない要請もある．そこで官庁統計ではより機械的に自己回帰モデリングのみを行ってしまうことは検討に値しよう[29]．自己回帰モデルのみ用いる場合には構成される予測量は予測開始付近の観測量のみに依存する局所的予測という著しい特長を持っているので予測開始時点からの遠い過去の影響は少ないと考えられる．実際に自己回帰モデリングを行う場合にはX-12-ARIMA法における季節ARIMAモデル選択の範囲(すなわち一定の次数以下のモデル)をあらかじめ指定しておくことにより容易に解決することができよう．

また別な可能性としては季節調整系列の不確定性について予めに明確にしておく方法が考えられよう．例えば直近の1年程度の調整系列を信頼区間を含んだ形式で発表することなどが考えられる．この場合には信頼区間の幅を推定する必要が生じるのでX-11法などのタイプではない統計モデルに基づく比較的理解可能な別の季節調整の方法の併用などがより望ましくなろう．

最後になるがいずれにしても，官庁における季節調整法の扱いの変更は長期的に様々な影響を与えることが予想される．研究者サイドからの発言としては，データ解釈を巡って論争的な解析結果ではなく人工的なシミュレーション・データなどより冷静に判断できる材料をもとに季節調整法の評価を行った結果を官庁サイドから持続的に示すなどのことを期待したい[30]．

---

[28]すなわち，研究者Aの識別したモデルを研究者Bが批判することはよく行われるし，AICは有力ではあるが一つの統計的基準である．Aを統計作成機関，Bを民間研究機関に置き換えた結果は今後は回避できないと考えられる．

[29]すなわち自己回帰モデリングを機械的に行っていることをあらかじめ宣言しておく方法である．この場合には当局のモデル識別能力に対する批判は避けられないにしてもより少なくなろう．

[30]季節調整法を含めて経済データに関する理論的問題や実務的問題についての関係官庁における研究体制の問題点について(よく中身を知らない"無責任な" 部外者からの立場から)あえて言及する．日本における関係当局での研究体制は米国のセンサス局とは比較する必要がないほど弱体であると言わざるを得ない．その理由はおそらく多岐にわたるのであろうが，この間の統計作成関連部門の政府における地位のあり方や人員・予算の弱体化と言ったことも大きな要因ではないかと考える．官庁統計の関係者は現在議論されている問題の長期的な視点での重要性を認識され，これを機会に関係統計部局における研究体制の発展の必要性と重要性を各当局や予算当局な

参考文献

Akaike, H. (1973), "Information Theory and an extension of the Maximum Likelihood Principle," *2nd Int. Symp. on Inf. Th.* eds. B.N. Petrov and F.Caski, Akademia Kiado, Budapest, 267-280.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976), *Time Series Analysis: forecasting and control*, 2nd edition, Holden-Day.

Bureau of the Census (1967), "The X-11 Variant of the Census Method II Seasonal Adjustment Program," by Shiskin, J., Young, A.H., and Musgrave J.C., Technical Paper No. 15, U.S. Department of Commerce.

Bureau of the Census (1996), "X-12-ARIMA Reference Manual," Beta Version 1.1.

Findley, D.F., B.C.Monsell, M.C. Otto, W.R.Bell, and M.C.Pugh (1988), "Toward X-12-ARIMA," Unpublished Manuscript.

Findley, D.F. and B.C.Monsell (1989), "Reg-ARIMA Based Preprocessing for Seasonal Adjustment," Proceedings of the Statistics Canada, Symposium on Analysis of Data in Time Series.

Findley, D.F., B.C.Monsell, H.B.Shulman, and M.G.Pugh (1990), "Sliding-Spans Diagnostics for Seasonal and Related Adjustments," *Journal of the American Statistical Association*, Vol.85, 345-355.

Findley, D.F., B.C.Monsell, W.R.Bell, M.C.Otto, and B.C. Chen (1996), "New Capabilities and Methods of the X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Program," Unpublished Manuscript.

Ghysels, E., Granger, C.W.J., and Siklos, P.L. (1996), "Is Seasonal Adjustment a Linear or Nonlinear Data-Filtering Process ?," *Journal of the Business and Economic Statistics*, Vol.14, N.3, 374-397, American Statistical Association.

Kenny, P.B. and Durbin, J. (1982), "Local Trend Estimation and Seasonal Adjustment of Economic and Social Time Series," *Journal of Royal Statistical Association*, Vol.145, 1-41.

赤池弘次(1989),「事前分布の選択とその応用」, 鈴木・国友編「ベイズ統計学とその応用」東京大学出版会.

北川源四郎(1993),「時系列プログラミング」岩波書店.

経済企画庁経済研究所(1971),「季節変動調整法」研究シリーズ22.

黒川恒雄(1979),「経済時系列の分析とその季節変動の調整」統計, 日本統計協会.

日本銀行調査統計局(1996),「X-12-ARIMA 操作マニュアル:概要編」.

溝口敏行・刈屋武昭(1983),「経済時系列入門」日本経済新聞社.

山本拓(1987),「経済の時系列分析」,創文社.

どに訴える必要があろう.

6. 付論

6.1 X-12-ARIMA 移動平均

いま観測される時系列を$\{y_t; t = 1, \cdots, T\}$の実現値としよう．また議論を簡単にする為に$y_t = 0\ (t \leq 0)$としておこう．季節ARIMAモデルにあらわれる未知母数をベクトルとしてまとめてω, 利用可能な観測量から求められる推定量を$\hat{\omega}$としておこう．現在・過去の観測系列から求められる将来時刻$t = T+h\ (h = 1, \cdots, H)$における$y_{T+h}$の予測量を$\hat{y}_{T+h|T}$とすると

$$\hat{y}_{T+h|T} = \sum_{j=0}^{T-1} a_j^h(\hat{\omega}) y_{T-j} \tag{6.1}$$

とあらわすことができる．ここで$a_j^h(\hat{\omega})$はj, h(予測期間), $\hat{\omega}$(母数推定量) に依存する係数である．ここで$\{y_t\}$に対してm項対称移動平均をかけた結果得られる時系列を$\{x_t\}$とすると

$$x_t = \sum_{i=-m}^{m} w(i) \hat{y}_{t+i|T}$$

と書ける．したがって，$T - m + 1 \leq t \leq T$に対しては

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=-(T-t)}^{m} w(i) y_{t-i} + \sum_{k=1}^{t+m-T} w(k+T-t) \hat{y}_{T+k|T} \\ &= \sum_{i=-(T-t)}^{m} w(i) y_{t-i} + \sum_{k=1}^{t+m-T} \sum_{j=0}^{T-1} w(k+T-t) a_j^k(\hat{\omega}) y_{T-j} \end{aligned}$$

(6.2)

と過去の観測量で表現される．ここで新たに係数$c_{i,T-t}^m(\omega)$を定義関数$I(\cdot)$を用いて

$$c_{j,T-t}^m(\omega) = [w(t-T+j) I(T-t+j \leq m) + \sum_{k=1}^{t+m-T} w(k+T-t) a_j^k(\omega)] I(T-m+1 \leq t \leq T)$$

により定めると (6.2) 式は

$$\sum_{i=0}^{T-1} c_{i,T-t}^m(\omega) y_{T-i} + \sum_{i=0}^{T-1} [c_{i,T-t}^m(\hat{\omega}) - c_{i,T-t}^m(\omega)] y_{T-i}\ . \tag{6.3}$$

と書き換えることができる．ここで (6.3) の第一項の係数は選ばれた季節ARIMAモデルに依存して決まるフィルタ項である．第二項は選ばれた季節ARIMAモデルの推定量$\hat{\omega}$にも依存しているので，季節ARIMAモデルと利用可能な時系列データ$\{y_t\ (1 \leq t \leq T)\}$にも依存して決まるフィルタ項に対応している．データの直近部分では条件$T - m + 1 \leq t \leq T$を満足するので命題1の条件 (a)-(c) が導かれ

る．また第二項の移動平均の比重を求める時に季節ARIMAの推定部分が入るので若干の非線形性(d)も生じることがわかる．

ここで可能な限り簡単な具体例として$\{y_t\}$が季節ARIMAモデル$(0,1,1)\times(0,1,1)_s$にしたがう場合を考えよう．このときには

$$(1-B)(1-B^s)y_t=(1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^s)a_t\ , \tag{6.4}$$

ただし，$y_t=0\ (t\le 0), |\theta_1|<1, |\Theta_1|<1$ を満足するものと仮定しておく．このとき時刻Tにおけるh期先予測値は次のような式を満たさねばならない．

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+h|T} &= \hat{y}_{T+h-1|T}+\hat{y}_{T+h-s|T}-\hat{y}_{T+h-s-1|T}\\ &\quad +\hat{a}_{T+h|T}-\theta_1\hat{a}_{T+h-1|T}-\Theta_1\hat{a}_{T+h-s|T}+\theta_1\Theta_1\hat{a}_{T+h-s-1|T}\ .\end{aligned} \tag{6.5}$$

ここで$\{a_t\}$は互いに独立な誤差項であるので現在時点での将来の予測値はゼロとなり$\hat{a}_{t|T}=0\ (t>T)$, また$\hat{a}_{t|T}=\hat{a}_t\ (t\le T)$ となる．ただし

$$\hat{a}_{t+k}=(1-\theta_1 B)^{-1}(1-\Theta_1 B^s)^{-1}(1-B)(1-B^s)y_{t+k} \tag{6.6}$$

で与えられる．ここで(6.6)は形式的表現であるが条件$|\theta_1|<1, |\Theta_1|<1$ の下では正当化することができる．このように季節ARIMAモデルの中に移動平均(moving average)過程 ($q>0$ あるいは$Q>0$) が含まれると予測量を構成する為に直接には観測されない誤差項を現在・過去の観測値から推定する必要が生じる．自己回帰型モデルによる予測の場合にはこうした項の推定は必要ない．

ここで，さらに単純化して数値的に$\Theta_1\cong 0$となる場合を考えよう．このとき

$$\begin{aligned}\hat{a}_t &\cong \sum_{i=0}^{t-(s+2)}\theta_1^i\Delta\Delta_s y_{t-i}\\ &= [y_t-(1-\theta_1)\sum_{i=1}^{t-(s+2)}\theta_1^{i-1}y_{t-i}]-[y_{t-s}-(1-\theta_1)\sum_{i=s+1}^{t-2}\theta_1^{i-1-s}y_{t-i}]\end{aligned}$$

で与えられる．そこで(6.5)を利用してX-11法においてもっとも単純な移動平均として知られている3×1移動平均がX-12-ARIMA法ではどのように変化するかを考えよう．まず比較の為にX-11法マニュアル(Bureau of Census (1967))に掲載されている表1-Aを表1として示しておく．表の立軸の時刻は移動平均の計算時点をあらわし，横軸は移動平均に表れる観測データの時点をあらわしている．

表1 : $X-11\,1A$

	T-2	T-1	T
T+1	-.167	.419	.749
T	0.0	.39	.61
T-1	1/3	1/3	1/3

季節階差$s=12$として月次データ系列の場合をとりあげよう．もし(6.4)式において第二項の影響が大きくない状況を考えると近似的に

$$\hat{y}_{T+1|T}\cong(1-\theta_1)y_T+(1-\theta_1)\theta_1 y_{T-1}+(1-\theta_1)\theta_1^2 y_{T-2}+\cdots \tag{6.7}$$

となるので，T時点での移動平均値は

$$
\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{3}y_{T-1} + \frac{1}{3}y_T + \frac{1}{3}\hat{y}_{T+1|T} \\
&\cong \frac{1}{3}(2-\theta_1)y_T + \frac{1}{3}(1+\theta_1-\theta_1^2)y_{T-1} + \frac{1}{3}(\theta_1^2-\theta_1^3)y_{T-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

(6.8)

で与えられる．同様な計算を繰り返し用いると$\hat{y}_{T+2|T}, \hat{y}_{T+1|T}$, y_Tより，近似的に時刻$T+1$における移動平均値は

$$
x_{T+1} \cong \frac{1}{3}(3-2\theta_1)y_T + \frac{2}{3}(1-\theta_1)\theta_1 y_{T-1} + \frac{2}{3}(1-\theta_1)^2\theta_1^2 y_{T-2} + \cdots \tag{6.9}
$$

により得ることができる．

ここでX-11法との比較の為に3種類のθ_1の値0.25, 0.9, 1.0, をこれらの式に代入すると表1に対応する次のような近似的な表が得られる．以上の式及び数表はいずれも近似的ではあるが，これらから一般にX-12-ARIMA法による移動平均は3×1の表であっても末端値は全ての過去の観測値に依存することがわかる．またその依存の程度は母数θ_1の値により，例えば$\theta_1 = 0.25$のときには表2は表1と実質的にはあまりかわらないことになっている．ところが，これに対して$\theta_1 = 1.0$の場合は奇妙な数表が得られていることに注意しておこう．この場合は仮想的に計算した例であり，実際にはX-12-ARIMA プログラムではこのような場合は注意深く計算途中で排除するように工夫されている．しかしながら，季節調整の実務家にとってはその理由は必ずしも自明なことではないように思われる．

表2 : $X-12\ 1A$

$\theta_1 = 0.25$

	T-3	T-2	T-1	T
T+1	.008	.031	.125	.833
T	.004	.016	.396	.583
T-1	.0	1/3	1/3	1/3

表3 : $X-12\ 1A$

$\theta_1 = .9$

	T-3	T-2	T-1	T
T+1	.049	.054	.060	.400
T	.024	.027	.363	.367
T-1	.0	1/3	1/3	1/3

表4 : $X-12\ 1A$

$\theta_1 = 1.0$

	T-3	T-2	T-1	T
T+1	.0	.0	.0	1/3
T	.0	.0	1/3	1/3
T-1	.0	1/3	1/3	1/3

6.2 推定量の性質

ここでは本論で述べた議論について時系列y_tが非定常和分過程の場合($d = 1$あるいは$D = 1$)の簡単な例を用いて説明する．

例1: 確率過程$\{y_t\}$が

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta z_t + u_t, \\
u_t &= u_{t-1} + a_t \ (t = 1, \cdots, T)
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

となる場合を考えよう．ここでz_tはレベル・シフト変数であり，βは係数母数，また$\{a_t\}$の分散はσ^2としよう．初期値$u_0 = 0$とおいて最小自乗法を適用するとβの最小自乗推定量$\hat{\beta}_{OLS}$は

$$
\hat{\beta}_{OLS} - \beta = (-\frac{1}{T_1}) \sum_{t=1}^{T_1} u_t \tag{6.11}
$$

とあらわされる．ここで$\{u_t\}$はランダム・ウオーク(1次和分I(1))過程なのでu_T自体の確率的次数は$O_p(1)$ではなく$O_p(T)$である．したがって，$T_1 \longrightarrow +\infty$のとき

$$
\frac{1}{\sqrt{T_1}}[\hat{\beta}_{OLS} - \beta] \xrightarrow{w} \sigma \int_0^1 B(s) ds \tag{6.12}
$$

となる．ここで$\{B(s)\}$は$[0,1]$上の標準ブラウン運動をあらわす確率変数列であり，(6.12)は確率分布の収束の意味である．この表現から明らかなように確率過程が互いに独立な場合を含む定常な場合のように回帰係数の最小自乗推定量に関する一致性などの性質は成立しない．

例2: 確率過程$\{y_t\}$が

$$
y_t = \beta z_t + u_t, \tag{6.13}
$$

かつ$\{u_t\}$が季節ARIMA$(0,1,0) \times (0,1,0)_s$にしたがう場合を想定しよう．すなわち

$$
u_t - u_{t-1} = v_t,\ v_t - v_{t-s} = a_t
$$

となる場合であるが，簡単化の為に$u_t = v_t = 0\ (t \leq 0)$としておこう．この場合には季節ARIMAモデル部分には未知母数を含んでいないので最尤法は一般化最小自乗推定(generalized least squares)法に一致するはずである．

仮に原系列の尤度関数を用いてレベル・シフト変数$\{z_t\}$に対する係数推定量βの一般化最小自乗推定量を$\hat{\beta}_{GLS}$とすると

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_{GLS} - \beta &= (\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u} \\
&= \frac{1}{2}[a_{t_0} - a_{t_0+s}]
\end{aligned}
$$

となる．ここで$\boldsymbol{e}' = (-1, \cdots, -1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{u} = (u_i)$はそれぞれ$T \times 1$のベクトルを表している．したがって，これらの推定量はT個の観測値から構成されるが結果的には2個の誤差の加重和になっていることがわかる．すなわち，これら2個の誤差項の分布により推定量の性質が決まることがわかる．

分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$が未知の場合には以上の議論はより複雑になる．しかしながら本質的な問題は変わらないとみなすことができよう．

X－12－ARIMA

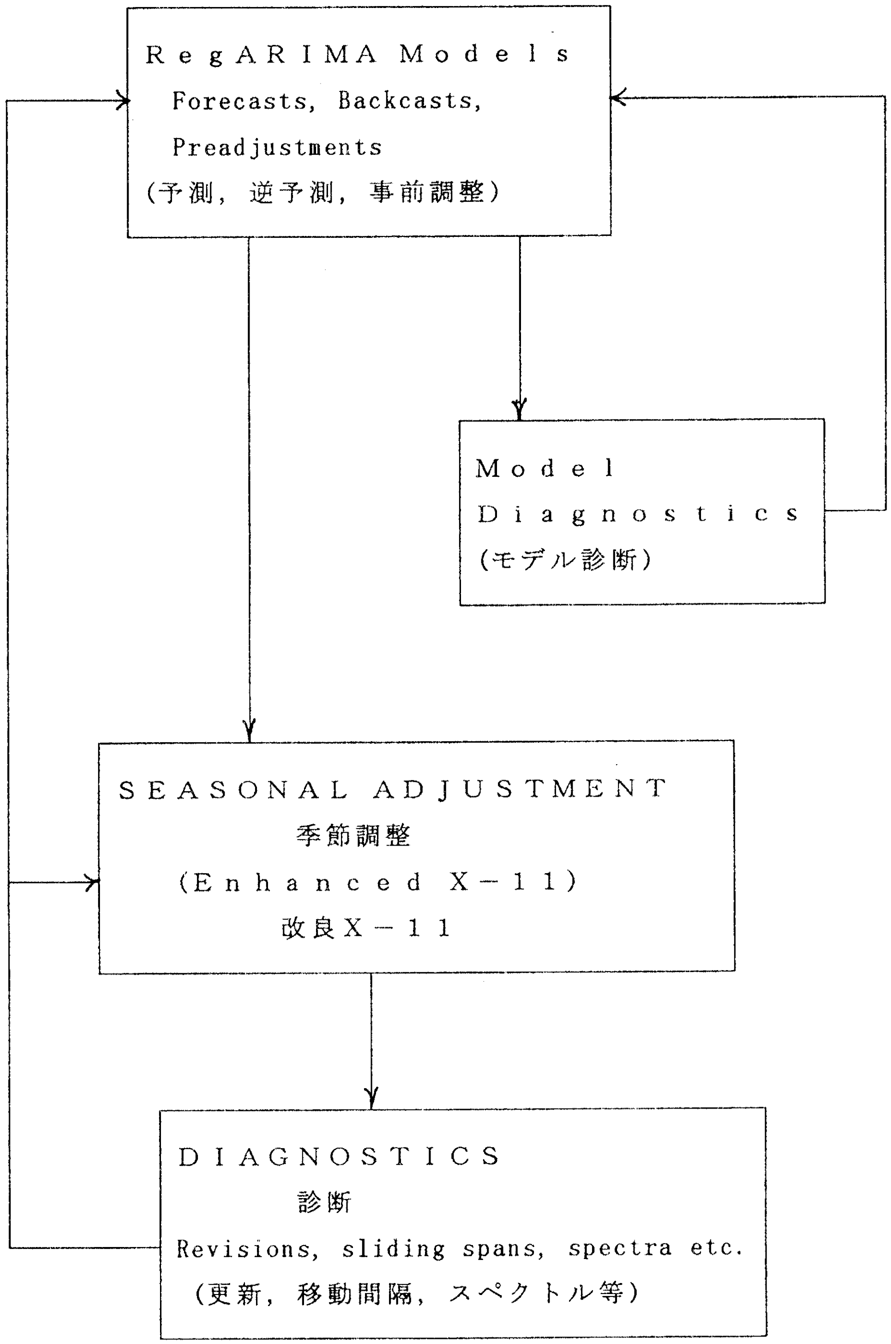

図1

出典:Findley et. al. (1996)

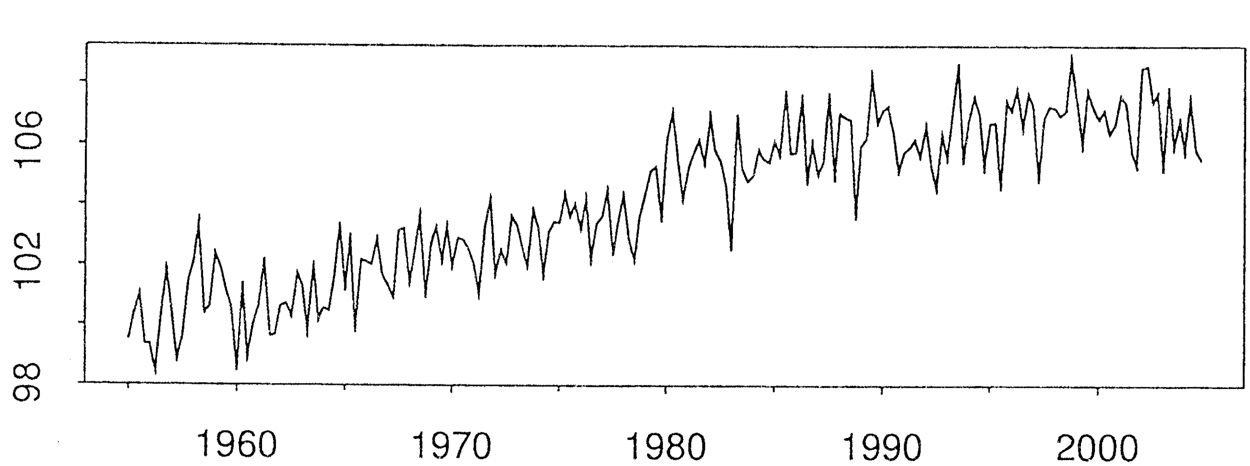

図2：原系列(シミュレーション)

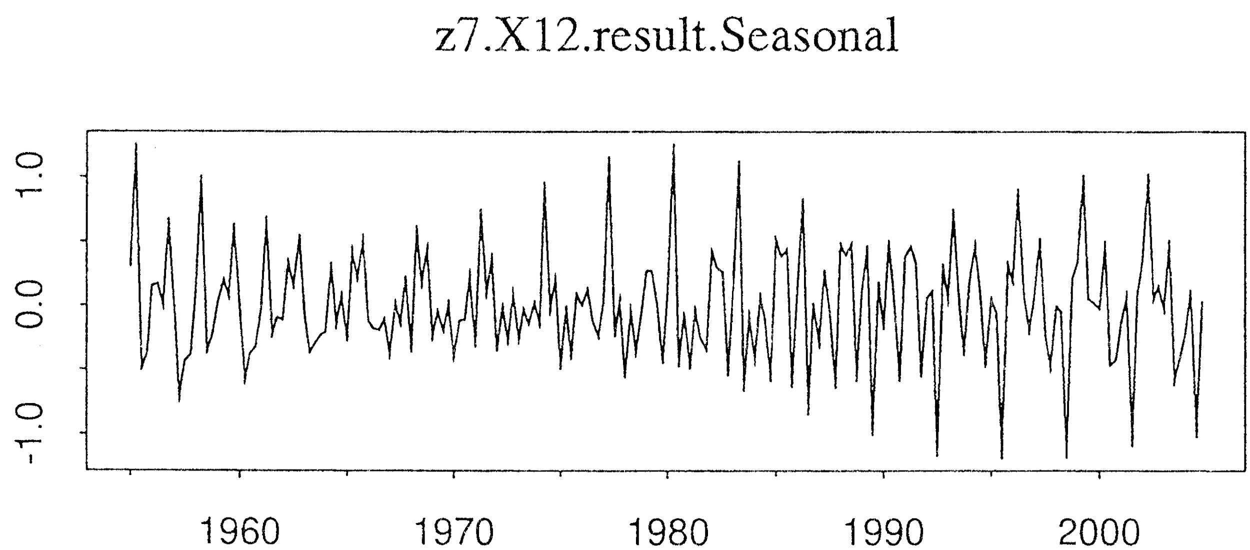

図3：推定された季節成分(X-12)

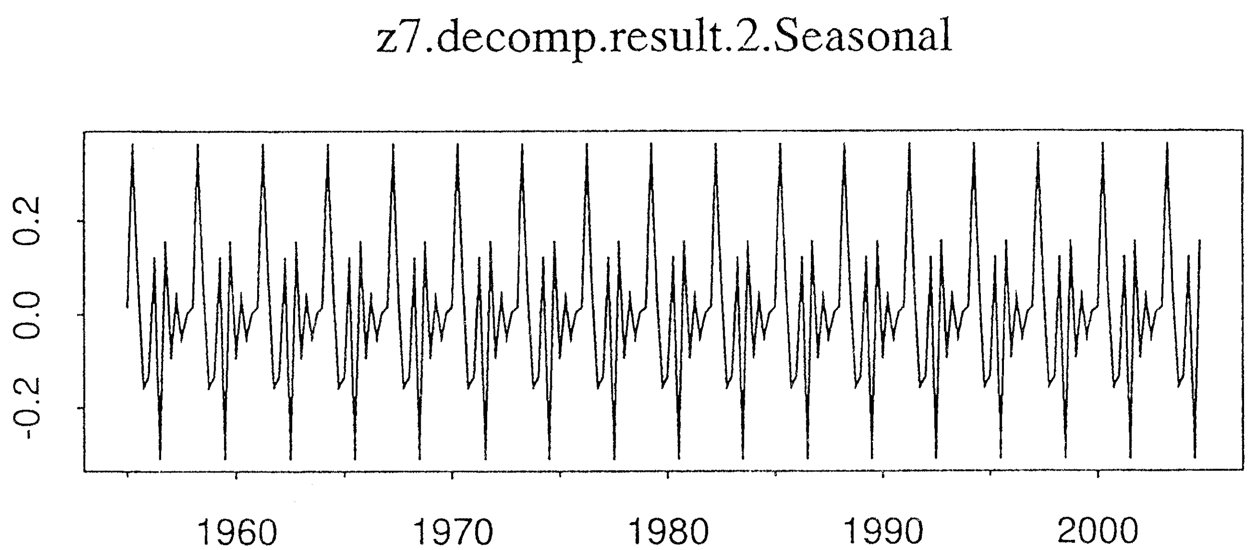

図４：推定された季節成分(DECOMP)